

Національна академія наук України
Інститут ядерних досліджень
Національна академія наук України
Інститут ядерних досліджень

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Майданюк Сергій Петрович

УДК: 539.142

Дисертація

Квантова теорія гальмівного випромінювання фотонів у ядерних процесах

01.04.16 - фізика ядра, елементарних частинок та високих енергій

Природничі науки

(104 фізика та астрономія)

Подається

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів

мають посилання на відповідні джерела.

С.П. Майданюк

Київ 2020

Анотація

С. П. Майданюк. Квантова теорія гальмівного випромінювання фотонів у ядерних процесах.

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.16 — фізика ядра, елементарних частинок і високих енергій.

Природничі науки (104 - фізика та астрономія).

Інститут ядерних досліджень НАН України.

Київ, 2020.

Дисертація присвячена розробці нової квантової теорії випромінювання гальмівних фотонів у ядерних процесах та методам квантової механіки в описі ядерних зіткнень і розпадів. Теорію випромінювання фотонів розвинуто до α -розпаду сферичних та деформованих ядер, розпадів ядер з вильотом протонів, розсіяння протонів та π -мезонів на ядрах, спонтанного та потрійного поділу ядер. Ця теорія є найбільш точною в описі експериментальної інформації випромінювання фотонів у реакціях, вказаних вище. Вона вперше дозволяє вивчати деформації ядер у розпадах через аналіз експериментальних спектрів фотонів, динаміку та геометрію вильоту фрагментів у потрійному поділі ядер. Теорія єдиним чином описує некогерентне та когерентне, електричне та магнітне випромінювання, включає аномальні магнітні моменти нуклонів у ядрах. Проведено перші дослідження випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні піонів (у пучках) на ядрах. Встановлено, що випромінювання фотонів високих енергій, сформоване за рахунок ядерної частини потенціалу, вносить істотний внесок у повний спектр. Для розсіяння прото-

нів та піонів на ядрах теорія визначає параметри ядерної взаємодії з аналізу спектрів випромінювання.

Побудовано новий метод багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) для опису одномірного тунелювання під бар'єром загальної форми та проходження над ним з надвисокою точністю. Метод БВВ повністю використовує тести квантової механіки (на відміну від інших методів) для оцінки коректності та точності розрахунків. Метод БВВ суттєво покращує опис експериментальних даних вильоту протона з ядра, α -розпаду, α -захоплення, дозволяє вивчати глибоко підбар'єрні та надбар'єрні процеси, злиття. При описі α -розпаду та оберненого процесу α -захоплення у формалізмі БВВ вперше в єдиному підході об'єднані тунелювання крізь бар'єр та осциляції во внутрішній області ядра. Але такий точний аналітичний розв'язок (отриманий вперше) включає ще один додатковий новий множник, що описує просторовий розподіл α -частинки у межах ядра (його не було в підході Гамова до визначення періодів напіврозпадів для α -розпадів). На прикладі α -захоплення ядрами ^{44}Ca оцінено роль всіх цих процесів при визначенні ймовірності існування складеного ядра. За допомогою метода БВВ отримано розв'язки проникності з тестами для бар'єрів у задачах квантової космології, де існують обмеження квазікласичних методів. Побудовано новий метод опису тунелювання у полі потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається через пакети. Проаналізовано властивості впливу дисипативних сил на тунелювання у захопленні α -частинки ядром ^{44}Ca .

Ключові слова:

Гальмівне випромінювання, Розсіяння піонів на ядрах, розсіяння протонів на ядрах, Розпад ядра з вильотом протона, α -Розпад, α -Захоплення, Злиття, Спонтанний поділ, Потрійний поділ, Метод багаторазового внутрішнього відбиття, Дисипація Альбрехта.

Abstract

S. P. Maydanyuk. Quantum theory of bremsstrahlung emission of photons in nuclear processes.

Qualification research work submitted as a manuscript.

Thesis for the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in specialty 01.04.16
— Physics of Nucleus, Elementary Particles and High Energies.

Natural Sciences (104 - Physics and Astronomy).

Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine.

Kyiv, 2020.

The dissertation proposes a new quantum theory of emission of bremsstrahlung photons in nuclear processes and new methods of quantum mechanics for nuclear scattering and decays. The theory of bremsstrahlung photons is developed for α decay of spherical and deformed nuclei, nuclear decay with emission of protons, scattering of protons and π -mesons on nuclei, spontaneous and ternary fissions of nuclei. This theory is in the most accurate agreement with experimental information of photons for reactions indicated above. At first time, on the basis of analysis of experimental bremsstrahlung this theory allows to study deformation of nuclei in decays, dynamics and geometry of emission of fragments in the ternary fission. In unified way, the theory describes incoherent and coherent, electric and magnetic bremsstrahlung, including the anomalous magnetic moments of nucleons in nuclei. Presence of incoherent bremsstrahlung in proton-nucleus scattering and absence of this type of bremsstrahlung in α decay of nuclei are explained in frameworks of unified formalism (that is confirmed by experiments). The first investigation of bremsstrahlung in scattering of pions (in beams) on the nuclei has been performed. It is established

that the bremsstrahlung of high-energetic photons formed due to nuclear part of potential makes a significant contribution to the full spectrum. The theory extracts parameters of nuclear interactions in scattering of protons and π -mesons on nuclei from analysis of the bremsstrahlung spectra.

A new high precision method of multiple internal reflections (MIR) is constructed to describe a one-dimensional tunneling under a barrier of arbitrary shape and propagation above it. Unlike other methods, the method MIR fully uses tests of quantum mechanics, which control correctness, accuracy of calculations. The method MIR improves essentially description of experimental data for proton emission from nuclei, α -decay, α -capture. The method is accurate in study of deep sub-barrier and above-barrier processes, fusion. Using it, penetrabilities with tests are obtained for barriers used in problems of quantum cosmology, where there are limitations of quasi-classical methods. This method for the first time describes in unified way the oscillations in the internal spatial region inside nucleus and tunneling in the problems of α -decay and α -capture, new factors have own physical interpretation. A new quantum-mechanical method of tunneling for the Albrecht potential with dissipative term defined via packets is constructed. Influence of dissipative forces on tunneling in α -capture by ^{44}Ca is analyzed.

Keywords:

Bremsstrahlung, Scattering of pions off nuclei, scattering of protons off nuclei, decay of nucleus with emission of proton, α -Decay, α -Capture, Fusion, Spontaneous fission, ternary fission, Method of multiple internal reflections, Dissipation of Albrecht.

Списки наукових праць здобувача за темою дисертації

Список наукових праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації (без праць у журналах за матеріалами конференцій)

1. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Does sub-barrier bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po exist? Prog. Theor. Phys. **109** (2), 203–211 (2003).
2. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Angular analysis of bremsstrahlung in α -decay, Europ. Phys. Journ. **A28** (3), 283–294 (2006).
3. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, and C. Saccá, Bremsstrahlung emission during α -decay of ^{226}Ra , Mod. Phys. Lett. **A23** (31), 2651–2663 (2008).
4. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, C. Saccá, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, Bremsstrahlung emission accompanying alpha-decay of ^{214}Po , Europ. Phys. Journ. **A36** (1), 31–36 (2008).
5. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying α -decay of deformed nuclei, Nucl. Phys. **A823** (1–4), 38–46 (2009).
6. S. P. Maydanyuk, Multipolar approach for description of bremsstrahlung during α -decay and unified formula of the bremsstrahlung probability, The Open Nucl. Part. Phys. J **2**, 17–33 (2009) [open access].

7. С. П. Майданюк, Мультипольний підхід до опису гальмівного випромінювання при α -розпаді, Журн. Фіз. Досл. **13** (№ 3), 3201 (2009) [15 с., укр.].
8. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous of ^{252}Cf , Phys. Rev. **C82** (1), 014602 (2010) [9 pages].
9. S. P. Maydanyuk, Multipolar model of bremsstrahlung accompanying proton decay of nuclei, Jour. Phys. **G38** (8), 085106 (2011).
10. S. P. Maydanyuk, Model for bremsstrahlung emission accompanying interactions between protons and nuclei from low energies up to intermediate energies: Role of magnetic emission, Phys. Rev. **C86** (1), 014618 (2012) [21 pages].
11. S. P. Maydanyuk and P.-M. Zhang, New approach to determine proton-nucleus interactions from experimental bremsstrahlung data, Phys. Rev. **C91** (2), 024605 (2015) [20 pages].
12. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New approach for obtaining information on the many-nucleon structure in α decay from accompanying bremsstrahlung emission, Phys. Rev. **C93** (1), 014617 (2016) [14 pages].
13. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Manifestation of the important role of nuclear forces in the emission of photons in pion scattering off nuclei, Phys. Rev. **C98** (5), 054613 (2018) [12 pages].
14. X. Liu, S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L. Liu, First investigations of hypernuclei in reactions via analysis of bremsstrahlung photons, Phys. Rev. **C99** (6), 064614 (2019) [24 pages].

15. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Nucleon microscopy in proton-nucleus scattering via analysis of bremsstrahlung emission, *Phys. Rev.* **C99** (6), 064602 (2019) [31 pages].
16. F. Cardone, S. P. Maidanyuk, R. Mignani, and V. S. Olkhovsky, Multiple internal reflections during particle and photon tunneling, *Found. Phys. Lett.* **19** (5), 441–457 (2006).
17. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Проблема проникності бар'єрів у задачі протонного розпаду: повністю квантовий підхід та початкові умови розпаду, *Журн. Фіз. Досл.* **14** (4), 4002 (2011) [15 с., укр.].
18. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Problem of nuclear decay by proton emission in fully quantum consideration: Calculations of penetrability and role of boundary condition, *Journ. Mod. Phys.* **2** (6), 572–585 (2011).
19. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Метод багаторазових внутрішніх відбиттів як засіб визначення ймовірностей злиття в задачах захоплення альфа-частинок ядрами, *Журн. Фіз. Досл.* **18** (1), 1001 (2011) [11 с., укр.].
20. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and S. V. Belchikov, Quantum design using a multiple internal reflections method in a study of fusion processes in the capture of alpha-particles by nuclei, *Nucl. Phys.* **A940**, 89–118 (2015).
21. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New quasibound states of the compound nucleus in α -particle capture by the nucleus, *Phys. Rev.* **C96** (1), 014602 (2017) [13 pages].
22. S. P. Maydanyuk, Wave function of the Universe in the early stage of its evolution, *Europ. Phys. Journ.* **C 57** (4), 769–784 (2008).

23. S. P. Maydanyuk, A fully quantum method of determination of penetrability and reflection coefficients in quantum FRW model with radiation, *Int. Journ. Mod. Phys. D* **19** (4), 392–435 (2010).
24. S. P. Maydanyuk, Resonant structure of the early-universe space-time, *Eur. Phys. Journ. Plus* **126** (8), 76–94 (2011).
25. В. С. Ольховский, С. П. Майданюк, Э. Реками, О несамосопряженных операторах в описании наблюдаемых в квантовой теории и ядерной физике, *ЭЧАЯ* **41** (Вып. 4), 951–995 (2010) [Eng.: *Physics of Particles and Nuclei* **41** (4), 508–530 (2010)].
26. E. Recami, V. S. Olkhovsky, and S. P. Maydanyuk, On non-selfadjoint operators for observables in quantum mechanics and quantum field theory, *Int. Journ. Mod. Phys. A* **25** (9), 1785–1818 (2010).
27. С. П. Майданюк, Тунелювання крізь бар'єри Альбрехта з дисипативними компонентами, *Журн. Фіз. Досл.* **19** (3), 3001 (2015).
28. S. P. Maydanyuk, SUSY-hierarchy of one-dimensional reflectionless potentials, *Annals Phys.* **316** (2), 440–465 (2005).

Список наукових праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov. Bremsstrahlung in alpha-decay: Angular analysis of spectra. The II Conference on High Energy Physics, Nuclear Physics and Accelerator Physics. 1–5 March 2004, Kharkiv (Ukraine). *Prob. At. Sci. Tech.. Ser.: Nucl. Phys. Inv.* **44** 5, 19–21 (2004).
2. G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Giardina, G. Fazio, C. Saccá, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, and

- D. A. Smirnov, Radiation of bremsstrahlung accompanying the α -decay of heavy nuclei. *Radiation Effects and Defects in Solid* **164** (5–6), 283–286 (2009).
3. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying decays and spontaneous fission of heavy nuclei. The International Conference “*Nuclear reactions on nucleons and nuclei*”. 5–9 October 2009, Messina (Italy). *Int. Journ. Mod. Phys.* **E19** (5), 1189–1196 (2010).
 4. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of photons accompanying ternary fission of ^{252}Cf . The International Symposium “*Quasifission Process in Heavy Ion Reactions*”. 8–9 November 2010, Messina (Italy). *Journ. Phys.: Conf. Ser.* **282**, 012016 (2011).
 5. S. P. Maydanyuk, Quantum method of determination of penetrability in FRW model with radiation. The Humboldt-Kolleg “Humboldt Cosmos: Science and Society”, HCS2-Kiev2009. 19–22 of November 2009, Kiev (Ukraine). *Visn. Kiev. Univ., Ser.: Fiz. Mat. Nauk.* **3**, 47–52 (2010).
 6. S. P. Maydanyuk, New exactly solvable reflectionless potentials of Gamov’s type. The XXXII Winter School of Physics. 22 February – 2 March 2005. ITEP, Moscow (Russia). *Surveys in High Energy Physics* **19** (3–4), 175–192 (2004).
 7. S. P. Maydanyuk, One-dimensional inverse power reflectionless potential $V(x) = \text{const} \cdot |x - x_0|^{-n}$. The II Conference on High Energy Physics, Nuclear Physics and Accelerator Physics. 1–5 March 2004, Kharkov (Ukraine). *Prob. At. Scienc. Tech. Ser: Nucl. Phys. Inv.* **44** (5), 22–25 (2004).
 8. S. P. Maydanyuk, Quantum mechanics of nuclear decays. Chapter in book

- “Nuclear Science of the Series: Energy Science and Technology” (Studium Press LLC, USA, 2014), **4**, 428 [33 pages].
9. S. P. Maydanyuk, A. Del Popolo, V. S. Olkhovsky, and E. Recami, A Fully Quantum Model of Big Bang. Chapter in book “Quantum Mechanics” (Intech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
 10. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Full Quantum Study of the FRW Model with Radiation and Chaplygin Gas. Chapter in book “The Big Bang: Theory, Assumptions and Problems”, pp. 185–196 (Nova Publisher, Jason R. O’Connell and Alice L. Hale Ed., ISBN: 978-1-61324-577-4, 2012).
 11. V. S. Olkhovsky, E. Recami, and S. P. Maydanyuk, Time as Quantum Observable, Canonical Conjugated to Energy. Chapter in book “Measurements in Quantum Mechanics” (InTech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
 12. S. P. Maydanyuk, *Nuclear bremsstrahlung: methods of quantum mechanics and electrodynamics in tasks of emission of photons* (Palmarium Academic Publishing, Saarbrücken, 2012), 148 p.
 13. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Method of determination of the most probable coordinate of formation of α -particle in α -decay, 25 p., arXiv: 0805.4165.

Зміст

АНОТАЦІЯ	2
АВСТРАКТ	4
СПИСКИ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	6
Список наукових праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації	6
Список наукових праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації	9
ЗМІСТ	12
Вступ	20
РОЗДІЛ 1. ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ СФЕРИЧНИХ ЯДЕР	37
1.1 Вступ	37
1.2 Заряджена частинка в електромагнітному полі ядра	39
1.3 Теорія збурень квазістаціонарних станів	40
1.4 Матричний елемент переходу	42
1.5 Лінійна й кругова поляризації фотона	44
1.6 Розкладання векторного потенціалу електромагнітного поля	45
1.7 Мультипольний підхід до визначення матричного елемента	47
1.8 Кутова ймовірність випромінювання при α -розпаді ядер	49
1.9 Спектри випромінювання для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm	52

	13
1.10 Головні результати і висновки до Розділу 1	67
РОЗДІЛ 2. ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ ДЕФОР-	
МОВАНИХ ЯДЕР	69
2.1 Вступ	69
2.2 Ймовірність випромінювання при α -розпаді	71
2.3 Деформований α -ядерний потенціал	73
2.4 Спектри випромінювання для деформованого ядра ^{226}Ra	77
2.5 Головні результати і висновки до Розділу 2	80
РОЗДІЛ 3. ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ СПОНТАННОМУ ПОДІЛІ ЯДЕР	82
3.1 Вступ	82
3.2 Гальмівне випромінювання при α -розпаді: вплив деформації ядра на спектр випромінювання	83
3.3 Модель гальмівного випромінювання, яке супроводжує спонтан- ний поділ <i>[форма поверхні ядра у поділі на два фрагменти (88), потенці- ал взаємодії між фрагментами (89), модель випромінювання, що супроводжує поділ ядра на два фрагменти (92), розрахунок радіальних інтегралів у далекій асимптотичній області й наближення провідної гармоніки (94)]</i>	88
3.4 Випромінювання фотонів, що формується легкими та середніми фрагментами при поділі ^{252}Cf	98
3.5 Випромінювання, що формується важкими фрагментами, і пов- ний спектр випромінювання при спонтанному поділі ^{252}Cf	100
3.6 Головні результати і висновки до Розділу 3	103
РОЗДІЛ 4. ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ, ЩО СУ-	
ПРОВОДЖУЄ ПОТРІЙНИЙ ПОДІЛ ЯДРА ^{252}Cf	105
4.1 Вступ	105

4.2	Модель гальмівного випромінювання при потрійному поділі ядра <i>[геометрія поділу ядерної системи та потенціал взаємодії (106), розрахунки кулонівської компоненти потенціалу на великих відстанях (107), спектри випромінювання при потрійному поділі ядра ^{252}Cf (108)]</i>	105
4.3	Удосконалення моделі <i>[випромінювання від розльоту фрагментів бінарної ядерної системи (111), випромінювання від α-бінарної ядерної системи (113)]</i>	111
4.4	Головні результати і висновки до Розділу 4	118

РОЗДІЛ 5. ВИПРОМІНЮВАННЯ У ПРОТОННОМУ РОЗПАДІ ЯДЕР ТА РОЗСІЯННІ ПРОТОНІВ НА ЯДРАХ ВІД БІЛЯНУЛЬОВИХ ДО ПРОМІЖНИХ ЕНЕРГІЙ **119**

5.1	Вступ	119
5.2	Рівняння Паулі багатонуклонної системи	122
5.3	Оператор випромінювання	124
5.4	Матричний елемент випромінювання	125
5.5	Кутова ймовірність випромінювання фотонів з імпульсом \mathbf{k}_{ph}	127
5.6	Протон-ядерний потенціал	129
5.7	Результати <i>[електричне, магнітне випромінювання та кутові спектри (130), електричне й магнітне випромінювання у залежності від відстані між протоном і ядром (132), спектри випромінювання при енергії фотонів близ нуля (136), спектри у розсіянні протонів проміжних енергій на ядрах (139)]</i>	129
5.8	Головні результати і висновки до Розділу 5	143

РОЗДІЛ 6. НОВИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРОТОН-ЯДЕРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ З АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ СПЕКТРІВ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ **145**

6.1	Вступ	145
-----	-----------------	-----

6.2	Модель [узагальнене рівняння Паулі для багатонуклонної системи (147), хвильова функція багатонуклонної системи (149), матричний елемент випромінювання (152), ймовірність випромінювання (153)]	147
6.3	Аналіз	154
6.4	Головні результати і висновки до Розділу 6	164
РОЗДІЛ 7. НОВИЙ ПІДХІД ДО ЗДОБУТТЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРО БАГАТОНУКЛОННУ СТРУКТУРУ ЯДЕР ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ З АНАЛІЗУ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ		
		168
7.1	Вступ	168
7.2	Модель [оператор випромінювання α -ядерної системи (171), хвильова функція α -ядерної системи (173), матричний елемент випромінювання та ефективний заряд (175), електричні форм-фактори α -частинки та дочірнього ядра (176), ймовірність випромінювання фотонів (178)]	171
7.3	Розрахунки та аналіз	179
7.4	Головні результати і висновки до Розділу 7	188
РОЗДІЛ 8. МОДЕЛЬ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ ПРИ РОЗСІЯННІ ЗАРЯДЖЕНИХ π^+-МЕЗОНІВ НА ЯДРАХ		
		190
8.1	Вступ	190
8.2	Модель	193
8.3	Аналіз	198
8.4	Перспективи вивчення некогерентних фотонів	202
8.5	Порівняння нашої моделі з підходом [258]	205
8.6	Головні результати і висновки до Розділу 8	208
РОЗДІЛ 9. ПРОБЛЕМА ПРОНИКНОСТІ БАР'ЄРІВ У ЗАДАЧАХ ПРОТОННОГО РОЗПАДУ: КВАНТОВИЙ ПІДХІД ТА ПОЧАТКОВІ УМОВИ РОЗПАДУ		
		210
9.1	Вступ	210

9.2	Метод багаторазових внутрішніх відбиттів [<i>проблеми та досягнення (212), розпад при радіальному бар'єрі, що складається з довільного числа прямокутних сходинок (215), ширина Γ та період напіврозпаду (219), протон-ядерний потенціал (221)</i>]	212
9.3	Аналіз [<i>залежність періоду від точки старту (223), вплив зовнішньої області на період (225), чим відрізняються періоди за методами БВВ і ВКБ? (225)</i>]	222
9.4	Головні результати і висновки до Розділу 9	227

РОЗДІЛ 10. МЕТОД БАГАТОРАЗОВИХ ВНУТРІШНІХ ВІДБИТТІВ У ВИВЧЕННІ ПРОЦЕСІВ ЗЛИТТЯ У ЗАХОПЛЕННІ АЛЬФА-ЧАСТИНОК ЯДРАМИ **229**

10.1	Вступ	229
10.2	Метод [<i>перерізи α-захоплення, підхід різкого обрізання кутового моменту (232), метод БВВ у визначенні проникності бар'єру загальної форми (233), метод мінімізації (234)</i>]	232
10.3	Аналіз [<i>залежність проникності від локалізації захоплення та кутових моментів (236), ВКБ-підхід (238), ймовірності злиття (239), пошук параметрів ядерного потенціалу (243)</i>]	236
10.4	Головні результати і висновки до Розділу 10	250

РОЗДІЛ 11. НОВІ КВАЗІЗВ'ЯЗАНІ СТАНИ СКЛАДЕНОЇ СИСТЕМИ У ЗАХОПЛЕННІ АЛЬФА-ЧАСТИНОК ЯДРАМИ **254**

11.1	Вступ	254
11.2	Метод	258
11.3	Аналіз захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca	268
11.4	Порівняння з теорією квазістаціонарних станів з комплексними енергіями [<i>перерізи (275), стани у непружному розсіянні (276), непружному розсіянні та захопленні (279)</i>]	273
11.5	Головні результати і висновки до Розділу 11	283

РОЗДІЛ 12. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БВВ ДО ЗАДАЧ КВАНТОВОЇ КОСМОЛОГІЇ	286
12.1 Вступ	286
12.2 Модель Фрідманна–Робертсона–Уолкера з радіацією та узагальненим газом Чаплигіна	288
12.3 Перехід до нестационарного рівняння УДВ	289
12.4 Тунелювання пакета через бар'єр, що складається з довільного числа прямокутних сходинок	290
12.5 Аналіз	294
12.6 Головні результати і висновки до Розділу 12	303
РОЗДІЛ 13. ТУНЕЛЮВАННЯ КРІЗЬ БАР'ЄРИ АЛЬБРЕХТА З ДИСИПАТИВНИМИ КОМПОНЕНТАМИ	306
13.1 Вступ	306
13.2 Метод визначення хвильової функції рівняння Шредінгера з потенціалом Альбрехта	311
13.3 Тунелювання крізь прямокутний бар'єр	316
13.4 Аналіз тунелювання у захопленні α -частинки ядром ^{44}Ca	322
13.5 Головні результати і висновки до Розділу 13	325
Висновки	326
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	329
ДОДАТОК А. МАТЕМАТИЧНІ ДОДАТКИ	382
ДОДАТОК Б. ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛІ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ СФЕРИЧНИХ ЯДЕР	391
ДОДАТОК В. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ ДЕФОРМОВАНИХ ЯДЕР	426

ДОДАТОК Г. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА ВИПРОМІНЮВАННЯ ВІД БІНАРНОЇ ЯДЕРНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ПОТРІЙНОМУ ПОДІЛІ	444
ДОДАТОК Д. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОГЕРЕНТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ ПРОТОН-ЯДЕРНОМУ РОЗСІЯННІ	448
ДОДАТОК Е. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НЕКОГЕРЕНТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ ПРОТОН-ЯДЕРНОМУ РОЗСІЯННІ	470
ДОДАТОК Ж. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ	493
ДОДАТОК З. РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ У ПІОН-ЯДЕРНОМУ РОЗСІЯННІ	499
ДОДАТОК К. ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ БАГАТОРАЗОВИХ ВНУТРІШНІХ ВІДБИТТІВ В ОПИСІ ТУНЕЛЮВАННЯ	507
ДОДАТОК Л. РОЗРАХУНКИ ПАРАМЕТРІВ ПАКЕТУ У ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЇ КОСМОЛОГІЇ З ТУНЕЛЮВАННЯМ	535
ДОДАТОК М. РОЗРАХУНКИ РАДІАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛІВ У ЗАДАЧІ ТУНЕЛЮВАННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ КРІЗЬ БАР'ЄРИ АЛЬБРЕХТА	547
ДОДАТОК Н. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ У ФАХОВИХ НАУКОВИХ ВИДАННЯХ (БЕЗ ПУБЛІКАЦІЙ У ЖУРНАЛАХ ЗА МАТЕРІАЛАМИ КОНФЕРЕНЦІЙ)	560

**ДОДАТОК О. СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ, ЩО ЗАСВІДЧУЮТЬ
АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ ТА
ЯК ГЛАВИ У КНИГАХ**

ВСТУП

Практично кожна ядерна реакція супроводжується випромінюванням гальмівних фотонів. Випромінювання таких фотонів може бути виміряно у експериментах. Це дає свій незалежний підхід до вивчення ядерних процесів. Дослідження гальмівних фотонів у ядерній фізиці мають довгу історію. Експериментально таке випромінювання найбільш довго та широко вивчалось у розсіюванні протонів на ядрах [1—6] та поділі ядер [7—14]. Також існують експериментальні дослідження фотонів, що випромінюються при розсіянні альфа-частинок на ядрах [15], альфа-розпаді важких ядер [16—21], Окремої уваги приділено дослідженням випромінювання фотонів у ядерно-ядерних зіткненнях при проміжних та високих енергіях (наприклад, див. [22, 23]). Для таких реакцій отримано дані фотонів при злитті ядер [24].

У теоретичних дослідженнях охоплено більше реакцій (крім вказаних вище, слід додати розпад ядер з вильотом протона та злиття ядер). Найбільш багато досліджень, пов'язаних з гальмівним випромінюванням фотонів, було проведено в аналізі різних фізичних ефектів у зіткненнях протонів з протонами та протонів з нейтронами (ми не будемо включати такі процеси до аналізу у дисертацію). У дослідженнях гальмівного випромінювання у реакціях з ядрами, основні зусилля було спрямовано на опис існуючої експериментальної інформації на основі багатої кількості розроблених моделей. Але ще не було побудовано універсальної теорії опису гальмівного випромінювання у ядерній фізиці, тоді як практично для кожної реакції розроблявся свій окремий підхід зі своїми наближеннями та допущеннями в обраному діапазоні енергій.

У випадках, де співпадіння теорії з експериментом виявилось вдалим,

виникала наступна ідея — як для таких реакцій зробити наступний крок — здобути нову інформацію про ядерну взаємодію та механізми реакцій на основі аналізу спектрів випромінювання. Тобто головний фокус досліджень зміщено вже не на вдалість опису експериментів розрахунками, а саме на більш глибоке розуміння ядерної взаємодії, властивостей ядер та фізики реакцій. Але успіху у вирішенні такої задачі вже суттєво менше.

Слід відзначити успіх наших вітчизняних вчених Плюйка та Пояркова у дослідженнях гальмівного випромінювання у розсіянні протонів на ядрах [25]. Відома монографія Амус'я [26] про гальмівне випромінювання (також див. його огляд [27] та монографію групи [28]), головним чином, сфокусована на атомні процеси, а ядерні реакції не аналізуються достатньо глибоко (див. також дослідження Кургаліна, Чувільського, Чуракової [29, 30]). Авжеж, слід відзначити унікальні експерименти Єреміна з його колегами по вимірам гальмівних фотонів у розпадах ядер [16, 19] та поділі [14], спрямовані на розуміння динаміки та механізмів цих процесів. Так, першу експериментальну інформацію про випромінювання гальмівних фотонів у альфа-розпадах ядер було здобуто саме цією групою [16], що породило напрямок досліджень такої реакції (перші передбачення спектрів було дано у роботі [32] за 8 років до цього).

В інституті ядерної фізики у Кракові існує установка Гектор, що дозволяє експериментально виміряти кутовий розподіл випромінювання фотонів у ядерних реакціях (головним чином, це реакції з участю протонних пучків, також поділ). З її використанням було виконано серію експериментальних та теоретичних досліджень та вони продовжують інтенсивно виконуватися у вивченні гігантського дипольного резонансу, так званого Пігмі резонансу (Pygmy Dipole Resonance), форм деформацій та властивостей при великих спінах середніх та важких ядер, інших явищ [33–41].

У практичній реалізації вирішення вказаної вище проблеми існують

суттєві труднощі, як в теорії, так і в експерименті. Так, іноді автори, що зробили суттєвий внесок у рішення окремих задач гальмівного випромінювання у деяких реакціях, потім навіть змінювали свій напрямок досліджень (наприклад, див. дослідження [42]). Інші дослідники (хто намагався реально визначити взаємодію у ядерних реакціях з аналізу експериментальних спектрів) на такі труднощі вказували явно [31].

Таким чином, необхідно було мати універсальний працездатний підхід у ядерній фізиці та виникала складна задача його знайти та реалізувати. Це стало мотивацією для розробки нової універсальної теорії гальмівного випромінювання у ядерній фізиці, що пов'язала би спектри випромінювання фотонів, що випромінюється у ядерних реакціях, з параметрами взаємодій та механізмами, що існують у таких реакціях. Побудова такої теорії склала основу даної дисертації.

Квантова механіка включає лише 12 форм потенціалів, для яких існують точні аналітичні розв'язки хвильових функцій в одновимірній та сферично-симетричній задачах. А саме, це одновимірний рух частинки у прямокутній ямі, одновимірний рух частинки у полі гармонічного осцилятора (наприклад, див. [43], стор. 91–96), в однорідному полі (див. [43], стор. 100–102), кулоновому полі (див. розв'язки у сферичних та параболічних координатах, [43], стор. 150–166), полі потенціалу Морзе типу $U(x) = A(e^{2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ (див. [43], стор. 98–99, також [44], стор. 191–195), полі потенціальної ями Пешля-Теллера типу $U(x) = A \left[\frac{\xi(\xi - 1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\cos^2(\alpha x)} \right]$ (див. [44], стор. 102–106), полі модифікованої потенціальної ями Пешля-Теллера типу $U(x) = A \cosh^{-2}(\alpha x)$ (див. [44], стор. 106–112), також [43], стор. 99–100).

У радіальній задачі це ізотропний осцилятор типу $U(r) = \alpha^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}$ (див. [44], стор. 175–180), потенціал Вудса-Саксона при $l = 0$ типу $U(r) = -A \frac{1}{1 + e^{(r-r_0)/\alpha}}$ (див. [44], стор. 171–175), потенціал Хюльтена при $l = 0$ ти-

пу $U(r) = -A \frac{e^{-r/a}}{1 - e^{-r/a}}$ (див. [44], стор. 184–187), потенціал Кратцера типу $U(r) = -2A \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{2r^2} \right)$ (див. [44], стор. 187–191). У наведених вище прикладах обрано $A = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$, l — значення орбітального моменту. Можна додати потенціальний бар'єр і вигляді дельта-функції, що використовується іноді у розрахунках у задачах розсіяння.

Тому задачі ядерної фізики не можливо розв'язувати без розвитку методів наближень, де фокус направлено на якомога більш точний опис квантових властивостей систем відповідно до реалістичних потенціалів взаємодій. Такі методи можна розділити на дві групи: методи початку рішення (наприклад, методи Тейлора, Пікара, Ейлера, формули Рунге-Кутта, Хойна, див. [45], стор. 179–205), та методи продовження рішення (наприклад, методи Нумерова, Ковела, див. [45], стор. 206–229). Якщо методи початку рішення сфокусовані на визначенні хвильової функції у достатньо малій області значень координати на основі заданих її значень у обраній точці, то методи продовження рішення сфокусовані на визначенні хвильової функції у суттєво більшій області змінної координати на основі заданих значень цієї хвильової функції у малій області. Але загальною проблемою є неминуче зростання похибок визначення хвильової функції при суттєвому розширенні області змінної координати.

У задачах розсіяння приходиться проводити розрахунки у достатньо широкому діапазоні відстаней. Ця властивість виявляється більш сильно у розрахунках спектрів гальмівних фотонів, що випромінюються у ядерних процесах [з метою досягти збіжності розрахунків спектрів треба враховувати значно більш далекі асимптотичні відстані (за межами атомних оболонок від ядра) ніж у розрахунках перерізів розсіяння, періодів розпаду у задачах розпадів ядер і т.д. (де зовнішня межа розрахунків знаходиться від 15 до 100 фермі у залежності від обраної точності та енергії)]. У таких ситуаціях, похибки

методів вказаних вище зростають при врахуванні більш далеких областей, та стає незрозумілим як здолати таку проблему. Цікавою особливістю спектрів випромінювання є їх чутливість до параметрів потенціалів взаємодії. Але така чутливість практично починає проявлятися при достатньо великих енергіях фотонів, де потрібно враховувати найбільш далекі асимптотичні відстані від ядра. Можна згадати методи визначення кулонівських функцій, що побудовані на теорії асимптотичних рядів (для деяких значень змінних координати, енергії), що збігаються лише до деякої межі, але вони використовуються у розрахунках на практиці. Подібна ситуація існує у задачах розсіювання для глибоких підбар'єрних енергіях. Як наслідок, оцінки злиття у зіткненнях ядер можуть відрізнятися на порядки.

У такій ситуації привабливими виглядають методи суперсиметричної квантової механіки [46, 47]. Такі методи вже розширюють кількість потенціалів (до безмежності), для яких існують точні аналітичні розв'язки хвильових функцій. Але нажаль ідея отримання таких точно-розв'язувальних потенціалів полягає у генерації нових потенціалів тільки на основі вже відомого якогось початкового потенціалу, для якого ми маємо точні розв'язки хвильової функції. Форми таких нових потенціалів не відповідають реалістичним потенціалам у задачах розсіювання, розпадів, захоплення та інших у ядерній фізиці. Тут не зрозуміло, як їх можна взагалі застосувати до задач розсіювання з реалістичними потенціалами взаємодії, з метою підсилити точність визначення хвильових функцій.

Дещо допомагають методи оберненої задачі у квантовій теорії розсіювання [48]. А саме, вони дозволяють глибше зрозуміти взаємозв'язок між формою потенціалу та хвильовими функціями і рівнями енергії. Вони дозволяють виявити, як саме змінюються хвильові функції та зміщуються рівні енергії при деформаціях потенціалів для зв'язаних станів [49, 50, 51, 52]. У задачах розсіювання вони спрямовані на визначенні форми потенціалів на основі відомих

значень резонансних рівнів енергій та відповідних ширин, для зв'язаних станів вони дають форму потенціалу на основі відомого спектру енергії [53]. Але, вони не дають можливості суттєво підвищити точність визначення хвильових функцій для вже заданих потенціалів взаємодії у розсіянні, тому що вони будуються на основі методів різних видів наближень, описаних вище.

У дисертаційній роботі було знайдено іншу ідею — не йти шляхом пошуку удосконалень наближених методів до визначення хвильової функції на основі заданого потенціалу. Замість цього було запропоновано інший підхід — апроксимувати реалістичний потенціал через скінчене число потенціалів іншої форми, що мають точні аналітичні розв'язки хвильової функції. Такий підхід дає точний розв'язок хвильової функції на всій області пошуку для такої апроксимації будь-якої точності для заданого потенціалу. Після отримання перших оцінок у найпростіших прикладах [54], виявилось, що такий підхід дозволяє суттєво підвищити точність визначення хвильової функції на достатньо великому діапазоні значень по радіальній координаті. Виявилось, що такий підхід дозволяє вперше використовувати тести квантової механіки для перевірки отриманих перерізів на основі проникностей бар'єрів, тоді як у відомих інших квантових підходах такі тести відсутні. Звідси виникало запитання, чому саме склалася така ситуація, що раніше ще ніколи методи не доводилися до повного їх тестування на основі квантової механіки? Так, інші підходи широко застосовуються давно та зараз загально прийняті у ядерній фізиці. Саме тільки на таких підходах отримано результати, що включено у сучасні бази даних у ядерній фізиці [55].

Вже перші оцінки вказали на існування переваги такого методу над існуючими методами в оцінках проникностей бар'єрів, що використовуються у визначенні перерізів в задачах захоплення та періодів напіврозпаду у задачах розпадів ядер у ядерній фізиці. Звідси виникла потреба розвинути такий підхід до реалістичних потенціалів, що використовуються у задачах ядерної

фізики. Але перші спроби привели до появи труднощів та питань суттєво іншого характеру, які не можуть виникати у застосуванні квазікласичних підходів у перших наближеннях (де практично всюди застосовується лише перше наближення, ВКБ).

Це стало предметом досліджень та створення нового квантово-механічного методу, що складає другу половину цієї дисертації. Авжеж, виникла потреба адаптувати такий метод до застосування до аналізу різних ядерних процесів. Відзначимо, що зараз для деяких процесів застосування такого методу змінює результати, отримані за допомогою інших відомих методів, на декілька порядків (тобто, дуже сильно). Одним з прикладів такої ситуації є оцінки злиття при захопленні альфа-частинок ядрами. У результаті розробки такого методу, для тестування проникності області потенціалу введено узагальнення загально прийнятого тесту у квантовій механіці (наприклад, див. формулу $R = 1 - D$, також (25.4) стор. 106 у [43]) на такий

$$T + R + M = 1, \quad (1)$$

де T — коефіцієнт проникності області потенціалу, R — коефіцієнт відбиття від області потенціалу, M — новий коефіцієнт зміщування (інтерференції) між падаючою хвилею на бар'єр та відбитою хвилею від нього. Виявляється, що саме така формула є більш повною, та вона більш практична до застосування у таких задачах як, наприклад, захоплення ядрами.¹

Зараз проведено багато досліджень у квантовій космології, в таких задачах еволюції Всесвіту на першій стадії, де використовується ідея тунелювання та для його оцінок головним чином використовується квазікласичне наближення (практично, ВКБ-наближення). Виявилось цікавим застосувати метод, що описано вище, до таких задач. Робота з потенціалами у таких

¹Так, тест $R = 1 - D$ на стор. 106 у [43] є правильним, оскільки для обраного прикладу $M = 0$. Але він не може бути застосованим коректно до багатьох задач ядерної фізики, де необхідно визначати потоки в області ядра (це є задачі розпадів ядер, захоплення ядерних фрагментів ядрами).

задачах виявилася корисною, тому що вони суттєво відрізняються від потенціалів у задачах розсіяння у ядерній фізиці, що дозволило більш глибоко відтестувати та зрозуміти метод. З'ясувалось, що застосування формули (1) є єдиним шляхом для коректної перевірки визначених проникностей у цих задачах. Як додаткове дослідження, виникла ідея узагальнити такий метод для рішення задач квантової механіки з дисипативною компонентою у потенціалі взаємодії, що сформулюється на основі хвильових пакетів, Такий підхід було розроблено та застосовується до потенціалів простої форми, але формалізм сформульовано як загальний, з метою також до рішення інших задач з інших формами дисипативних членів у такому визначенні. Ці дослідження додано до матеріалу дисертації.

Актуальність дисертаційної роботи полягає у необхідності розробки самоузгодженої, перевіреної експериментально теорії гальмівного випромінювання фотонів у ядерній фізиці та методів квантової механіки надвисокої точності для визначення перерізів реакцій та періодів розпадів ядер.

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у побудові універсального формалізму надвисокої точності для вивчення сильних квантових ефектів, властивостей ядерної взаємодії та механізмів ядерних реакцій на основі аналізу випромінювання гальмівних фотонів, у тому числі з врахуванням дисипативних ефектів. Для досягнення такої мети необхідно було вирішити наступні завдання:

- Розробити самоузгоджену теорію для аналізу гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує розпади ядер, розсіяння протонів на ядрах (від білянульових до проміжних енергій), поділ ядер, розсіяння π -мезонів на ядрах. Така теорія повинна бути перевірена на основі існуючої експериментальної інформації у ядерній фізиці. Застосувати таку теорію до вказаних вище реакцій з метою здобуття нової інформації про них.

- Розробити квантово-механічний метод надвисокої точності для визначення проникностей бар'єрів, що використовуються при визначенні періодів та періодів розпаду у задачах ядерної фізики. Виявити та оцінити переваги такого методу у порівнянні з іншими існуючими методами.
- Розробити квантово-механічний метод опису тунелювання у полі одномірного потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається на основі хвильових пакетів. На його основі визначити особливості тунелювання під впливом дисипації, визначеної таким чином.

Об'єкт дослідження — квантові ефекти та механізми ядерних процесів.

Предмет дослідження — властивості випромінювання гальмівних фотонів у розсіянні протонів, π -мезонів та ядер на ядрах, розпадах ядер, поділі ядер.

Методи дослідження. У роботі були використані та розвивалися методи нерелятивістської та релятивістської квантової механіки та квантової електродинаміки для теорій розсіяння, розпадів, зіткнень, захоплень, поділу ядер. Було проведено аналітичні та чисельні розрахунки на комп'ютері.

Структура дисертації наступна. Дисертаційна робота містить вступ, тринадцять розділів, висновки, додатки і список використаних джерел, що включає 471 найменування. Кожен розділ починається з короткого вступу і завершується найбільш вагомими результатами, що в ньому здобуті. Обсяг дисертації — 566 стор. (основна частина — 283 стор.), включаючи 78 рисунків та 17 таблиць.

Наукова новизна здобутих результатів відображена в поданих нижче пунктах. В дисертаційній роботі було вперше наступне.

- Знайдено та реалізовано ідею, як оцінити деформацію ядер під час їх

альфа-розпаду з аналізу експериментальних спектрів випромінювання фотонів, що супроводжує такий розпад. Створено першу модель для таких досліджень.

- Знайдено ідею, як досліджувати динаміку вильоту альфа-частинки з ядра при альфа-розпаді на основі аналізу гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує цей розпад, за допомогою нестационарної теорії збурень квантової механіки.
- За допомогою створеної моделі випромінювання фотонів при спонтанному поділі ядер оцінено випромінювання фотонів, що виникає від вильоту окремих уламків.
- Розроблено перший теоретичний підхід до опису випромінювання фотонів при потрійному поділі ядер, знайдено та реалізовано ідею оцінки динаміки та геометрії такого поділу з аналізу спектрів випромінювання.
- За допомогою створеної моделі випромінювання фотонів при розсіянні протонів на ядрах у єдиному підході описано когерентне та некогерентне випромінювання фотонів у таких реакціях, досліджено та оцінено роль магнітного (когерентного та некогерентного) випромінювання.
- За допомогою створеної моделі випромінювання фотонів у протон-ядерних реакціях проведено перші дослідження та отримано перші оцінки випромінювання при захопленні протонів ядрами (p -реакція) у зірках.
- Виявлено залежність спектрів випромінювання фотонів (у області високих енергій фотонів) при розсіянні протонів на ядрах від параметрів потенціалу взаємодії.
- Запропоновано досліджувати випромінювання фотонів у розсіянні π -мезонів (у пучках) на ядрах, побудовано першу модель, знайдено сильну

залежність спектрів випромінювання від піон-ядерної взаємодії, запропоновано та реалізовано ідею досліджувати піон-ядерну взаємодію на основі аналізу спектрів випромінювання.

- Дано фізичне і математичне обґрунтування ідеї багаторазових внутрішніх відбиттів як для тунелювання частинки через бар'єр складної (непрямокутної) форми, так і для надбар'єрного її руху.
- На базі вказаної вище ідеї, розроблено формалізм методу багаторазових внутрішніх відбиттів з визначенням амплітуд хвильової функції, коефіцієнтів проникності і відбиття, введено тести квантової механіки для перевірок таких характеристик.
- Введено метод багаторазових внутрішніх відбиттів до задач квантової космології, де аналізується тунелювання; введено тести квантової механіки для перевірок отриманих таких характеристик у таких задачах.
- Введено ідею вирішення задач квантової механіки з дисипативною компонентою Альбрехта, побудовано метод на основі такої ідеї, що визначає хвильову функцію, коефіцієнти проникності і відбиття, оцінює вплив дисипативної компоненти на тунелювання, використовує тести квантової механіки.

Практичне значення здобутих результатів. Розроблена теорія гальмівного випромінювання може бути використана в аналізі експериментальної інформації випромінювання гальмівних фотонів у ядерних реакціях з метою більш глибокого розуміння механізмів таких ядерних реакцій, властивостей ядерної взаємодії у цих реакціях.

Розроблений метод багаторазових внутрішніх відбиттів може бути використаний для підвищення точності визначення перерізів у задачах теорії ядерних реакцій, періодів напіврозпадів у задачах розпадів, перерізів захо-

плення (та механізмів злиття) у задачах захоплення, та більш глибокого вивчення таких ядерних процесів. Після застосування такого методу, існуючі теоретичні значення перерізів реакцій, періодів напіврозпадів, деформацій ядер та інших характеристик ядер у базах ядерно-фізичних даних будуть скорректировані. Як оцінюється, в деяких випадках такі зміни виявляться суттєвими [наприклад, в оцінках (та зрозумінні, що опирається на такі оцінки та тести) злиття, перерізів захоплення та розсіяння при глибоко підбар'єрних енергіях].

Розроблений метод розрахунку хвильової функції у задачах тунелювання з дисипативними компонентами (на прикладі опису тунелювання крізь бар'єри Альбрехта) відкриває новий шлях для вивчення дисипації у задачах квантової механіки. Такий метод може бути застосований для подальшої побудови методів розв'язання ще не вирішених задач тунелювання з дисипацією у інших формулюваннях на такій основі [а саме, нелінійних (неермітових) гамільтоніанів з операторами Костіна та Хассе, лінійних (ермітових) гамільтоніанів з операторами Гізіна, Екснера, Поліхронакоса та Тзані].

Особистий внесок здобувача. Автор дисертації самостійно виконував пошук та обирав задачі для досліджень, розробляв методи їх розв'язання, виконував всі аналітичні та чисельні розрахунки представлених у дисертації результатів, підготовлював рукописи статей до опублікування, брав лідируючу участь в аналізі здобутих результатів, редакціях статей на всіх етапах взаємодії з журналами.

У спільних публікаціях автору належать формалізм теорії гальмівного випромінювання, представленої в дисертації, ідея та реалізація методу багаторазових внутрішніх відбиттів для тунелювання та надбар'єрного проходження для складних бар'єрів, введення коефіцієнту змішування та узагальнення тесту квантової механіки відносно проникності та відбиття, ідея та реалізація об'єднаного опису осциляцій та проникності відносно бар'єрів (в задачах

захоплення та розпадів; таку проблему було названо як “загадка Гамова”, яку вирішено), уведення методу багаторазових внутрішніх відбиттів (та тестів квантової механіки) у задачі космології для визначення характеристик тунелювання, ідея та реалізація методу визначення хвильової функції у полі одномірного потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається на основі хвильових пакетів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Роботи, результати яких викладено у дисертації, виконано у лабораторії часового аналізу ядерних процесів та потім відділу теорії ядерних процесів Інституту ядерних досліджень НАН України відповідно до планів робіт по основним відомчим темам вказаних вище лабораторії та відділу: “Еволюція, кінетика та динаміка ядерних процесів” (2002–2006, № д. р. 0101U000412), “Кінетика та часовий аналіз ядерних процесів” (2007–2011, № д. р. 0109U005137), “Методи часового аналізу у вивченні ядерних реакцій та розпадів” (2012–2016, № д. р. 0112U007378), “Дослідження динаміки та часових характеристик процесів взаємодії ядер та елементарних частинок в широкому діапазоні енергій” (2017–2021, № д. р. 0116U006401), та додаткової теми “Дослідження ядерної взаємодії у різноманітних ядерних процесах за допомогою дифракційної теорії та теорії гальмівного випромінювання” (2017–2021, № д. р. 0116U008487).

Апробація результатів дисертації і публікації. Результати досліджень, викладені у дисертації, були представлені та доповідалися на наукових семінарах лабораторії часового аналізу ядерних процесів та потім відділу теорії ядерних процесів Інституту ядерних досліджень НАН України (Київ, 2003–2019), об’єднаних наукових семінарах Інституту ядерних досліджень НАН України, наукових семінарах Інституту сучасної фізики (Ланчжоу, Китай, 2013–2019, кожного року по двічі), науковому семінарі Інституту Теоретичної Фізики КІТРС (Kavli Institute for Theoretical Physics China,

Академія Наук Китаю, Пекін, Китай, 2016), науковому семінарі Університету Пекіна (Peking University, Пекін, Китай, 2016), науковому семінарі Університету Ланчжоу (Lanzhou University, Пекін, Китай, 2016), розширеному семінарі Університету Пекіна UCAS (Beijing University CAS, Академія Наук Китаю, Пекін, Китай, 2019), науковому семінарі Університету Цингхуа (Tsinghua University, Пекін, Китай, 2019).

Представлення на конференціях та школах:

- Міжнародна конференція “*Problems of theoretical and mathematical physics*” (“*Bogolyubov Kyiv Conference*”, до 110-річчя від дня народження М. М. Боголюбова, ІТФ, Київ, 2019).
- Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАНУ (Київ, 1996 – 2004, 2006–2019).
- Міжнародна конференція “*Frontier of Theoretical Physics in Western China*” (Lanzhou University, Ланчжоу, Китай, 5–7 червня 2016).
- The Second International Symposium of Physics of Photons, ISPP-15 (Institute of Modern Physics of Chinese Academy of Sciences, Ланчжоу, Китай, липень 2015).
- International Advisory Committee Meeting of Cyclotron Center Bronowice IFJ PAN (proposals for experiments on PROTEUS C-235 proton cyclotron at ССВ IFJ PAN, Краків, Польща, 29 серпня 2014).
- The Workshop on Hadron Physics (Institute of Modern Physics of Chinese Academy of Sciences, Ланчжоу, Китай, 11–13 грудня 2014).
- The Sixth Workshop on Hadron Physics (Institute of Modern Physics of Chinese Academy of Sciences, Ланчжоу, Китай, 21–24 липня 2014).

- The First International Symposium of Physics of Photons, ISPP-13 (Institute of Modern Physics of Chinese Academy of Sciences, Ланчжоу, Китай, вересень 2013).
- The International Conference on Nuclear Reactions (Chinese Academy of Sciences, Шень-Жень (Shen-Zhen), Китай, травень 2013).
- Четверта міжнародна конференція “*Current problems in nuclear physics and atomic energy*” *НРАЕ-2012* (Інститут ядерних досліджень НАНУ, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Національна атомна енергогенеруюча компанія “Енергоатом”, Київ, Україна, 2012).
- Міжнародний симпозиум “*Quasifission processes in heavy ion reactions*” (Мессіна, Італія, 8–9 листопада, 2010).
- Третя міжнародна конференція “*Current problems in nuclear physics and atomic energy*” *НРАЕ-2010* (Інститут ядерних досліджень НАНУ, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Національна атомна енергогенеруюча компанія “Енергоатом”, Київ, Україна, 2010).
- VIII конференція по фізиці високих енергій, ядерній фізиці та прискорювачам (Національний центр “Харківський фізико-технічний інститут”, Харків, Україна, 22–26 лютого, 2010).
- Міжнародний колоквіум “*Humboldt Cosmos: Science and Society*” (Київ, Україна, 19–22 листопада, 2009).
- Міжнародна конференція “*Nuclear reactions on nucleons and nuclei*” (Мессіна, Італія, 5–9 жовтня 2009), <http://nucleo.unime.it/conf2009/> .
- 8-а міжнародна конференція “*Symmetry in nonlinear mathematical physics*” (Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, 21–27 червня, 2009).

- VII конференція по фізиці високих енергій, ядерній фізиці та прискорювачам (Національний центр “Харківський фізико-технічний інститут”, Харків, Україна, 23–27 лютого, 2009).
- Друга міжнародна конференція “*Current problems in nuclear physics and atomic energy*” *NPAE-2008* (Інститут ядерних досліджень НАНУ, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Національна атомна енергогенеруюча компанія “Енергоатом”, Київ, Україна, 2008).
- 7-а міжнародна конференція “*Symmetry in nonlinear mathematical physics*” (Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, 24–30 червня 2007).
- The International School on particle physics, gravity and cosmology (Central European Joint Programme of Doctoral Studies, University of Dubrovnik, Дубровнік, Хорватія, 21 серпня — 2 вересня 2006, отримано грант ІСТР); <http://sergcs.phy.hr/dubrovnik06>
- Перша міжнародна конференція “*Current problems in nuclear physics and atomic energy*” *NPAE-2006* (Інститут ядерних досліджень НАНУ, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Національна атомна енергогенеруюча компанія “Енергоатом”, Київ, Україна, 29 травня – 3 червня 2006).
- 4-й міжнародний симпозіум “*Quantum Theory and Symmetries*” (*QTS-4*) та 6-а міжнародна школа “*Lie Theory and Its Applications in Physics*” (*LT-6*) (VFU, Варна, Болгарія, 15–21 серпня 2005, отримано грант EWTF); <http://theo.inrne.bas.bg/dobrev/qts-4.htm>
- 6-а міжнародна конференція “*Symmetry in nonlinear mathematical physics*” (Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, 20–26 червня 2005); <http://www.imath.kiev.ua/appmath/conf.html>

- XXXII зимня школа по фізиці, ІТЕР (Звенігород, Росія, 22 лютого — 2 березня 2005), <http://www.iter.ru/ws/2005>
- LIV міжнародна нарада по ядерній спектроскопії та структурі атомного ядра “*Nucleus-54*” (Белгород, Росія, 22—25 червня 2004).
- II конференція по фізиці високих енергій, ядерній фізиці та прискорювачам (Національний центр “*Харківський фізико-технічний інститут*”, Харків, Україна, 1–5 березня 2004).

Автор був спів-ініціатором конференції “*The International Symposium of Physics of Photons, ISPP*” по основній темі дисертації (co-chair, Institute of Modern Physics of Chinese Academy of Sciences, Ланчжоу, Китай, вересень 2013, липень 2015).

Основні наукові результати дисертації опубліковано (після захисту кандидатської дисертації) в сорока роботах.

- Список праць за темою дисертації включає 28 робіт у реферованих журналах, та його подано після анотацій українською та англійською мовами (див. стор. 6), а також у Додатку **Н** (див. стор. 560). У списку використаних джерел ці праці подано за посиланнями [56–83].
- Список наукових публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації, включає 12 робіт, та його подано після анотацій українською та англійською мовами (див. стор. 9), а також у Додатку **О** (див. стор. 564). У списку використаних джерел ці праці подано за посиланнями [84–95] (тут сім робіт [84–90] — за матеріалами конференцій у реферованих вітчизняних та (рецензованих) закордонних журналах, чотири глави [91–94], а також одна книга (без спів-авторів) [95]).

РОЗДІЛ 1

ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ СФЕРИЧНИХ ЯДЕР

1.1. Вступ

За останні 30 років багато експериментальних [16, 17, 18, 19, 20, 21, 59, 58] і теоретичних зусиль було прикладено до вивчення природи гальмівного випромінювання, яке супроводжує α -розпад ядер. Ключова ідея цих досліджень полягає у пошуку методу по здобуттю нової інформації про динаміку α -розпаду й динаміку тунелювання з експериментальних спектрів випромінювання. Тривалості тунелювання в ядерних процесах мають надзвичайно малі значення, що наближаються до ядерних часів. Цей факт призводить до практичної неможливості перевірити експериментально нестационарні підходи до опису тунелювання в ядерних задачах і побудувати на їх основі динамічні ядерні моделі. Однак, дослідники знаходять нові шляхи, як здобути нову інформацію про динаміку ядерних процесів. Саме цим пояснюється зростаючий інтерес до вивчення гальмівного випромінювання фотонів, яке супроводжує α -розпад: через аналіз вимірюваних спектрів випромінювання знайти тривалість тунелювання α -частинки через бар'єр розпаду й кількісно описати динаміку α -розпаду.

Вже побудовано достатньо багато моделей гальмівного випромінювання при α -розпаді. Найбільш інтенсивно розвивалися підходи з *квазікласичним описом α -розпаду* [98, 99, 100]. Квазікласичний підхід у порівнянні з повністю квантовим дозволяє працювати з рядом характеристик і параметрів, фізичний зміст яких більш прозорий, що дозволяє швидше розібратися

в досліджуваних питаннях. Тут, особливо хотілося б відзначити успіх в описі нових експериментальних даних для ядра ^{210}Po [21, 101]. Існують перспективи у дослідженні динаміки α -розпаду на основі аналізу спектрів випромінювання [102, 103, 104], у вивченні динаміки тунелювання при α -розпаді безпосередньо [105, 106, 107, 108]. Викликає інтерес ефект [109], що було названо *ефектом Мюнхаузена*, що полягає у зростанні проникності бар'єра під наслідок випромінювання зарядженої частинки під час її тунелювання. Важливим виявляється екранування тунелювання атомними оболонками у такому розпаді, що змінює динаміку (та оцінки періодів напіврозпадів) [137, 111].

Однак, *прямий квантовий підхід* (тобто підхід без застосування квазікласичного наближення, коли хвильові функції визначаються шляхом чисельного рішення рівняння Шредінгера з обраним потенціалом) є найбільш точним, багатим при вивченні властивостей і ефектів [32]. У цьому напрямку переважно розвивалася модель, уперше запропонована Папенброком і Бертчем у роботі [42], де хвильова функція фотонів розглядалася у дипольному наближенні. Як виявилось, дипольне наближення істотно підвищує збіжність обчислень матричного елемента випромінювання без помітної втрати точності (при нормуванні розрахункового спектра на експеримент), що робить задачу доступною у квантовому підході для багатьох дослідників. Нами розроблялася кутова квантова модель, де при описі хвильової функції фотонів було враховано подальші корекції й було використано реалістичний потенціал взаємодії між α -частинкою і ядром, відповідно до [112]. У рамках такої моделі було реалізовано два підходи, засновані на різних розкладаннях хвильової функції фотонів: мультипольному [56] і розкладанні по сферичних хвилях [57].

У другому підході вже досягнуто гарної згоди в описі нових експериментальних даних для ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra [59, 58, 60, 85]. Мультипольний підхід розроблено значно менше, який у той-же час є більш коректним та

точним при просторовому описі випромінювання. Тому з'являється інтерес у доведенні цього підходу до належного рівня. Як виявилось, така модель дозволяє розраховувати абсолютні значення ймовірностей випромінювання без нормування на експериментальні дані. Це відкриває можливість вивчати випромінювання в розпадах будь-якого ядра, пророкуючи нові спектри. Однак, не ясно, наскільки сильно залежить випромінювання від енергії, з якою вилітає α -частинка, та й чи існують інші характеристики, вплив яких на випромінювання також є суттєвим. Цим питанням присвячено цей розділ.

1.2. Заряджена частинка в електромагнітному полі ядра

Частинку з масою m , що рухається у полі ядра з потенціалом $U(\mathbf{r})$, можна описати за допомогою гамільтоніана

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Якщо частинка є електрично зарядженою, то крім поля $U(\mathbf{r})$ вона зазнає дії електромагнітного поля з векторним потенціалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, що формується цим ядром. У цьому випадку гамільтоніан частинки у сумарному полі ядра може бути визначений з *рівняння Паулі* (див. [113], стор. 264–271; також [114], стор. 187)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - Z_{\text{eff}} \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + e A_0 - Z_{\text{eff}} \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) = \\ &= \hat{H}_0 + \hat{W}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де

$$\hat{W} = -Z_{\text{eff}} \frac{e}{2mc} \left(\hat{\mathbf{p}} \mathbf{A} + \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} \right) + e A_0 - Z_{\text{eff}} \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{rot} \mathbf{A} + Z_{\text{eff}}^2 \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2. \quad (1.3)$$

Тут \hat{W} — оператор взаємодії, Z_{eff} — ефективний заряд системи (частинка та дочірнє ядро), $\boldsymbol{\mu}$ — магнітний момент частинки. Далі у цьому розділі ми бу-

демо зневажати впливом магнітного поля, тобто приймемо $\mu = 0$. Також ми не будемо брати до розгляду компоненти A_0 , уважаючи її меншою у порівнянні з іншими. Враховуючи *кулонівське калібрування* ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$), а також зневажаючи складовими, що пропорційні до \mathbf{A}^2/c^2 , отримаємо

$$\hat{W} = -Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \mathbf{A} \hat{p}. \quad (1.4)$$

1.3. Теорія збурень квазістаціонарних станів

Ми будемо розглядати ядро, що розпадається, як *складену систему*: α -частинка та дочірнє ядро. Нехай $\Psi_k^{(0)}(t)$ — нестаціонарна хвильова функція цієї системи у квазістаціонарному стані при розпаді за рівнем E_k , $\hat{H}_0(t)$ — гамільтоніан цієї системи. Тоді запишемо

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_k^{(0)}(t)}{\partial t} = \hat{H}_0(t) \Psi_k^{(0)}(t). \quad (1.5)$$

Загальне рішення рівняння Шредінгера може бути представлене у інтегральному вигляді

$$\Psi^{(0)}(t) = \int_{k_{\min}} a_k \Psi_k^{(0)}(t) dk, \quad (1.6)$$

де a_k — ваговий коефіцієнт, що не залежить від часу та визначає відносну вагу розпаду системи за рівнем E_k .

α -Частинка під час руху в електромагнітному полі дочірнього ядра випромінює гальмівні фотони. Будемо вважати, що такий процес можливий і при її тунелюванні (наявність або відсутність такого випромінювання визначить ймовірність випромінювання при тунелюванні). Процес випромінювання змінює повну енергію системи, та ми будемо розглядати його як збурення системи. Далі будемо вивчати спонтанне випромінювання фотонів, тобто коли частинка зазнає впливу поля лише до першого випромінювання гальмівного фотона. Тому ми маємо справу зі збуренням, що діє на систему протягом деякого інтервалу часу. Моменти часу початку й кінця дії збурення на

систему визначаються таким початком і таким кінцем часового інтервалу, у межах якого ми вважаємо можливим гальмівне випромінювання α -частинкою. Запишемо збурений гамільтоніан у вигляді:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + \hat{W}(t), \quad (1.7)$$

де $\hat{W}(t)$ — оператор збурення, що залежить від часу.

Задача полягає у наближеному обчисленні нових хвильових функцій $\Psi(t)$ на основі хвильових функцій квазістаціонарних станів $\Psi_k^{(0)}(t)$ незбуреної системи. Невідомі хвильові функції будемо шукати для часового рівняння Шредінгера зі збуреним гамільтоніаном

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = (\hat{H}_0(t) + \hat{W}(t)) \Psi(t) \quad (1.8)$$

у вигляді

$$\Psi(t) = \int_{k_{\min}} a_k(t) \Psi_k^{(0)}(t) dk, \quad (1.9)$$

де коефіцієнти розкладання $a_k(t)$ є функціями часу (див. [43] п. 40, стор. 177). Розвиваючи формалізм теорії квазістаціонарних станів (див. Додаток Б.1, стор. 391), отримаємо розв'язок для першої корекції до амплітуди у вигляді:

$$a_{ki}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int W_{ki}(t) dt, \quad (1.10)$$

де

$$W_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0)*} \hat{W}(t) \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \quad (1.11)$$

— матричні елементи збурення, що включають часовий множник, $\Psi_m^{(0)}$ — незбурена хвильова функція квазістаціонарного m -стану. До коефіцієнтів $a_k^{(1)}$ додано другого індексу, щоб вказати, до якої з незбурених функцій обчислюється корекція (маємо $a_k^{(0)} = 0$ при $k \neq i$).

1.4. Матричний елемент переходу

Будемо вважати, що у початковому і у кінцевому станах система характеризується числом випромінених фотонів. Для строгого опису перейдемо від розгляду системи без випромінювання, яке враховується як збурення зовнішнім полем, до розгляду системи з існуючим у ній випромінюванням, коли як початковий, так і кінцевий її стани визначаються хвильовою функцією, що вже залежить від чисел заповнення фотонів. Як і раніше, визначимо матричний елемент переходу $i \rightarrow f$ такої системи як першу корекцію (1.10) (одержуємо подібно до п. 41–42 у [43]). Для цього, у якості нестационарних хвильових функцій початкового й кінцевого станів використаємо хвильові пакети

$$\Psi_{i,f}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} g(k - k_{i,f}) \psi_{i,f}(k, \mathbf{r}) e^{-i\omega(k)t} dk, \quad (1.12)$$

для яких виконуються властивості

$$e^{-i\hat{H}_0 t} \psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_i t}, \quad \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{i\hat{H}_0 t} = \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_f t}. \quad (1.13)$$

Виберемо векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ електромагнітного поля дочірнього ядра з врахуванням кулонівського калібрування у вигляді (див. стор. 22, 28 у [115]):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha} \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \alpha} + \hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha}^+ \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \alpha}^* \right), \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \alpha} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.14)$$

де $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона, \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона й $w = k = |\mathbf{k}|$ (де $\hbar w = E$). Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} у кулонівському калібруванні. Ми маємо дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ і $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k} ($\alpha = 1, 2$). Врахуємо, що фотони відповідають статистиці Бозе. Ми будемо вивчати спонтанне випромінювання, тобто випромінювання лише першого фотона з імпульсом \mathbf{k} , до випромінювання якого фотонів цього сорту не було. В наслідок розрахунків, отримаємо такий розв'язок [див. (Б.14)]

та (Б.15) на стор. 394 та (Б.21) на стор. 396 у Додатку Б.2]:

$$a_{fi}(t) = \int_0^{+\infty} dk_2 \int_0^{+\infty} dk_1 \cdot g^*(k_2 - k_f) g(k_1 - k_i) \cdot \langle k_2, 1 | \tilde{W}(\mathbf{r}, t) | k_1, 0 \rangle, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \langle k_2, 1 | \tilde{W}(t) | k_1, 0 \rangle = \\ & = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot \int_{t_0}^t e^{i(w_2 - w_1 + w)t'} dt', \end{aligned} \quad (1.16)$$

де $\Psi_i(\mathbf{r}, t) = |k_i\rangle$ і $\Psi_f(\mathbf{r}, t) = |k_f\rangle$ — нестационарні хвильові функції системи у початковому i -стані й у кінцевому f -стані, які не враховують випромінювання фотонів.

У стаціонарному наближенні (при $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$) отримуємо [див. (Б.26) та (Б.27) на стор. 398 Додаток Б.4]:

$$\langle k_2, 1 | \tilde{W} | k_1, 0 \rangle = F_{21} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w), \quad (1.17)$$

де

$$\begin{aligned} F_{fi} &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} p(k_i, k_f), \\ p(k_i, k_f) &= \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \mathbf{p}(k_i, k_f), \quad \mathbf{p}(k_i, k_f) = \left\langle k_2 \left| e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Знайдемо амплітуду (1.15) [див. (Б.31) на стор. 398 та (Б.33) на стор. 399]

$$a_{fi} = F_{fi} \cdot 2\pi \delta(w_f - w_i + w) \quad (1.19)$$

та її квадрат

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w). \quad (1.20)$$

Тут множник часового інтервалу T зникає при переході виразу (1.20) до ймовірності в одиницю часу. Далі нас будуть цікавити *ймовірності переходів*, що визначаються на основі квадрата матричного елемента a_{fi} .

1.5. Лінійна й кругова поляризації фотона

Виразимо вектори *лінійної* поляризації $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ через *вектори кругової поляризації* $\boldsymbol{\xi}_\mu$ із протилежними напрямками обертання (див. [116], (2.39), стор. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{e}^{(3)} = 0. \quad (1.21)$$

Для векторів $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$ отримаємо

$$\boldsymbol{\xi}_{+1} - \boldsymbol{\xi}_{-1} = -\sqrt{2} \mathbf{e}^{(1)}, \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} + \boldsymbol{\xi}_{-1} = -i\sqrt{2} \mathbf{e}^{(2)}$$

та

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{+1} - \boldsymbol{\xi}_{-1}), & \mathbf{e}^{(1),*} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{+1}^* - \boldsymbol{\xi}_{-1}^*), \\ \mathbf{e}^{(2)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{+1} + \boldsymbol{\xi}_{-1}), & \mathbf{e}^{(2),*} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{+1}^* + \boldsymbol{\xi}_{-1}^*) \end{aligned} \quad (1.22)$$

і знайдемо

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} &= \frac{-1}{n} \sqrt{2} (\boldsymbol{\xi}_{+1}^* - \boldsymbol{\xi}_{-1}^*) - \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{+1}^* + \boldsymbol{\xi}_{-1}^*) = \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\xi}_{-1}^* - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\xi}_{+1}^* = h_{-1} \boldsymbol{\xi}_{-1}^* + h_{+1} \boldsymbol{\xi}_{+1}^*, \end{aligned} \quad (1.23)$$

де

$$h_{-1} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad h_{+1} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}. \quad (1.24)$$

Для чисел $h_{\pm 1}$ маємо властивість:

$$h_{-1} + h_{+1} = -i\sqrt{2}. \quad (1.25)$$

Тоді формулу (1.18) для $p(k_i, k_f)$ перепишемо у вигляді:

$$p(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

Тут $\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ і $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ — стаціонарні хвильові функції розпадаючої системи в початковому i -стані й кінцевому f -стані. $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ і $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ — одиничні вектори кругової поляризації випроміненого фотона, які перпендикулярні до вектору \mathbf{k} у кулонівському калібруванні. Для подальшого знаходження матричного елемента $p(k_i, k_f)$ використовують різні розкладання експоненти

$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, що пов'язана з векторним потенціалом \mathbf{A} електромагнітного поля дочірнього ядра. На такій основі можна розглядати різні підходи до розрахунку спектрів гальмівного випромінювання. Найважливішою причиною розкладання $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ є розкладання інтеграла у (1.26), збіжність якого мало ймовірна, до нескінченної суми збіжних інтегралів. Кожний з цих інтегралів має свій ступінь збіжності, та може бути обчислений з деяким ступенем точності й характеризує випромінювання. Звичайно використовують перші декілька інтегралів для оцінки спектрів гальмівного випромінювання.

1.6. Розкладання векторного потенціалу електромагнітного поля

Насьогодні, застосовуються три типи розкладання:

- Розкладання у дипольному наближенні:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}\mathbf{r} + \dots \quad (1.27)$$

де у подальших розрахунках матричних елементів і спектрів переважно використовується лише перший доданок (одиниця);

- Розкладання за сферичними хвилями (у напрямку робіт [57, 58, 59, 60]):

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta_{\alpha\gamma}) j_l(kr), \quad (1.28)$$

де $\theta_{\alpha\gamma}$ — кут між векторами \mathbf{k} і \mathbf{r} ($\mathbf{k}\mathbf{r} = kr \cos \theta_{\alpha\gamma}$);

- Розкладання за електричними і магнітними мультиполями (див. [116], (2.106) на стор. 58; також стор. 22, 28 у [115]):

$$\xi_{\mu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l,\nu} (2l+1) 1/2 i^l D_{\nu\mu} l(\varphi, \theta, 0) \cdot \left[\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M) + i\mu \mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E) \right], \quad (1.29)$$

де [див. [116], (2.73) на стор. 49, (2.80) на стор. 51]

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M) &= j_l(kr) \mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n}_{\text{ph}}), \\ \mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E) &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} j_{l-1}(kr) \mathbf{T}_{l-1,\nu}(\mathbf{n}_{\text{ph}}) - \\ &- \sqrt{\frac{l}{2l+1}} j_{l+1}(kr) \mathbf{T}_{l+1,\nu}(\mathbf{n}_{\text{ph}}).\end{aligned}\quad (1.30)$$

Тут $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M)$ і $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E)$ — магнітні і електричні мультиполі, $j_l(kr)$ — сферичні функції Беселя порядку l (див. Додаток А.3, стор. 385), $\mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n})$ — векторні сферичні гармоніки (див. [116], стор. 45), $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — кути, що визначають орієнтацію вектору \mathbf{k} відносно осі z обраної системи координат. Матриця $D_{\nu\mu l, *(\varphi, \theta, 0)}$ визначає орієнтацію вектору \mathbf{k} відносно осі z у системі координат \mathbf{r} : кути φ і θ визначені відносно напрямку вектору \mathbf{k} , але не \mathbf{r} . Відповідно до [116] [див. (2.48б) на стор. 45], функції $\mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n})$ мають такий вигляд ($\xi_0 = 0$):

$$\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu=\pm 1} (l, 1, j | m - \mu, \mu, m) Y_{l,m-\mu}(\mathbf{n}) \boldsymbol{\xi}_\mu, \quad (1.31)$$

де $(l, 1, j | m - \mu, \mu, m)$ — коефіцієнти Клебша-Гордона (див. Додаток А.4, стор. 385) і $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферичні функції (див. Додаток А.2, стор. 384).

Формула (1.29) визначена, коли вектор \mathbf{k} спрямований довільно відносно обраної системи координат. Якщо систему координат зорієнтувати так, щоб вісь z була спрямована уздовж вектору \mathbf{k} , тоді з (1.29) отримаємо (див. [116], (2.105) на стор. 57):

$$\boldsymbol{\xi}_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mu\sqrt{2\pi} \sum_l (2l+1)1/2i^l \left[\mathbf{A}_{l\mu}(\mathbf{r}, M) + i\mu\mathbf{A}_{l\mu}(\mathbf{r}, E) \right]. \quad (1.32)$$

Цей вираз зручно використовувати у випадку, коли необов'язково фіксувати орієнтацію системи координат відносно ядра, що розпадається. Таке можливо у випадку, коли ядро й процес розпаду описуються у сферично симетричному наближенні. Якщо розпад проявляється асиметрично відносно осі z , тоді системі координат вже необхідно орієнтувати відносно ядра, що розпадається.

Тут, у загальному випадку вектор \mathbf{k} і вісь z уже не можуть бути співнаправлені, та слід використовувати (1.29).

1.7. Мультипольний підхід до визначення матричного елемента

Будемо вважати, що взаємодія між α -частинкою й дочірнім ядром при розпаді може бути описана за допомогою потенціалу, що повністю залежить лише від відстані між центрами мас α -частинки й дочірнього ядра. У такому випадку застосовується сферично симетричний опис розпаду.

Ми зорієнтуємо систему координат так, щоб вісь z була співнаправлена з вектором \mathbf{k} , і отримаємо

$$D_{\nu\mu}l(\varphi, \theta, 0) = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

Хвильові функції розпадаючої системи в початковому й кінцевому станах розділяються на радіальну й кутову компоненти, такі стани характеризуються квантовими числами l і m . Нас буде цікавити випромінювання фотона, при якому система переходить у суперпозицію по всіх можливих кінцевих станах з різними числами m_f при однаковому l_f . Нехай у початковому стані ми маємо $l_i = m_i = 0$ і радіальна компонента хвильової функції $\varphi_f(r)$ не залежить від m_f при обраному l_f . Маємо

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \varphi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r^i), \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= \varphi_f(r) \sum_{m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r^f). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Тоді матричний елемент (1.26) перетвориться до такого

$$p(k_i, k_f) = \sqrt{2\pi} \sum_{l=1} (-i)l \sqrt{2l+1} \left[p_l^M - i p_l^E \right], \quad (1.35)$$

де

$$p_l^M = \sum_{\mu=-1,1} \mu h_\mu p_{l\mu}^M, \quad p_l^E = \sum_{\mu=-1,1} \mu^2 h_\mu p_{l\mu}^E \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned}
p_{l\mu}^M &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, M), \\
p_{l\mu}^E &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, E).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Ці матричні елементи можна представити через добуток радіальних та кутових інтегралів [див. (Б.47), (Б.48), (Б.52) у Додатку Б.5.1 на стор. 402].

Якщо, ядро при розпаді у початковому стані має $l_i \neq 0$, то хвильову функцію такого стану можна записати так [див. (Б.55), (Б.56) у Додатку Б.5.2 на стор. 405]:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \varphi_i(r) \sum_{m_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i). \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}}^M &= \sqrt{\frac{1}{2l_i + 1}} \left\{ \sqrt{l_i} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1) \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i + 1} I_M(l_f, l_i, l_{\text{ph}}, l_i - 1) \cdot \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} \left. \right\}, \\
p_{l_{\text{ph}}}^E &= \sqrt{\frac{1}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} \cdot \left\{ \sqrt{l_i (l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} - 1) \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} + 1) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} + \\
&+ \sqrt{(l_i + 1)(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} - 1) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{(l_i + 1) l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} + 1) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} \left. \right\},
\end{aligned} \tag{1.39}$$

де введені наступні позначення:

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \frac{d\varphi_i(r, l_i)}{dr} j_n(kr) r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \varphi_i(r, l_i) j_n(kr) r dr, \\
I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \mu h_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, l_2) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} h_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_2, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Розрахунки кутових і повних матричних елементів виявляються достатньо складними (див. Додаток Б.5.3). Так, рішення для перших значень l_f , l_{ph} представлено формулами (Б.73)–(Б.74) (див Додаток Б.5.4, стор. 412–413).

Застосування дипольного наближення (1.27) при визначенні матричного елемента випромінювання є більш простим (див. Додаток Б.6, стор. 413–418). Але, як виявляється, воно й менш акуратне у розрахунках спектрів.

1.8. Кутова ймовірність випромінювання при α -розпаді ядер

1.8.1. Ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k}

Визначимо *диференціальну абсолютну ймовірність* випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} при α -розпаді ядра як [див. (Б.101), Додаток Б.7.1, стор. 418–420]

$$\frac{dP(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{с. с.} \right\}, \tag{1.41}$$

де с. с.— позначення комплексного спряження, $k_{\text{ph}} = w_{\text{ph}}/c$, $w_{\text{ph}} = w_i - w_f = (E_i - E_f)/\hbar$. Цей вираз являє собою ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} , де вже виконані усереднення за значеннями поляризації фотона

$e^{(\alpha)}$ і інтегрування за кутами руху α -частинки після випромінювання фотона. Тому така ймовірність не залежить від напрямків руху α -частинки (або її тунелювання) після випромінювання. Відзначимо, що існує також інший шлях визначення кутової ймовірності гальмівного випромінювання фотонів у задачах α -розпаду [101], заснований на іншому зв'язку матричного елемента випромінювання з кутом θ між напрямками руху фрагмента, що вилітає, і випромінювання фотона. Іноді змінну θ_f у дужках функцій будемо опускаати.

1.8.2. Ймовірність випромінювання у мультипольному підході

Диференціальна абсолютна ймовірність (1.41) у мультипольному підході для перших чисел $l_f = 1$ і $l_{ph} = 1$ має такий вигляд [див. (Б.106)–(Б.108), Додаток Б.7.2, стор. 421–423]:

$$\frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{dw_{ph}} = \frac{dP_1^{E1}(\theta_f)}{dw_{ph}} + \Delta \frac{dP_1^{M1}(\theta_f)}{dw_{ph}}, \quad (1.42)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^{E1}(\theta_f)}{dw_{ph}} = & \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{8\pi c^5} \frac{w_{ph} E_i}{m^2 k_i} \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1,2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right] + \text{с. с.} \right\} \cdot \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \Delta \frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{dw_{ph}} = & - \frac{3 Z_{\text{eff}}^2 e^2}{8\pi \sqrt{2} c^5} \frac{w_{ph} E_i}{m^2 k_i} \times \\ & \times \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} J(1,2) \right] J^*(1,1) + \text{с. с.} \right\} \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (1.44)$$

Перший доданок (1.43) визначає ймовірність випромінювання фотона тільки за рахунок врахування електричного мультиполя E1. Другий доданок (1.44) визначає корекцію до ймовірності випромінювання за рахунок врахування магнітного мультиполя M1 (незважаючи на те, що інтегральна магнітна компонента p_1^M від матричного елемента дорівнює нулю, врахування її диференціальної складової вносить ненульовий вклад у повну ймовірність випромінювання фотона).

1.8.3. Ймовірність випромінювання у дипольному підході

У дипольному наближенні диференціальна та інтегральна ймовірності випромінювання у залежності від кута θ мають дещо спрощений вигляд [див. (Б.109)–(Б.110), Додаток Б.7.3, стор. 423–424]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta, \\ P_{\text{dip}}(\theta_f) &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{3\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Звідси можна також записати:

$$\frac{dP_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} = 3\pi \cdot P_{\text{dip}}(\theta_f) \cdot \sin^2 \theta. \quad (1.46)$$

1.8.4. Спектроскопічний фактор

У визначенні ймовірності гальмівного випромінювання можна врахувати ймовірність формування α -частинки у стані, з якого вона покидає ядро. Для цього, вводиться спектроскопічний фактор $S_\alpha^{(\text{th})}$ в задачах розпадів. На такій основі, ми скорегуємо формулу для ймовірності випромінювання. Для мультипольного й дипольного підходів з (1.43) та (1.45) отримаємо [див. (Б.111)–(Б.112), стор. 425]

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_{\text{mult},1}^{E1+M1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{8\pi c^5} \frac{w_{fi} E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i} \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1,2) \left(1 - 3 \sin^2 \theta \right) - \frac{3}{\sqrt{2}} J^*(1,1) \cos \theta \right] + \text{c. c.} \right\} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta, \\ \tilde{P}_{\text{dip}}(\theta_f) &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{3\pi c^5} \frac{E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Можна бачити, що включення спектроскопічного фактора $S_\alpha^{(\text{th})}$ зменшує ймовірність гальмівного випромінювання.

1.9. Спектри випромінювання для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm

Щоб оцінити ефективність моделі і точність, яку вона дає у розрахунках ймовірностей гальмівного випромінювання, ми будемо шукати спектри для тих ядер, для яких існують експериментальні дані. Отже, ми маємо ядра ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm . Ми визначаємо ймовірність гальмівного випромінювання за формулами (1.42)–(1.42), α -ядерний потенціал — за формулами (11)–(15), а його параметри — за формулами (16)–(22) у [59]. Q_α -значення ми беремо з [119] (див. стор. 63): маємо 5.439 МеВ для ^{210}Po , 7.865 МеВ для ^{214}Po , 4.904 МеВ для ^{226}Ra , 5.940 МеВ для ^{244}Cm . Ми вибираємо фіксоване значення кута $\vartheta_{\alpha\gamma}$ між напрямками руху α -частинки (з можливим тунелюванням) і випромінювання фотона для ^{214}Po і ^{226}Ra , рівне 90° , що відповідає геометрії експерименту [16, 59, 58]. Для ^{210}Po ми використовуємо такий же кут. Для ^{244}Cm ми розглянемо два випадки: значення кута 90° і 25° , з метою включити експеримент [17] у загальну картину аналізу.

Перший крок у такій задачі — визначення хвильових функцій, які повинні бути знайдені з достатньо високою точністю, щоб одержати збіжні значення спектрів випромінювання. Хвильові функції α -розпадаючої системи у станах до й після випромінювання фотона показані на Рис. 1.1 (для ядра ^{210}Po , при енергії випроміненого фотона 500 кеВ). У початковому стані хвильова функція є комплексною. Це забезпечує збереження постійного ненульового потоку (у внутрішній області, області тунелювання й зовнішній області), який спрямований назовні. У розрахунках спектрів хвильова функція у кінцевому стані є дійсною, що дозволяє уникнути розбіжності при $r = 0$. Зокрема, на перших трьох малюнках (а, б, с) можна бачити поведінку хвильових функцій на границі розділу між областю тунелювання й зовнішньою областю. Останній малюнок (г) показує помилки, які ми маємо у чисельному розра-

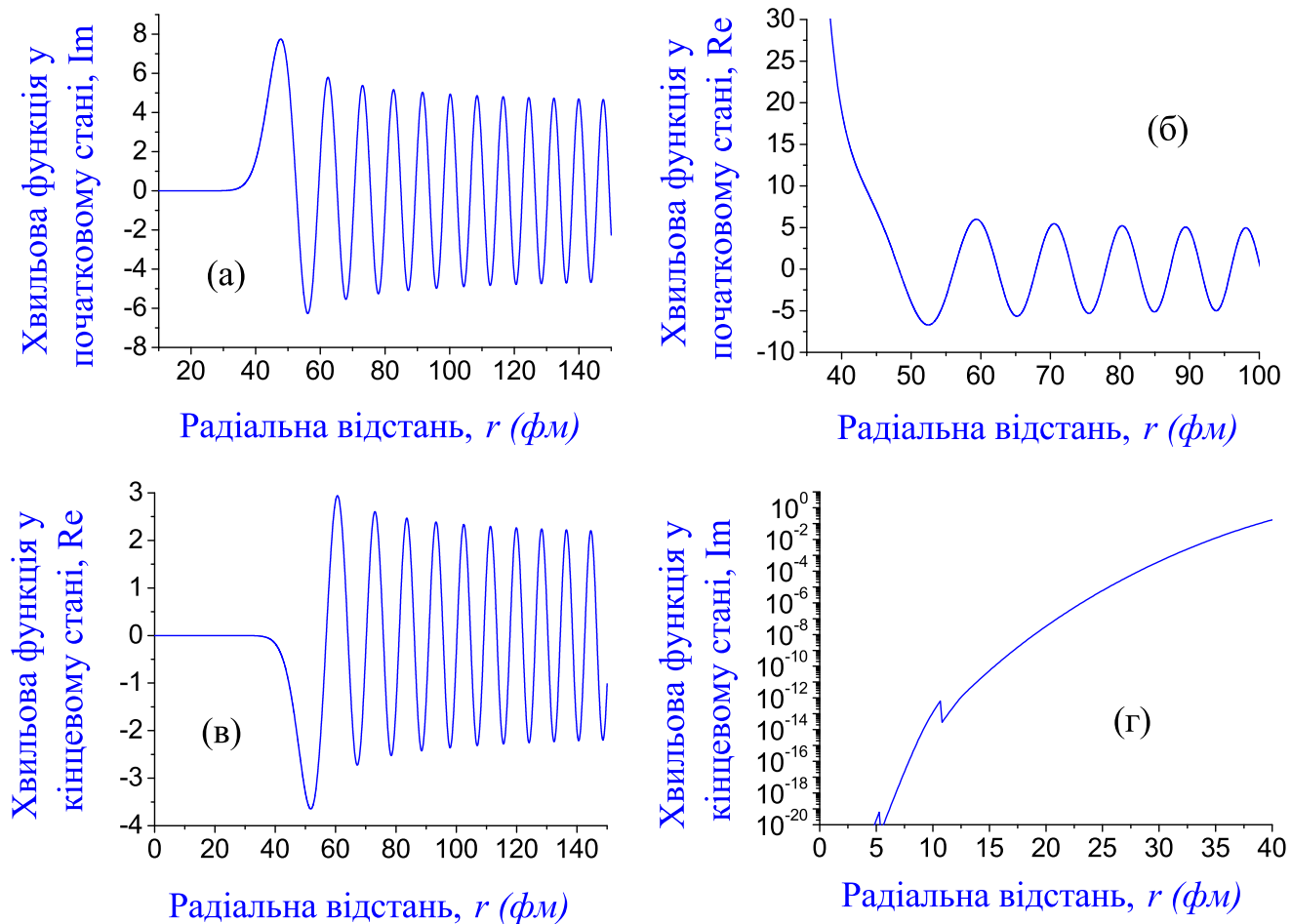


Рис.1.1 Хвильові функції α -розпадаючого ядра ^{210}Po : (а) уявна частина хвильової функції у початковому i -стані; (б) дійсна частина хвильової функції у початковому i -стані; (в) дійсна хвильова функція у кінцевому f -стані (після випромінювання фотона); (г) помилки при визначенні хвильової функції кінцевого f -стану, що з'являються у поточних розрахунках спектрів.

хунку. Тому можна сподіватися, що це дозволить одержати збіжні картини ймовірностей гальмівного випромінювання для усіх досліджуваних ядер.

1.9.1. Спектри випромінювання для ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm : порівняння теорії з експериментом

Найкращі результати у згоді між теорією й експериментом у мультипольному підході вдається одержати для ядра ^{214}Po [див. Рис. 1.2 (а); тут не існує ніякого нормування розрахункової кривої на експериментальні дані]. Із цього малюнка можна бачити, що для цього ядра розрахунковий спектр виявляється у достатньо непоганій згоді з експериментальними даними [59] у діапазоні енергій випроміненого фотона від 100 кеВ до 750 кеВ. Обчислені абсолютні ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{226}Ra і експериментальні дані [58] для цього ядра представлені на Рис. 1.2 (б). Для цього ядра при більш низьких енергіях випромінених фотонів обчислені спектри розташовуються трохи нижче експериментальних даних, але починаючи від енергії 350 кеВ і вище досягається гарна згода між теорією й експериментом. До цих результатів я додаю обчислені абсолютні ймовірності випромінювання для ядра ^{244}Cm , порівнюючи їх з верхньою межею помилок експериментальних даних [17, 18] (див. Рис. 1.2 (в)). У розрахунку спектра використовується кут $\vartheta_{\alpha\gamma} = 25^\circ$ (кут між напрямком руху α -частинки й випромінювання фотона), що відповідає експерименту [18], і я додаю інший спектр при $\vartheta_{\alpha\gamma} = 90^\circ$. Із цього малюнка видно, що обидві розрахункові криві розташовані досить близько до верхньої межі помилок експериментальних даних, та звідси можна зробити висновок про те, що згода між теорією й експериментом не погана. Цей малюнок ясно демонструє, що відмінність між верхнім і нижнім спектрами могла би бути поясненою різними значеннями кута. Таке пояснення двох різних спектрів на основі однієї моделі дано вперше нами. На цій підставі можна вважати, що питання, яке гостро дискусувалося (обговорювалося) у

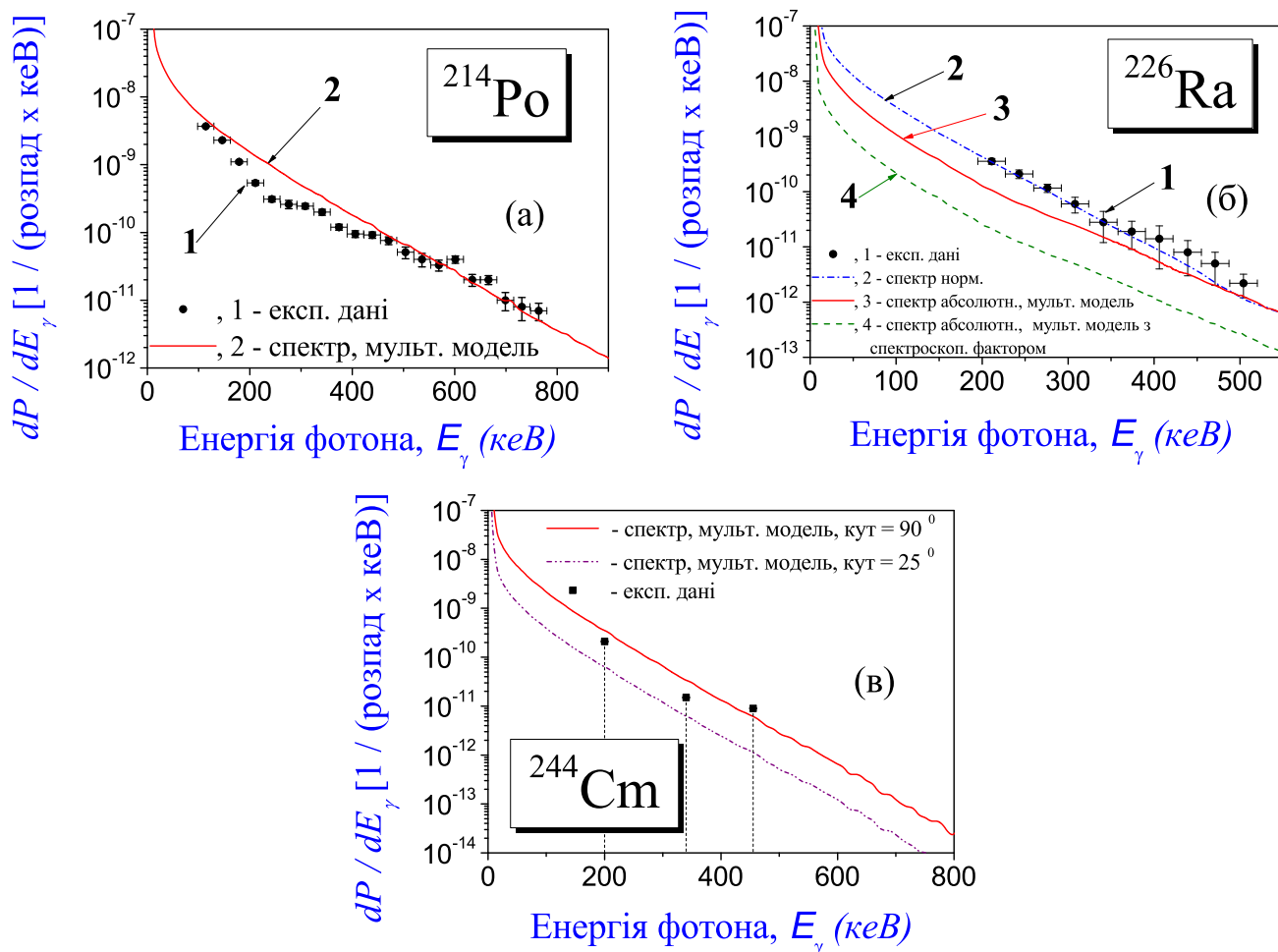


Рис.1.2 Ймовірність гальмінового випромінювання при α -розпаді ядер ^{214}Po (а), ^{226}Ra (б) і ^{244}Cm (в): суцільна червона лінія — абсолютна ймовірність, обчислена за мультипольним підходом для кута $\theta = 90^\circ$, штрих-пунктирна синя лінія — нормована крива, отримана у підході [58] для деформованого ядра ^{226}Ra , штрихова зелена лінія — абсолютна ймовірність, визначена за формулою (1.47) мультипольної моделі з урахуванням спектроскопічного фактора $S_\alpha^{(\text{th})}$ для деформованого ядра ^{226}Ra (ми використовуємо наближене значення $S_\alpha^{(\text{th})} = 0.2$, узятє з таблиці у [120]), штрихова двічі-пунктирна пурпурна лінія — абсолютна ймовірність, визначена за формулою (1.47) мультипольної моделі для ядра ^{244}Cm для кута $\theta = 25^\circ$, експериментальні дані, які взято з роботи [59] для ^{214}Po , роботи [58] для ^{226}Ra та робіт [17, 18] для ^{244}Cm .

роботах [19, 20] відносно ядра ^{210}Po , може бути закритим.

1.9.2. Спектри випромінювання для ^{210}Po : порівняння мультипольного підходу з дипольним

Мультипольний підхід надає більш точного опису гальмівного випромінювання як без нормування розрахункових спектрів на існуючі експериментальні дані (тобто у так званому абсолютному масштабі), так і у випадку, коли таке нормування використовується, у порівнянні з дипольним підходом. Так, розглянемо Рис. 1.3 (а), де представлені спектри випромінювання гальмівних фотонів для ядра ^{210}Po , отримані за допомогою мультипольного й дипольного підходів за абсолютною шкалою. Щоб відчуті чутливість спектрів до зміни форми внутрішньої ями α -ядерного потенціалу (тобто на області від $r \rightarrow 0$ до внутрішньої точки повороту), у цей малюнок включені наступні розрахунки: (1) спектри без внеску випромінювання з такої внутрішньої ями (для дипольного підходу це відповідає випадку прямокутної ями у внутрішній області) і (2) повні спектри, отримані відносно повного α -ядерного потенціалу з реалістичною ядерною компонентою. Ясно видно, що для дипольного підходу вплив форми потенціалу у внутрішній області на спектр відчувається суттєво сильніше, тоді як мультипольний підхід менш чутливий до неї. Така особливість може бути поясненою більш акуратним використанням далекої асимптотичної області у мультипольному підході, тоді як дипольний підхід сильніше цю область відсікає. Це веде до більш високої (швидкої) збіжності обчислень радіальних інтегралів у дипольнім наближенні; як результат, такі спектри виходять значно більш стійкими. Однак, *більш акуратне використання далекої асимптотичної області, яке забезпечує мультипольний підхід, поліпшує згоду між розрахунковими кривими та експериментальними даними.* Цей важливий пункт надає мультипольної моделі силу пророкувань (без нормування на експеримент), на відміну від дипольного. Щоб зробити

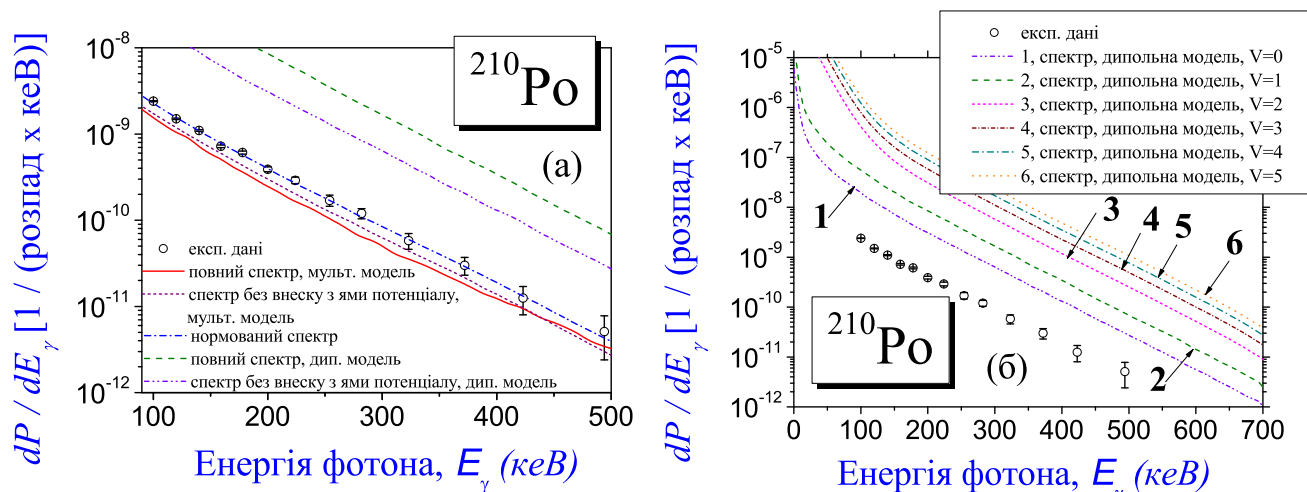


Рис.1.3 Ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{210}Po , обчислені без нормування на експериментальні дані [21]. Панель (а): Відмінність між спектрами, обчисленими у дипольнім наближенні із включенням випромінювання із внутрішньої області й без такого випромінювання, не є малою, на відміну від аналогічних обчислень у мультипольному підході (суцільна червона лінія — спектр, отриманий за мультипольною моделлю; коричнева коротка штрихова лінія — спектр, знайдений за мультипольною моделлю без включення випромінювання із внутрішньої просторової області до внутрішньої точки повороту; зелена штрихова лінія — повний спектр, отриманий у дипольнім наближенні; синя штрихова двічі пунктирна лінія — спектр, визначений у дипольному наближенні без включення випромінювання із внутрішньої області; синя штрих-пунктирна лінія — нормований спектр, отриманий за мультипольною моделлю у роботі [57] (див. лінію 6 у тій роботі)). Панель (б): Роль сили ядерної компоненти потенціалу \tilde{V}_0 проявляється у розрахунках спектрів випромінювання у дипольному підході. Можна бачити, що чим більше сила ядерної компоненти, тим сильніше спектр зростає (у розрахунках кожного спектра силу ядерної компоненти визначаємо як $\tilde{V}_0 = V_0 \cdot V$, де величина V_0 визначається за формулою (14) у [112] і додатковий множник V має значення 0, 1, 2, 3, 4, 5, як показано на малюнку).

цю картину більш повною, я додам розрахунки спектрів для ^{210}Po у дипольному підході для різних значень сили ядерної компоненти потенціалу (nuclear strength), показані на Рис. 1.3 (б). Звідси ясно видно, що спектр тим вище, чим сила ядерної компоненти більше (тобто внутрішня яма α -ядерного потенціалу глибше). Для мультипольного підходу така залежність повинна проявлятися суттєво слабкіше. Отже, надалі ми будемо використовувати мультипольний підхід для розрахунків спектрів гальмівного випромінювання й для аналізу.

1.9.3. Залежність ймовірності гальмівного випромінювання від Q_α -значення й спектри при α -розпаді ізотопів Th

У достатньо недавно опублікованій роботі [121] повідомляється про експериментальні дослідження з метою виміряти гальмівне випромінювання, що супроводжує α -розпад ядра ^{228}Th . Ми оцінимо абсолютну ймовірність випромінювання для цього ядра на основі розробленої вище моделі, з метою підтримати тих дослідників. Результати таких розрахунків представлено на Рис. 1.4. У розрахунках використано такі параметри: кут ϑ між напрямками руху α -частинки (з можливим тунелюванням) і випромінюванням фотона дорівнює 90° , а Q_α -значення — 5.555 MeV [119]. У роботі [58] ми пояснили

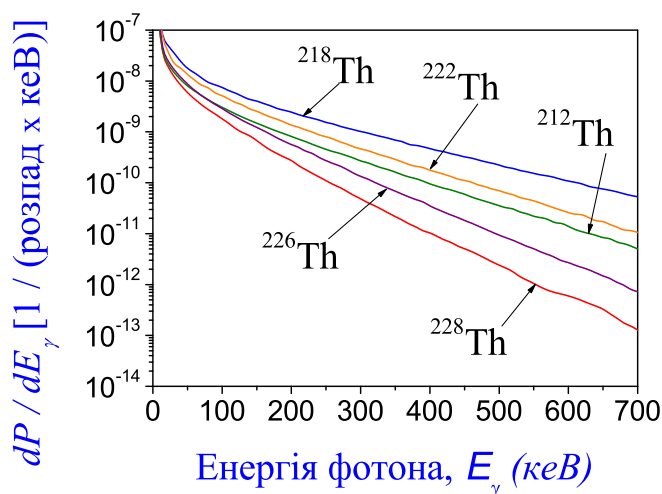


Рис.1.4 Абсолютні ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Th і його ізотопів.

дані α -розпаду				Ймовірність випромінювання, 1/ кеВ / розпад				
A_p	Q_α , MeV	$b_{\alpha\text{abs}}$, %	$T_{1/2,\alpha\text{exp}}$, сек	100 кеВ	200 кеВ	300 кеВ	400 кеВ	500 кеВ
212	7.987	100.0	3.0 E-2	3.0 E-9	8.1 E-10	2.7 E-10	9.5 E-11	3.5 E-11
218	9.881	100.0	1.1 E-7	7.5 E-9	2.5 E-9	1.0 E-9	4.7 E-10	2.2 E-10
222	8.164	100.0	2.8 E-3	5.2 E-9	1.3 E-9	4.6 E-10	1.7 E-10	7.0 E-11
226	6.487	75.5	2.5 E+3	2.9 E-9	5.6 E-10	1.3 E-10	3.5 E-11	9.4 E-12
228	5.555	72.7	8.3 E+7	1.8 E-9	2.8 E-10	4.9 E-11	1.0 E-11	1.9 E-12

Табл. 1.1. Оцінені значення ймовірностей гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Tm і його ізоотопів

відмінність між ймовірностями випромінювання фотонів (на основі експериментальних, так і теоретичних результатів) при α -розпаді ядер ^{226}Ra і ^{214}Po (залежність ймовірності гальмівного випромінювання від енергії, з якою вилітає α -частинка, була також проаналізована у [122]): відмінність між двома спектрами може бути поясненою різною структурою цих ядер, що призводить до різної динаміки тунелювання α -частинки в області бар'єра. Відмінність між двома спектрами випромінених фотонів суттєво визначається різними енергіями, з якими вилітає α -частинка для ^{214}Po ($E_\alpha = 7.7$ MeV) і ^{226}Ra ($E_\alpha = 4.8$ MeV). Можна вважати, що ймовірність випромінювання фотона при тунелюванні α -частинки менше, чим при надбар'єрному її русі. Різні енергії, з якими вилітає α -частинка для ядер ^{214}Po і ^{226}Ra , формують різні довжини тунелювання для цих ядер, що дає різні внески випромінювання фотонів з областей тунелювання, зовнішніх областей, а також їх інтерференційні внески у повні спектри. Таким чином, ми приходимо до наступної властивості: *Чим більше область тунелювання, тим менше ймовірність гальмівного випромінювання.* Цим і пояснюються менші значення для обчисленої ймовірності випромінювання для ^{226}Ra у порівнянні з ^{214}Po . На Рис. 1.4 можна бачити демонстрацію цієї властивості для ізоотопів Tm. У таблиці 1.1 показано, як ймовірність гальмівного випромінювання залежить від Q_α -значення

ядра для різних енергій випромінених фотонів.

1.9.4. На скільки сильно змінюється ймовірність гальмівного випромінювання у залежності від числа протонів і нейтронів α -розпадаючої системи?

Тепер розглянемо, наскільки сильно ймовірність випромінювання фотонів змінюється у залежності від числа протонів і нейтронів ядра, яке розпадається. Для ясності аналізу, ми зафіксували Q -значення на одному обрано-

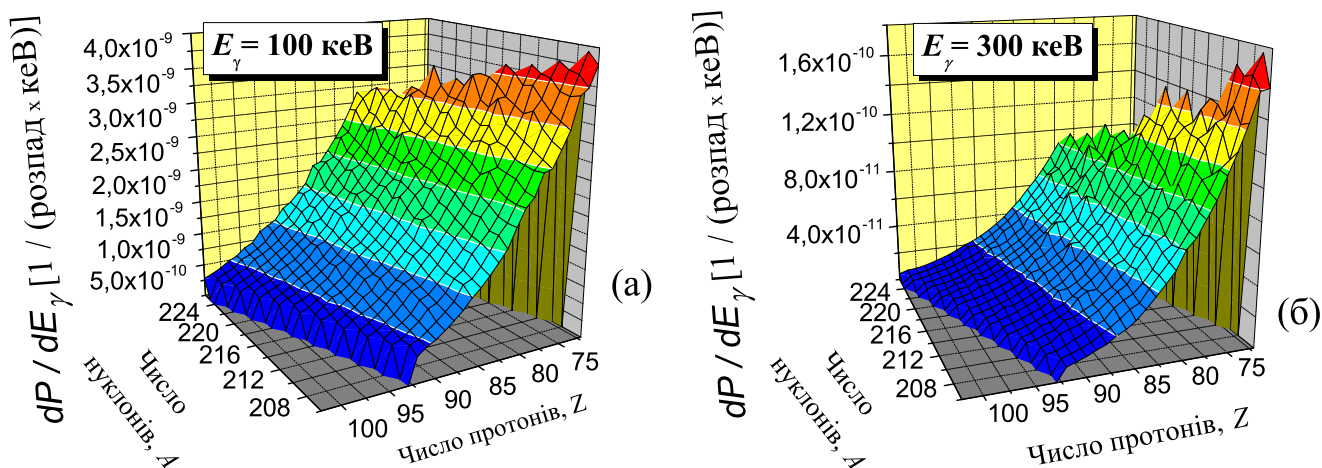


Рис.1.5 Розподіл абсолютної ймовірності випромінювання при α -розпаді у залежності від чисел протонів і нейтронів розпадаючого ядра (використані дані: $Q_\alpha = 5.439$ MeV для ^{210}Po): (а) розподіл ймовірностей випромінювання при енергії $E_\gamma = 100$ кеВ, (б) розподіл ймовірностей випромінювання при енергії $E_\gamma = 300$ кеВ

му значенні й знайшли ймовірності у деякому діапазоні значень протонів і нейтронів (виберемо кут між напрямками випромінювання фотонів і руху α -частинки рівним 90°). На Рис. 1.5 показано розподіл абсолютних ймовірностей у залежності від чисел протонів і нейтронів α -розпадаючого ядра для 100 кеВ, 300 кеВ і 500 кеВ випромінених фотонів. Можна бачити, що з ростом числа нейтронів ймовірність змінюється слабо й монотонно, тоді як з ростом числа протонів ймовірність монотонно зменшується суттєво сильніше.

1.9.5. Кутовий розподіл ймовірності випромінювання фотонів

Розглянемо, як змінюється ймовірність випромінювання фотонів від величини кута між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона. Для аналізу ми розглянемо ядро ^{210}Po . На Рис. 1.6 показані ймовірності випромінювання, знайдені за мультипольною моделлю, для різних значень цього кута. Можна бачити, що спектр при куті 25° розташований значно нижче у

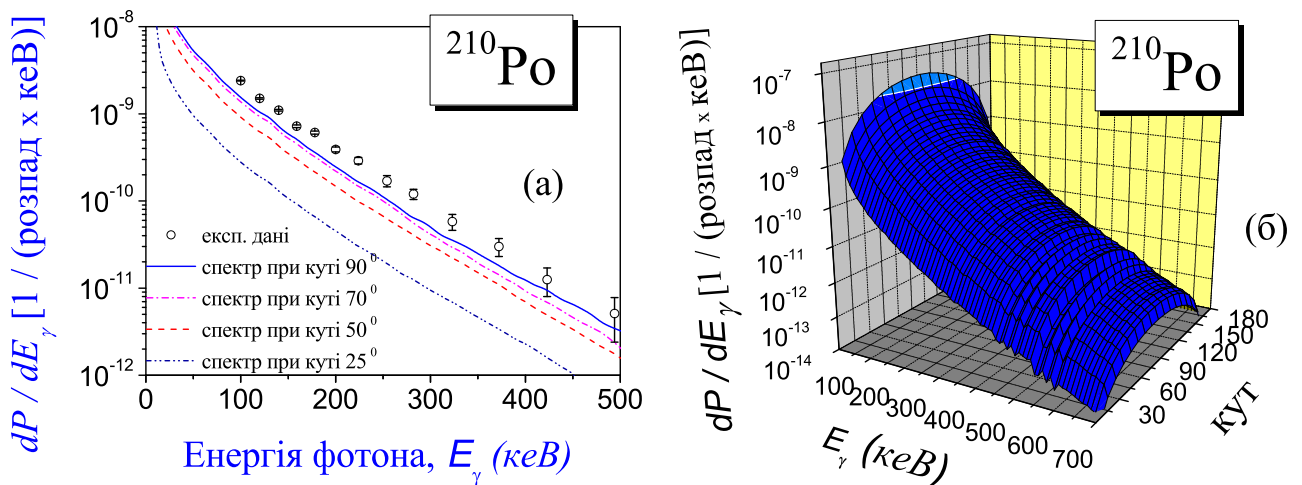


Рис.1.6 Абсолютна ймовірність випромінювання при α -розпаді ^{210}Po у залежності від кута $\vartheta_{\alpha\gamma}$ між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона у порівнянні з експериментальними даними [21].

порівнянні зі спектром при куті 90° . Ці результати дозволяють зв'язати експериментальні дані [18] і [16], отримані при цих кутах. Тобто, у такий спосіб уперше вдається дати теоретичне обґрунтування припущенню про відмінність між двома експериментами, висунутому в роботах [19, 20]. На Рис. 1.7 показано розподіл ймовірності випромінювання у залежності від кута $\vartheta_{\alpha\gamma}$ між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона для ядра ^{210}Po . Видно, що кутовий розподіл ймовірності формується переважно першим інтегралом $J(1, 0)$, тоді як два інтеграли $J(1, 1)$ і $J(1, 2)$ вносять малий внесок до повного спектру.

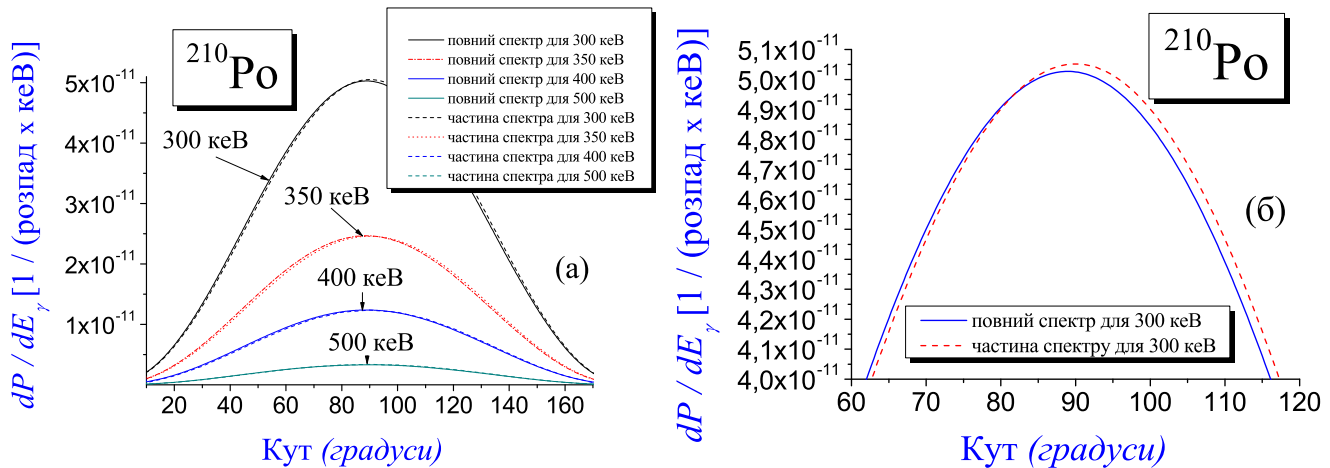


Рис.1.7 Розподіл ймовірності випромінювання у залежності від кута між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона для ядра ^{210}Po : (а) ймовірності при 300 кеВ, 350 кеВ, 400 кеВ, 500 кеВ; (б) ймовірності при 300 кеВ у збільшеному масштабі.

1.9.6. Формула ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді

Щоб знайти таку формулу, на початку ми будемо шукати вигляд цієї формули для деякого обраного ядра. Після попереднього аналізу й деяких оцінок спектрів для різних ядер, у якості стартової залежності ми знайшли таку (для простоти, надалі будемо використовувати $\vartheta_{\alpha\gamma} = 90^\circ$):

$$\ln \left\{ \frac{dP_{\text{param}}(w; a_0 \dots a_4, n_1 \dots n_4)}{d\Omega_{\text{ph}} d\cos\theta_f} \right\} = \ln \left\{ \frac{e^2}{8\pi c^5} \frac{Z_{\text{eff}}^2 E_i}{m^2 k_i} \right\} + a_0 - \quad (1.49)$$

$$- a_1 w n_1 + \frac{a_2}{w n_2} + \frac{a_3}{w n_3} + \frac{a_4}{w n_4},$$

де $a_0 \dots a_4$ й $n_1 \dots n_4$ — постійні, що не залежать від енергії випроміненого фотона та різні для різних ядер. Ці постійні характеризують “структуру” α -розпаду ядер. Тому вони повинні залежати від Q_α , Z_{eff} , Z_d , A_d досліджуваного ядра.

Щоб знайти ці параметри $a_0 \dots a_4$ $n_1 \dots n_4$ для обраних ядер, ми вве-

демо наступні характеристики:

$$\sigma(a_i, n_i) = \sqrt{\frac{1}{w_{\max} - w_{\min}} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} [\Delta P(w; a_i, n_i)]^2 dw},$$

$$\Delta P(w; a_i, n_i) = \ln \left\{ \frac{dP_{\text{model}}(w)}{d\Omega_{\text{ph}} d\cos\theta_f} \right\} - \ln \left\{ \frac{dP_{\text{param}}(w; a_0 \dots a_4, n_1 \dots n_4)}{d\Omega_{\text{ph}} d\cos\theta_f} \right\}, \quad (1.50)$$

де dP_{model} і dP_{param} — ймовірності гальмівного випромінювання, обчислені за мультипольною моделлю й за формулою (1.49) відповідно. Чим менше σ при фіксованих інших параметрах, тим крива dP_{param} , отримана за допомогою формули (1.49), буде ближче розташованою до спектра dP_{model} , знайденого за мультипольною моделлю. Тобто найкраще визначення спектра гальмівного випромінювання для досліджуваних ядер за формулою (1.49) відповідає такому вибору параметрів $a_0 \dots a_4$ і $n_1 \dots n_4$, коли σ є мінімальним. Для зручності, назвемо такий підхід до визначення параметрів для обраних ядер *методом мінімізації*. У такому підході, розрахунки для ядра ^{218}Th дають наступні значення (при $w_{\min} = 50$ кеВ і $w_{\max} = 900$ кеВ):

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, & n_2 &= 0.5, & n_3 &= 1, & n_4 &= 2, \\ a_0 &= 10.8, & a_1 &= 0.007, & a_2 &= 10, & a_3 &= 10, & a_4 &= 1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Виявляється, що крива, отримана за формулою (1.49) при виборі (1.51), розташована найбільш близько до спектра випромінювання для ^{218}Th . Тому можна чекати, що ймовірність гальмівного випромінювання для довільного ядра може бути досить добре апроксимованою за формулою (1.49) для енергій випромінених фотонів до 1 МеВ. Оцінки параметрів для інших ядер показують, що можливо описати спектри випромінювання з досить гарною точністю для різних ядер, використовуючи тільки різні a_0 і a_1 , при фіксованих $n_1 \dots n_4$ і навіть a_2, a_3, a_4 .

На першому етапі побудови формули ймовірності ми визначимо параметри $n_1 \dots n_4, a_2, a_3$ і a_4 для різних ядер за формулою (1.51) і постараємося

дані α -розпаду						параметри			
No.	A_d	$A_d/3$	Z_d	Z_{eff}	Q_α , MeB	$a_0^{(\text{min})}$	$a_0^{(\text{param})}$	$a_1^{(\text{min})}$	$a_1^{(\text{param})}$
1	224	6.073177	88	0.42105	5.555	10.2	10.20083	0.0154	0.01531749
2	224	6.073177	88	0.42105	10.0	11.2	11.20020	0.0069	0.00681732
3	102	4.672328	50	0.03774	10.0	6.3	6.30084	0.00475	0.00440210
4	262	6.398827	107	0.36090	10.0	10.9	10.90000	0.008	0.00799993

Табл. 1.2. Параметри a_0 і a_1 для ^{228}Tm , ^{106}Te і ядра з $A_p = 266$ і $Z_p = 109$ [$a_0^{(\text{min})}$ і $a_1^{(\text{min})}$ — параметри, обчислені за методом мінімізації, $a_0^{(\text{param})}$ і $a_1^{(\text{param})}$ — параметри, знайдені за формулою (1.53)]

з'ясувати, від чого повинні залежати a_0 і a_1 . Найпростіша залежність a_0 і a_1 від Q , A_d і Z_d — лінійна. Тому розглянемо наступні формули:

$$\begin{aligned} a_0(Q, A_d, Z_d) &= b_{00} + b_{01} Q + b_{02} A_d + b_{03} Z_d, \\ a_1(Q, A_d, Z_d) &= b_{10} + b_{11} Q + b_{12} A_d + b_{13} Z_d, \end{aligned} \quad (1.52)$$

де введені нові невідомі параметри b_{0i} і b_{1i} ($i = 0, 1, 2, 3$), які не залежать від Q , Z_d і A_d . Найпростіший шлях — знайти b_{01} і b_{11} . Для таких розрахунків нам досить розглянути два ядра з рівними числами Z_d і A_d і різними Q -значеннями. Розглянемо ядро ^{228}Tm . Для нього ми спершу обчислюємо два спектри гальмівного випромінювання за мультипольною моделлю при двох різних Q -значеннях (виберемо $Q_1 = 5.555$ MeB і $Q_2 = 10$ MeB), а потім знайдемо параметри a_0 і a_1 за методом мінімізації. Результати таких розрахунків показані у Табл. 1.2 у перших двох рядках з номерами 1 і 2.

Щоб знайти наступні два невідомі параметри b_{ij} ($i = 1, 2, j = 0, 2, 3$), досить розглянути ядра з різними числами A_d , Z_d при зафіксованому однаковому Q -значенні. Щоб досягти найбільш високої точності, будемо використовувати попереднє ядро й два нові з максимальною великою різницею між їхніми числами A_d . Для цього скористаємося Таблицею у роботі [119], звідки ми вибираємо: ^{106}Te і ядро з $A_p = 266$, $Z_p = 109$. Далі ми знаходимо спектри випромінювання при Q_α -значенні, що дорівнює 10 MeB, за допомогою мульт-

типольної моделі, а потім визначаємо a_0 і a_1 за допомогою методу мінімізації. Результати показані у Табл. 1.2 у наступних двох рядках під номерами 3 і 4. Використовуючи дані цієї таблиці, визначаємо невідомі b_{0i} і b_{1i} , на основі яких одержуємо невідому залежність a_0 і a_1 від Q , A_d і Z_d :

$$\begin{aligned} a_0(Q, A_d, Z_d) &= 4.60202 + 0.22497 \cdot Q + 0.11956 \cdot A_d - 0.25492 \cdot Z_d, \\ a_1(Q, A_d, Z_d) &= 0.0204108 - 0.0019123 \cdot Q + 1.086956 \cdot 10^{-6} \cdot A_d + \\ &+ 6.0068649 \cdot 10^{-5} \cdot Z_d. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Тепер формула ймовірності випромінювання (1.49) перетвориться до вигляду:

$$\begin{aligned} &\ln \left\{ \frac{dP_1^{E_1+M_1}(w, \theta_f = 90^\circ)}{d\Omega_{\text{ph}} d\cos\theta_f} \right\} = \\ &= \ln \left\{ \frac{e^2}{8\pi c^5} \frac{Z_{\text{eff}}^2 E_i}{m^2 k_i} \right\} + a_0 - a_1 w + \frac{10}{\sqrt{w}} + \frac{10}{w} + \frac{1}{w^2}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Для чотирьох досліджуваних ядер ми одержуємо дуже малу відмінність між ймовірністю випромінювання, обчисленою за мультипольною моделлю, і кривою, що розраховується за формулою (1.54) з параметрами (1.53) у діапазоні енергій випромінених фотонів до 1 МеВ. *Тобто за допомогою однієї формули, параметри якої визначаються на основі A_d , Z_d і Q_α , нам вдалося з достатньо гарною точністю описати спектри гальмівного випромінювання у діапазоні енергій випромінених фотонів до 1 МеВ для чотирьох різних ядер (для яких сильно відрізняються A_d).* Виявляється, що опис спектрів гальмівного випромінювання для всіх ядер у діапазоні A_d від 107 до 262 при різних Z_d за допомогою формули (1.54) з параметрами (1.53) є не завжди настільки точним, однак він досить непоганий (див. криві на Рис. 1.8, отримані за формулою ймовірності). Однак, точність визначення ймовірностей у такому підході можна надалі поліпшити суттєво для “проблемних” ядер, якщо перейти від лінійної залежності (1.52) від чисел A_d і Z_d до гармонійної.

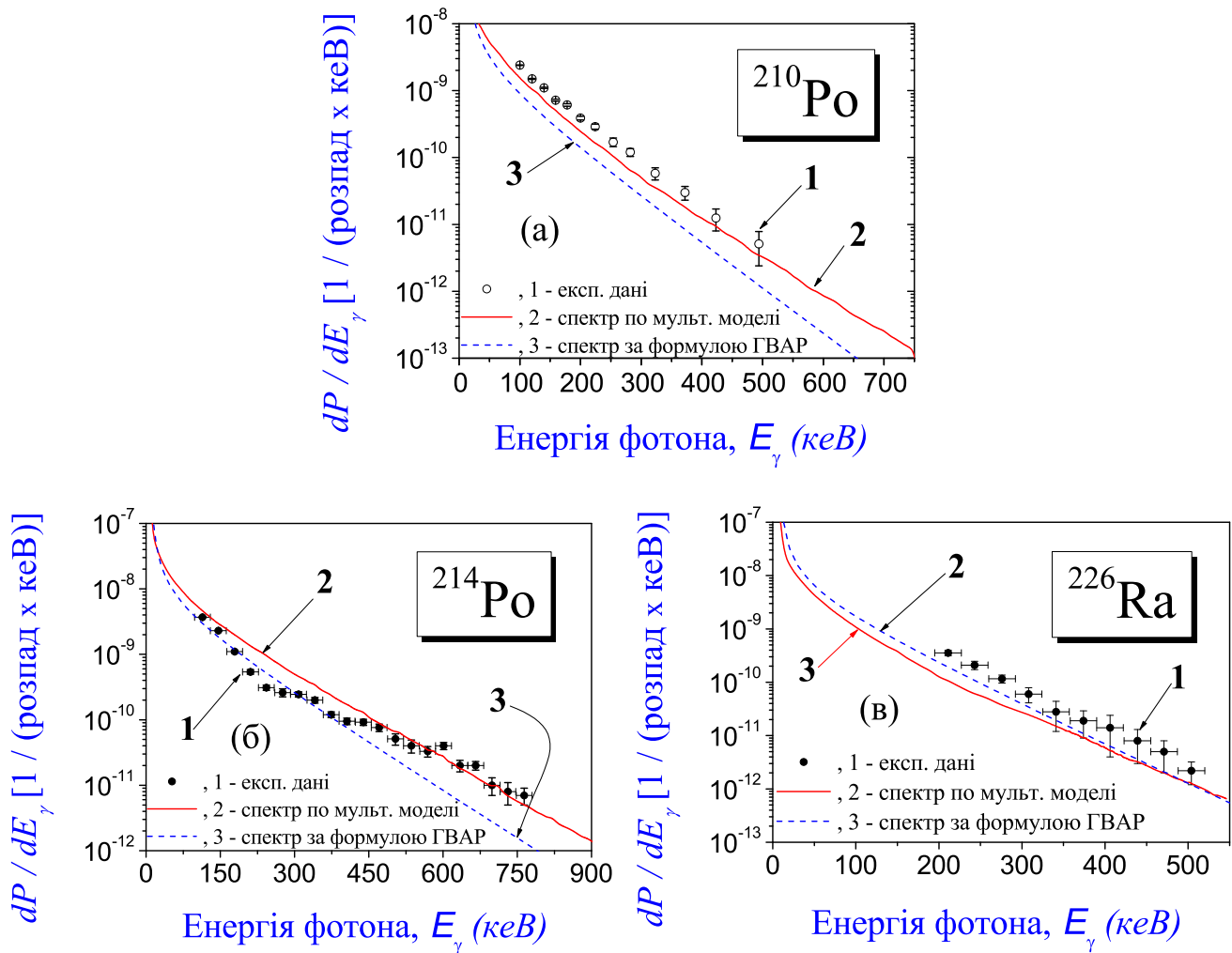


Рис.1.8 Ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{210}Po (а), ^{214}Po (б) і ^{226}Ra (в) ($\vartheta_{\alpha\gamma} = 90^\circ$): абсолютні ймовірності випромінювання, знайдені за мультипольною моделлю (суцільні червоні лінії за номером 2), експериментальні дані (експериментальні дані [21] для ^{210}Po , дані [59] для ^{214}Po і дані [58] для ^{226}Ra , позначені на рисунках номером 1) і криві, отримані за формулою (1.54) при (1.53) [штрихові сині лінії за номером 3, позначені на рисунках як «спектр за формулою ГВАР» (тобто формулою гальмівного випромінювання при альфа-розпаді)].

1.10. Головні результати і висновки до Розділу 1

У Розділі викладено нову модель гальмівного випромінювання фотонів, яке супроводжує α -розпад сферичних ядер. Ефективність моделі й точність обчислень спектрів аналізуються у порівнянні з існуючими експериментальними даними для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm . Вперше отримано наступне.

1. Найбільш обґрунтованим є мультипольний формалізм до опису гальмівного випромінювання при α -розпаді. Він видає найбільш багату інформацію про кутовий розподіл випромінювання. При описі експериментальних даних випромінювання для α -розпаду (це дані [21, 59, 58] для ядер ^{210}Po , ^{214}Po і ^{226}Ra , дані [18] для ядра ^{244}Cm) цей підхід виявив себе як найбільш точний як при нормуванні розрахованих спектрів на експериментальні дані, так і без нормування у порівнянні з іншими підходами.
 - (a) Найкращий результат в описі експериментальних даних (без нормування на них) досягнуто для ядра ^{214}Po (з відповідними експериментальними даними [59]) у діапазоні енергій фотонів від 100 кеВ до 750 кеВ [див. Рис. 1.2 (а), $Q_\alpha = 7.865$ МеВ, кут $\vartheta_{\alpha\gamma}$ між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона дорівнює 90°].
 - (b) Абсолютні ймовірності випромінювання при α -розпаді ^{210}Po і ^{226}Ra для низьких енергій фотонів розташовані нижче експериментальних даних [21] і [58], але для фотонів вище 350 кеВ досягнуто гарної згоди між теорією й експериментом [див. Рис. 1.2 (б) і (в)].
 - (c) Отримано задовільненої згоди між розрахунками для ядра ^{244}Cm за мультипольною моделлю для кута $\vartheta_{\alpha\gamma} = 25^\circ$ і верхньою межею помилок експериментальних даних [18]. Такий результат дозволяє включити це ядро в аналіз, що не було зроблено теоретиками.

2. У дипольному підході випромінювання фотонів із внутрішньої області до бар'єра дає помітний внесок у спектр. Внесок випромінювання з цієї області за мультипольним підходом є меншим, тому мультипольний підхід менш чутливий до оцінок випромінювання із цієї області. Цю особливість можна пояснити більш акуратними розрахунками у зовнішній асимптотичній області за мультипольним підходом, де дипольний підхід обмежує цю область та підвищує збіжність при чисельному інтегруванні спектрів. Однак, більш акуратне використання далекої асимптотичної області при інтегруванні за мультипольним підходом забезпечує кращої відповідності розрахункових спектрів з експериментальними даними. Цей аспект дає мультипольному підходу силу пророкувань (тобто оцінок ймовірностей випромінювання у випадках, коли не існує експериментальних даних), на відміну від дипольного.
3. Вперше підтверджено гіпотезу про пояснення відмінності між двома наборами експериментальних даних [16] і [17] при α -розпаді ядра ^{210}Po на основі різних значень 25° і 90° кута $\vartheta_{\alpha\gamma}$ між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона, що було висунуто у дискусіях [19, 20] між двома конкуруючими групами у 2000 році. Мультипольна модель одночасно вдало описує ці різні експериментальні дані [16] і [17].
4. Вперше знайдено формулу ймовірності випромінювання при α -розпаді довільного ядра. У діапазоні від ^{106}Te до ядра із числами нуклонів $A_p = 266$ і протонів $Z_p = 109$ для фотона з енергією від 50 кеВ до 900 кеВ вона дає задовільну згоду зі спектрами мультипольної моделі¹. Однак, без нормування на експеримент ця формула значно точніше описує експеримент, у порівнянні з дипольним підходом (наприклад, див. [101]).

¹Час розрахунку спектра за мультипольною моделлю досягає 10 годин, тоді як час розрахунку спектра по даній формулі не перевищує декількох секунд на тім-же комп'ютері.

РОЗДІЛ 2

ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ ДЕФОРМОВАНИХ ЯДЕР

2.1. Вступ

Дослідження випромінювання гальмівних фотонів при альфа-розпаді (див. Розділ 1) не виявили чіткої форми спектрів випромінювання: у одних випадках у спектрах випромінювання проявляються мало помітні осциляції [59], інші дослідники знаходять у спектрах мінімум [17, 18], в інших експериментах [21, 101] не спостерігається ніякої немонотонної поведінки (що б могло указувати на існування якоїсь структури). Щоб зрозуміти особливості спектрів гальмівного випромінювання й описати їх досить точно, необхідно розробити відповідну модель, яка була б достатньо чутливою до характеристик α -розпаду з метою точніше описати процес тунелювання α -частинки через кулонівський бар'єр.

При порівнянні спектрів гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{214}Po і ^{226}Ra , що представлені у [58], можна побачити, що α -ядерні потенціали цих двох ядерних систем мають дуже близькі форми, але спектри випромінювання істотно відрізняються, що вказує на суттєво різний ступінь інтенсивності випромінювання при α -розпаді цих ядер. Пояснення такої відмінності у спектрах можна побачити у різних Q -значеннях α -розпаду для цих ядер. Але чи мають ці два ядра інші характеристики, які також помітно впливають на випромінювання фотонів? Q -значення для двох ядер дають суттєво різні області тунелювання їх бар'єрів. Можна припустити, що така відмінність приводить до суттєво різних внесків випромінювання з області тунелювання у повний спектр. Це було підтверджено експериментально у [58].

Крім того, можна припустити, що прискорення α -частинки найбільш велике в області максимального спаду потенціального бар'єра (і зміни градієнта потенціалу), і саме там α -частинка випромінює фотони найбільш інтенсивно — це і є ситуація, коли α -частинка “проходить” через область ядерної поверхні. Звідси, ми приходимо до іншої характеристики — деформації ядра. Тепер, якщо порівняти характеристики розпаду цих двох ядер, то знайдемо відмінність у деформації їх ядерної поверхні: тоді як ^{214}Po є практично сферичним ядром, ^{226}Ra виявляється дійсно деформованим ($\beta_2 = 0.151$)! Тепер з'являється питання: наскільки сильно деформація ядра впливає на спектр гальмівного випромінювання фотонів? Чи буде такий вплив взагалі непомітним у спектрах для деформованих ядер або воно виявиться сильним? Відзначимо, що таке питання ще ніколи не було поставлено та досліджено. Звичайно, у такому напрямку досліджень було б цікаво розглянути сильно деформовані ядра, і з'ясувати, наскільки сильно буде відрізнятися випромінювання фотонів з області ядерної поверхні для них. Але ми обмежені наявними на сьогоднішній день експериментальними даними, які дають у наше розпорядження лише одне ядро — ^{226}Ra .

Таким чином, ми приходимо до нової задачі у теорії: розробити новий формалізм, що дозволяє обчислювати ймовірності гальмівного випромінювання з урахуванням деформації ядра. Така модель повинна бути апробована розрахунками, порівняльними оцінками з експериментальними даними й результатами інших наявних підходів, повинна бути досягнута збіжність в одержанні ймовірностей випромінювання (щоб їх можна було вважати достовірними).

2.2. Ймовірність випромінювання при α -розпаді

Розглянемо основні положення моделі. Будемо визначати ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра на основі матричного елемента переходу складеної системи (α -частинка й дочірнє ядро) з її стану перед випромінюванням фотона (назвемо такий стан *початковим i -станом*) у її стан після випромінювання фотона (назвемо такий стан *кінцевим f -станом*). Можна визначити матричний елемент такого переходу системи й на його основі знайти ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді [позначимо її як $W(w)$]. Відповідно до (1)–(5) у [57] (також див. [56, 58, 59], однак k_f виключене), маємо

$$W(w) = N_0 w |p(w)|^2, \quad k_{i,f} = \sqrt{2m E_{i,f}}, \quad w = E_i - E_f, \quad (2.1)$$

де

$$p(w) = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \psi_i(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Тут N_0 — коефіцієнт нормування наших розрахункових спектрів на експериментальні дані (усі криві розрахунків будемо нормувати на одну точку, обрану при низьких енергіях випромінених фотонів), m — наведена маса системи, $E_{i,f}$ і $k_{i,f}$ — повна енергія й хвильовий вектор системи у початковому i -стані або у кінцевому f -стані (при виборі відповідного індексу i або f), $\psi_i(\mathbf{r})$ і $\psi_f(\mathbf{r})$ — хвильова функція системи в початковому i - та кінцевому f -станах, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — вектор поляризації випроміненого фотона, \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона, $w = k = |\mathbf{k}|$ — частота (енергія) фотона. У цьому розділі ми будемо використовувати систему одиниць, яка дає $\hbar = 1$ і $c = 1$, та кулонівське калібрування, при якому вектори поляризації $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для кожного фотона є перпендикулярними до його хвильового вектору \mathbf{k} . Позначення обрано відповідно до [56, 57, 58, 59]. Подібні вирази для ймовірності гальмівного випромінювання використовуються у роботах [42, 100, 123] з представленням хвильової

функції випроміненого фотона у *дипольному наближенні*.

2.2.1. Перехід до векторів кругової поляризації

Перепишемо вектори поляризації \mathbf{e}^α через вектори кругової поляризації $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ і $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ із протилежними напрямками обертання (див. [116], стор. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^1 - i\mathbf{e}^2), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^1 + i\mathbf{e}^2). \quad (2.3)$$

Підставляючи ці вирази у (2.2), одержимо

$$p(w) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \psi_i(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

де

$$h_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i), \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i), \quad h_{-1} + h_1 = -i\sqrt{2}. \quad (2.5)$$

2.2.2. Виділення кута між напрямком руху α -частинки й напрямком випромінювання фотона

Розглянемо вектори \mathbf{k} і \mathbf{r} . Вектор \mathbf{k} являє собою імпульс фотона, що вказує напрямок його випромінювання. Вектор \mathbf{r} — це радіус-вектор, що вказує положення α -частинки відносно центру мас дочірнього ядра, й (оскільки маса дочірнього ядра суттєво більше ніж маса α -частинки) також вказує напрямок її руху (або тунелювання). Тоді кут між векторами \mathbf{k} і \mathbf{r} (позначимо його як $\theta_{\alpha-\gamma}$) — це кут між напрямком $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ руху (або тунелювання) α -частинки й напрямком $\mathbf{n}_{ph} = \mathbf{k}/k$ випромінювання фотона. Можна записати [57]

$$\exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{r}\} = \exp\{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}\}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (2.6)$$

Звідси одержимо

$$p(w, \theta_{\alpha-\gamma}) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} r^2 dr \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \, d\Omega. \quad (2.7)$$

2.3. Деформований α -ядерний потенціал

Для опису взаємодії між α -частинкою та деформованим ядром оберемо потенціал

$$V(r, \theta_\beta, l, Q_\alpha) = v_C(r, \theta_\beta) + v_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha) + v_l(r), \quad (2.8)$$

де кулонівську $v_C(r, \theta_\beta)$, ядерну $v_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha)$ і відцентрову $v_l(r)$ компоненти ми визначимо відповідно до [112] [див. (6)–(10) у тій роботі] так:

$$v_C(r, \theta_\beta) = \begin{cases} \frac{2Ze^2}{r} \left(1 + \frac{3R^2}{5r^2} \beta_2 Y_{20}(\theta_\beta) \right), & \text{для } r \geq r_m, \\ \frac{2Ze^2}{r_m} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_m^2} + \frac{3R^2}{5r_m^2} \beta_2 Y_{20}(\theta_\beta) \left(2 - \frac{r^3}{r_m^3} \right) \right\}, & \text{для } r < r_m, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$v_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha) = \frac{V(A, Z, Q_\alpha)}{1 + \exp\left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\}}, \quad (2.10)$$

$$v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2}. \quad (2.11)$$

Параметри кулонівської та ядерної компонент визначимо, відповідно до [112] [див. (14), (16)–(19) у цій роботі]:

$$V(A, Z, Q_\alpha) = - (30.275 - 0.45838 Z/A^{1/3} + 58.270 I - 0.24244 Q_\alpha), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} R &= R_p (1 + 3.0909/R_p^2) + 0.1243 t, \\ R_p &= 1.24 A^{1/3} (1 + 1.646/A - 0.191 I), \\ t &= I - 0.4 A/(A + 200), \\ d &= 0.49290, \\ I &= (A - 2Z)/A. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Також відповідно до (21)–(22) у [112], маємо

$$r_m(\theta_\beta) = r_0 + R(\theta_\beta), \quad r_0 = 1.5268, \quad R(\theta_\beta) = R (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta_\beta)). \quad (2.14)$$

Тут A і Z — числа нуклонів і протонів у дочірньому ядрі; Q_α — Q -значення α -розпаду, R — радіус дочірнього ядра, $V(A, Z, Q_\alpha, \theta)$ — сила ядерної компоненти; r_m — ефективний радіус ядерної компоненти, d — параметр дифузності; $Y_{20}(\theta_\beta)$ — сферична гармонійна функція другого порядку, θ_β — кут між напрямком вильоту α -частинки й віссю аксіальної симетрії дочірнього ядра; β_2 — параметр квадрупольної деформації дочірнього ядра.

2.3.1. Розкладання ядерної компоненти за ступенями β_2

Будемо вважати, що параметр деформації β_2 є достатньо малим. Нам знадобиться розкладання ядерної компоненти за ступенями β_2 :

$$\begin{aligned}
 v_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha) = & V(A, Z, Q_\alpha) \cdot \left\{ \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-1} \Big|_{\beta_2=0} + \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-1} \Big|_{\beta_2=0} \beta_2 + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta_2^2} \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-1} \Big|_{\beta_2=0} \beta_2^2 + O(\beta_2^3) \right\}. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Враховуючи:

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-1} \Big|_{\beta_2=0} &= \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_0 - R}{d} \right\} \right)^{-1}, \\
 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-1} \Big|_{\beta_2=0} &= \\
 = \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \right)^{-2} \exp \left\{ \frac{r - r_m(\theta_\beta)}{d} \right\} \frac{1}{d} \cdot \frac{\partial r_m(\theta_\beta)}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_2=0} &= \\
 = \frac{1}{d} \cdot \left(1 + \exp \left\{ \frac{r - r_0 - R}{d} \right\} \right)^{-2} \exp \left\{ \frac{r - r_0 - R}{d} \right\} \cdot R Y_{20}(\theta_\beta), &
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

перепишемо знайдене розкладання (2.15) так:

$$v_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha) = V(A, Z, Q_\alpha) \cdot \left\{ v_{N0}(r) + v_{N1}(r) \cdot \beta_2 Y_{20}(\theta_\beta) + O(\beta_2^2) \right\}, \quad (2.17)$$

де

$$\begin{aligned}
 v_{N0}(r) &= \left(1 + \exp\left\{\frac{r - r_0 - R}{d}\right\}\right)^{-1}, \\
 v_{N1}(r) &= \frac{R}{d} \cdot \left(1 + \exp\left\{\frac{r - r_0 - R}{d}\right\}\right)^{-2} \exp\left\{\frac{r - r_0 - R}{d}\right\} = \\
 &= \frac{R}{d} v_{N0}^2(r) \exp\left\{\frac{r - r_0 - R}{d}\right\}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.3.2. Наближення сферично-симетричного α -розпаду

Для більшості важких ядер параметр деформації β_2 достатньо малий. Тому у першому наближенні можна застосувати наближення сферично-симетричного розпаду при визначенні α -ядерного потенціалу (2.8)–(2.13). Нам відомі хвильові функції у початковому та кінцевому станах. У сферично-симетричному наближенні ці хвильові функції можна розкласти на радіальну й кутову компоненти:

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(r, \theta, \phi) &= R_i(r) Y_{l_i m_i}(\theta, \phi) = \frac{\chi_i(r)}{r} Y_{l_i m_i}(\theta, \phi), \\
 \varphi_f(r, \theta, \phi) &= R_f(r) Y_{l_f m_f}(\theta, \phi) = \frac{\chi_f(r)}{r} Y_{l_f m_f}(\theta, \phi).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ми обчислюємо радіальну компоненту $\chi_{i,f}(r)$ чисельно на основі заданого α -ядерного потенціалу. Тут ми використовуємо наступні граничні умови: i -стан системи перед випромінюванням фотона являє собою чистий розпад, і тому для його опису ми використовуємо хвильову функцію для α -розпаду; після випромінювання фотона стан системи змінюється й логічніше використовувати хвильову функцію розсіювання α -частинки на дочірньому ядрі для опису f -стану. Отже, ми накладаємо наступні граничні умови на радіальні компоненти $\chi_{i,f}(r)$:

$$\begin{aligned}
 \text{початковий } i\text{-стан: } &\chi_i(r \rightarrow +\infty) \rightarrow G(r) + if(r), \\
 \text{кінцевий } f\text{-стан: } &\chi_f(r = 0) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

де F і G — кулонівські функції.

2.3.3. Врахування деформації ядра

Вважаючи, що деформації ядер можна коректно описувати на основі теорії збурень, ми застосуємо цю теорію до рішення нашої задачі. У такому підході, хвильову функцію, що вже враховує деформацію ядра, можна представити як добуток сферично-симетричної незбуреної хвильової функції $\psi_{\text{sph}, l_0 m_0}$ із числами l_0 і m_0 та радіальної і кутової корекцій $\Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r})$ і $\Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r})$ до незбуреної хвильової функції [див. (В.33) на стор. 432, Додаток В.1]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{sph}, l_0 m_0}(\mathbf{r}) + \Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) + \Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}). \quad (2.21)$$

Тобто, повна хвильова функцію деформованої α -розпадаючої системи розділяється на хвильову функцію системи сферично-симетричного α -розпаду, а також радіальну й кутову корекції до цієї хвильової функції, що враховують радіальну й кутову деформації ядерної системи при α -розпаді. На такій підставі, ми приходимо до такого ж представлення повного матричного елемента випромінювання [див. (В.47) на стор. 436, Додаток В.2]:

$$p(w) = p_{\text{sph}}(w) + \Delta_r p(w) + \Delta_\theta p(w), \quad (2.22)$$

де $p_{\text{sph}}(w)$ — матричний елемент сферично-симетричного α -розпаду (що вивчався у попередньому Розділі), $\Delta_r p(w)$ і $\Delta_\theta p(w)$ — корекції, що описують вплив деформації ядра на випромінювання та розраховуються у Додатку В.2. Повну ймовірність гальмівного випромінювання з точністю до $l = 1$ можна представити так [див. (В.70) на стор. 443, Додаток В.2]:

$$\begin{aligned} W_{l=1}(w, \beta_2) &= W_{l=0}(w) \left| 1 - N(w, \beta_2) \cos \theta_{\alpha-\gamma} \right|^2, \\ N(w, \beta_2) &= 3i \frac{J_1(w; 1) + \beta_2 J_2(w; 1)}{J_1(w; 0) + \beta_2 J_2(w; 0)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де $W_{l=0}(w)$ — сферично-симетричного розпаду, $N(w, \beta_2)$ — корекція, що враховує деформацію ядра у перших наближеннях.

2.4. Спектри випромінювання для деформованого ядра ^{226}Ra

Перше запитання, що повстає перед розробкою нового формалізму, що включає деформацію α -розпадаючого ядра у модель гальмівного випромінювання, — це наскільки суттєво деформація ядра впливає на спектр випромінювання (наскільки сильною вона може виявитися у спектрах, чи буде вона взагалі помітною). Інше, не менш важливе запитання стосується практичної реалізації підходу на комп'ютері: чи можливо взагалі одержати стабільні відхилення спектрів гальмівного випромінювання, викликані варіацією параметра квадрупольної деформації β_2 , що дозволило б зробити однозначні висновки про вплив деформації на спектр випромінювання.

Для виконання розрахунків ми виберемо ядро ^{226}Ra , яке має ненульове значення параметра квадрупольної деформації β_2 і його можна вважати деформованим. Щоб зробити перший крок у рішенні цієї задачі, ми будемо шукати лише першу істотну корекцію до хвильової функції — радіальну, яка містить інформацію про деформацію ядра. Ми обчислюємо ймовірність гальмівного випромінювання за формулою (2.23) та визначаємо два радіальні інтеграли $J_1(w; n)$ і $J_2(w; n)$ за формулами (В.64) (див. стор. 442). α -Ядерний потенціал визначається за формулами (2.8)–(2.11) з параметрами (2.12)–(2.14), узятими з роботи [58]. Q -значення α -розпаду для ^{226}Ra дорівнює 4.904 MeV (узяте з роботи [119], див. стор. 63, і також див. [58]). Параметр β_2 дорівнює 0.151 (узятий з [125]). Для ясності аналізу впливу деформації ядра на форму спектра гальмівного випромінювання ми виберемо значення кута $\theta_{\alpha-\gamma}$ між напрямком руху α -частинки (і її тунелювання під бар'єром) і напрямком випромінювання фотона рівним $90^\circ \pm 20^\circ$, оскільки такий кут відповідає геометричній конфігурації розташування детекторів в експерименті для даного ядра (з урахуванням кутової роздільної здатності

детекторів).

На Рис. 2.1 показані ймовірності випромінювання при α -розпаді ^{226}Ra при різних значеннях кута θ_β між напрямком руху α -частинки (і її тунелюванням під бар'єром) і напрямком осі аксіальної симетрії ядра та експериментальні дані [58]. З малюнку видно, що спектр при $\theta_\beta = 180^\circ$ (див. синю штрихову лінію 4), що співпадає зі спектром при $\theta_\beta = 0^\circ$, розташований трохи вище, ніж спектр при $\theta_\beta = 90^\circ$ (див. червону штрих-пунктирну лінію 3). На малюнку видна відмінність між цими спектрами у всьому діапазоні енергій фотонів, відмінність зростає з ростом енергії фотона E_γ і є стабільною у всьому діапазоні енергій випромінювання. На такій підставі можна запропонувати ідею, як оцінити деформацію ядра зі спектрів гальмівного випромінювання (ще ніколи раніше таких оцінок та міркувань не було проведено):

Слід порівнювати розрахункові спектри з експериментальними даними при максимально високих енергіях випроміненого фотона, де експериментальні помилки виявляються меншими у порівнянні з відмінністю між спектрами, отриманими при різних значеннях кута деформації.

Оскільки в експериментах [59, 58] не представляється можливим відфіксувати детектором α -частинок їх виліт відносно напрямку осі аксіальної симетрії ядра, то має сенс знайти ймовірність випромінювання, проінтегровану за значеннями кута деформації θ_β від 0 до π . Таку проінтегровану ймовірність показано на малюнку фіолетовою штрих-пунктирною лінією 5. Звідси видно, що ця крива виявляється розташованою ближче до експериментальних даних [58] при енергіях фотона вище $E_\gamma > 350$ кеВ, і тому поліпшує їх опис у порівнянні з результатами, отриманими при сферично-симетричному розгляді α -розпаду цього ядра (див. зелену штрих-двічі пунктирну лінію 2 на малюнку).

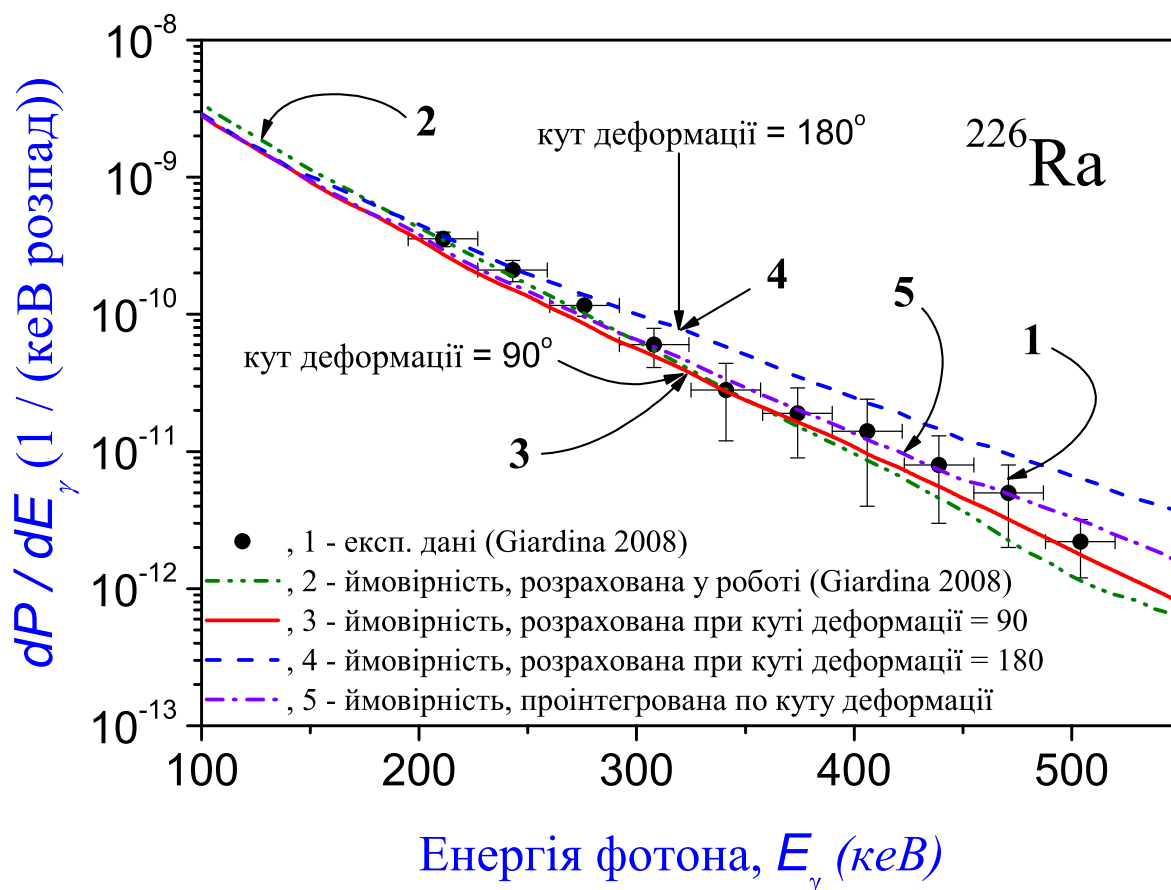


Рис.2.1 Ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{226}Ra [60]: дані 1 — експериментальні дані з роботи (Giardina 2008: [58]), зелена штрих-двічі пунктирна лінія 2 — ймовірність, отримана у роботі (Giardina 2008: [58]) у сферично симетричному наближенні α -розпаду (ледь помітне зниження цієї лінії у порівнянні із кривими 3–5 пов’язане з виключенням k_f у визначенні (2.1) для ймовірності випромінювання), суцільна лінія 3 — ймовірність, отримана при куті деформації $\theta_\beta = 90^\circ$, штрихова лінія 4 — ймовірність, обчислена при куті деформації $\theta_\beta = 180^\circ$, штрих-пунктирна лінія 5 — ймовірність, проінтегрована по всіх можливих значеннях кута θ_β .

2.5. Головні результати і висновки до Розділу 2

У Розділі викладено нову модель гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує α -розпад деформованих ядер. Цей підхід, уперше представлений у роботі [60], є подальшим розвитком моделі гальмівного випромінювання при сферично симетричному α -розпаді, що раніше було розроблено у роботах [56, 57, 58, 59]. Вперше отримано наступне.

1. Основи побудови нової моделі:

- (a) α -Ядерний потенціал визначено для деформованих ядер з урахуванням параметра квадрупольної деформації β_2 (параметри потенціалу взяті з роботи [112]). На його основі знайдено корекції до хвильової функції α -ядерної системи, що характеризують деформацію ядра.
- (b) На основі цих корекцій визначено повний матричний елемент випромінювання, який розділяється на незбурений матричний елемент (що характеризує випромінювання для сферично-симетричного α -розпаду), та його радіальну й кутову корекції.
- (c) В описі хвильової функції фотонів використано розкладання за сферичними хвилями.

2. Теоретичний аналіз показує:

- (a) Залежність ймовірності гальмівного випромінювання від параметра квадрупольної деформації β_2 має гармонічний вигляд [див. (2.23)].
- (b) Залежність ймовірності гальмівного випромінювання від кута $\theta_{\alpha-\gamma}$ між напрямком руху α -частинки (і її тунелювання в області бар'єра) і напрямком випромінювання фотона має гармонічний вигляд. У наближенні $\beta_2 \rightarrow 0$ ця залежність прямує до результатів, отриманих для сферично-симетричного α -розпаду у попередньому розділі (див. також (5)–(8) у [58]).

(с) Використовуючи розклад хвильової функції фотона за сферичними хвилями, випромінювання фотонів у першому наближенні $n = 0$ є сферично симетричним як для сферично симетричного α -розпаду, так і для деформованого. Включення наступної корекції при $n = 1$ вносить кутову анізотропію у спектр випромінювання [див. (2.23)].

3. Аналіз порівняння спектрів випромінювання, обчислених для деформованого ядра ^{226}Ra , з експериментальними даними [58] показує:

- (а) Формалізм деформації ядра, включений у модель, дозволяє обчислювати *стабільні* спектри випромінювання для різних значень кута θ_β між напрямком руху α -частинки й віссю аксіальної симетрії дочірнього ядра. Для ^{226}Ra ми одержуємо стабільну картину відмінності між ймовірностями для $\theta_\beta = 90^\circ$ і $\theta_\beta = 180^\circ$, які попадають в інтервали помилок експериментальних даних.
- (б) Ймовірність, проінтегрована по всіх можливих значеннях кута деформації θ_β , розташована трохи вище у порівнянні з ймовірністю, отриманою у наближенні сферично симетричного α -розпаду (тобто при $\beta_2 \rightarrow 0$). Це трохи покращує згоду між теорією й експериментом для ^{226}Ra , де ядро раніше розглядалося сферично симетричним.

Вивчення кутового гальмівного випромінювання при α -розпаді дає більш багату інформацію про процес (ніж аналіз періодів напіврозпаду, енергій вильоту α -частинок). Тому подальші експериментальні виміри спектрів гальмівного випромінювання в розпадах сильно деформованих ядер мають гарну перспективу. Така інформація найцінніша для ядер з максимально високими Q_α -значеннями розпаду (оскільки це максимально підвищує чутливість результатів до кута деформації й стабільність розрахунків).

РОЗДІЛ 3

ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ СПОНТАННОМУ ПОДІЛІ ЯДЕР

3.1. Вступ

Тоді як моделі розпадів ядер для визначення періодів напіврозпадів широко застосовують квазікласичне наближення в оцінках проникностей бар'єрів (наприклад, див. [112, 119, 117, 126]), то методи гальмівного випромінювання, що супроводжує такі розпади, не вимагають використання квазікласичних підходів. Ця перевага методів гальмівного випромінювання дає незалежний шлях до здобуття нової інформації про розпад. Однак, тут виникає запитання: яку саме нову інформацію про розпад дає аналіз гальмівного випромінювання?

Якщо ми порівняємо спектри гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{214}Po і ^{226}Ra , то побачимо істотну відмінність між ними [58]. Цей факт вказує на суттєво різну інтенсивність фотонів при α -розпаді цих двох ядер. Однак, форми α -ядерних потенціалів для цих ядер дуже близькі, що виглядає дивним, оскільки випромінювання фотонів при α -розпаді цих ядер сильно відрізняється. Пояснення дається різними Q -значеннями α -розпаду цих ядер (Q -значення α -розпаду пов'язується з нахилом спектра випромінювання). Різні Q -значення цих ядер формують різні області тунелювання. Це дає різні внески випромінювання з областей тунелювання у повні спектри. Можна поглибити пояснення, якщо припустити, що α -частинка випромінює фотони найбільш сильно при проходженні (пакета) ядерної поверхні. Отже, ми приходимо до іншої важливої характеристики — деформації ядра. Порівнюючи ці два ядра, ми знаходимо відмінність у деформації: тоді як ^{214}Po сферичне, то ^{226}Ra помітно деформоване. І дійсно, як було показано

у попередньому розділі, ймовірність випромінювання фотонів при α -розпаді змінюється залежно від напрямку вильоту α -частинки відносно осі орієнтації деформованого ядра. Чим більше деформація, тим сильніше змінюється випромінювання фотонів. Таким чином, ми встановлюємо взаємозв'язок між ядерною деформацією й спектром гальмівного випромінювання.

Однак, у дослідженнях у Розділі 2 не була врахована зміна поверхні ядерної системи у процесі поступового вильоту α -частинки з ядра. Як було показано у цій роботі, деформація ядра дійсно проявляється у розрахунках спектрів випромінювання. Але тоді можна дійти до висновку, що спектри випромінювання повинні бути чутливими до зміни ядерної поверхні у процесі розпаду. Отже, ми приходимо до прямого зв'язку між формою спектрів гальмівного випромінювання й динамікою розпаду. Але можна було б вивчити таке питання найбільш ясно в іншій задачі: гальмівне випромінювання фотонів, що супроводжує спонтанний поділ ядер. У такому процесі роль деформації ядерної поверхні проявляється значно сильніше й тому слід думати, що випромінювання фотонів повинне залежати від неї значно сильніше (ніж при α -розпаді).

3.2. Гальмівне випромінювання при α -розпаді: вплив деформації ядра на спектр випромінювання

Щоб краще зрозуміти взаємозв'язок між α -розпадом ядра й випромінюванням фотонів при такому розпаді, слід розібратися у питанні: саме які параметри α -розпаду впливають на спектр випромінювання сильно?

Розглянемо Рис. 3.1, на якому представлено результати експериментальних і теоретичних досліджень гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{210}Po і ^{214}Po [59]. Подивившись на цей малюнок, ми могли б бути здивовані: чому ці два настільки близькі ізотопи полонію (що мають близьку

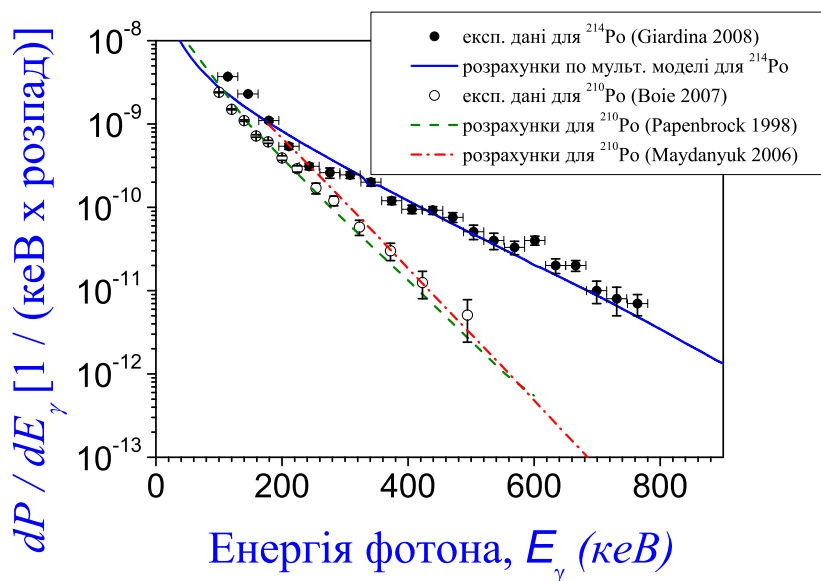


Рис.3.1 Розрахункові ймовірності гальмівного випромінювання, що супроводжує α -розпад ядер ^{214}Po і ^{210}Po , у порівнянні з експериментальними даними: суцільна синя лінія — спектр, розрахований для ^{214}Po в [59], штрихова зелена лінія — спектр, розрахований для ^{210}Po у дипольному підході (Parebrock 1998: [42]), штрих-пунктирна червона лінія — спектр, отриманий для ^{210}Po у (Maidanyuk 2006: [57]) (також у [59]), темні кружки — експериментальні дані (Giardina 2008: [59]) для ^{214}Po , світлі окружності — експериментальні дані (Boie 2007: [21]) для ^{210}Po .

форму α -ядерного потенціалу) мають настільки різні спектри випромінених фотонів? Відповідь виходить з аналізу параметрів α -розпаду: ці ядра мають суттєво різні Q -значення ($Q_\alpha = 5.34$ MeV для ^{210}Po і $Q_\alpha = 7.695$ MeV для ^{214}Po [58]). Однак, така настільки мала відмінність між Q -значеннями дає достатньо сильну відмінність між періодами напіврозпаду: $T_{1/2} = 1.2 \cdot 10^7$ сек для ^{210}Po і $T_{1/2} = 1.6 \cdot 10^{-4}$ сек для ^{214}Po ! Отже, ми встановлюємо взаємозв'язок між періодами напіврозпаду α -розпаду й нахилами спектрів гальмівного випромінювання, що супроводжує цей α -розпад. Тобто Q -значення відіграє вирішальну роль у процесі α -розпаду ядра й випромінюванні фотонів, і ми одержуємо першу відповідь на поставлене вище запитання: Q -значення має *прямий вплив на спектр випромінювання* (див. також роботу [122]).

Знайдемо інші параметри суттєвого впливу на випромінювання. *Припустимо, що випромінювання фотонів при тунелюванні α -частинки принципово відрізняється від випромінювання під час її надбар'єрного руху.* На

основі такого припущення, побудуємо таку логіку. Q -значення для цих ядер відрізняються, тому визначають різні області тунелювання. Ця відмінність дає різні внески випромінювання з областей тунелювання у спектри. Чим більше область тунелювання (чим менше Q -значення), тим інтенсивність випромінювання менше, тобто спектр сильніше спадає вниз (що підтверджено експериментально [58]). Отже, форма потенціалу в області тунелювання помітно впливає на спектр випромінювання. Але ця область включає також ядерну поверхню, де проявляються деформації. Зокрема, *градієнт потенціалу взаємодії між α -частинкою й ядром у такій області змінюється сильніше суттєво, ніж у області тунелювання, і тому він створює більш сильний вплив на інтенсивність випромінювання.* Звідси впливає ідея, що фотони випромінюються найбільш інтенсивно, коли α -частинка “перетинає” зовнішню межу бар’єру (тобто область біля зовнішньої точки повороту), значить випромінювання фотонів повинно бути чутливим до форми деформації ядра. Так, ми отримуємо наступну відповідь: *деформація α -розпадаючого ядра — це інший параметр, який впливає на спектр випромінювання.*

На Рис. 3.2 представлені спектри при α -розпаді ^{214}Po і ^{226}Ra і внески випромінювання з різних просторових областей для цих ядер [58]. α -Ядерні потенціали цих ядер близькі, але різні Q -значення дають суттєво різні області тунелювання: це пояснює більш інтенсивне випромінювання для ^{214}Po , що видно на малюнку. Чим більше енергія фотонів, тим рівень енергії α -розпадаючої системи нижче після випромінювання. Отже, при більш високих енергіях фотонів деформація ядра відіграє більш вагомую роль у матричному елементі випромінювання, і ми приходимо до наступного висновку: *деформація ядра сильніше проявляється у спектрах випромінювання при більш високих енергіях фотонів.* Повернемося до результатів для ядра ^{226}Ra у сферично симетричному наближенні [див. Рис. 3.2 (б)]. Можна бачити, що гарної згоди між теорією й експериментом отримано при малих енергіях фотонів,

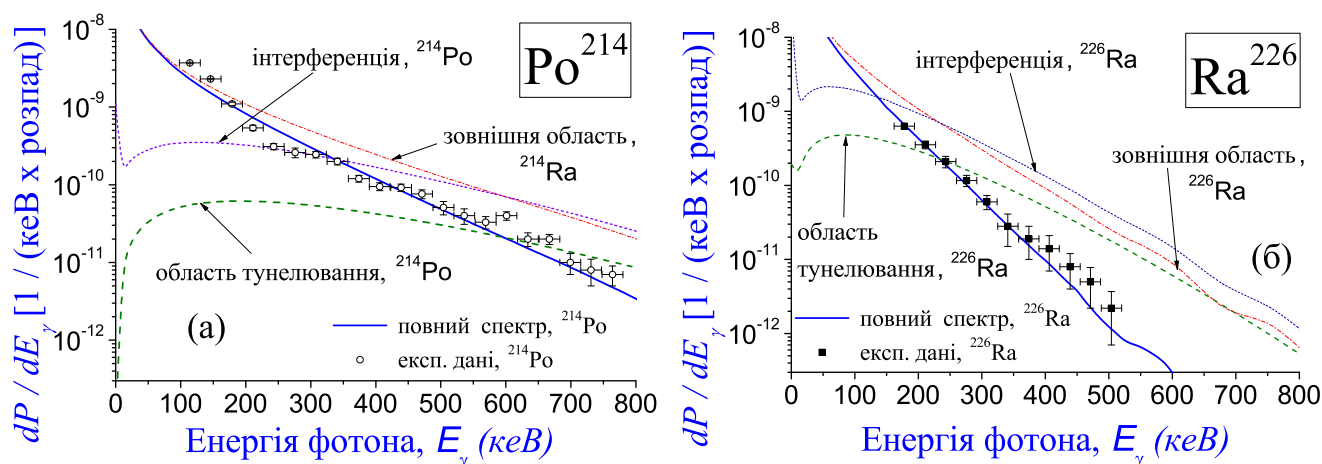


Рис.3.2 Внески фотонів при α -розпаді ядер ^{214}Po і ^{226}Ra , що випромінюються з області тунелювання (зелена штрихова лінія) і зовнішньої області (червона штрих-пунктирна лінія), а також інтерференція між цими внесками (пурпурна пунктирна лінія). Для обох ядер проявляється подібна поведінка внесків з областей тунелювання, зовнішніх областей і інтерференції відносно повного спектра. Сумарне випромінювання для ^{214}Po є більш інтенсивним.

але починаючи від 400 кеВ з'являється слабка невідповідність. Однак, на основі припущення вище можна очікувати, що включення деформації ядра у розрахунки поліпшить опис експериментальних даних при високих енергіях.

Розрахункові ймовірності випромінювання при α -розпаді ^{226}Ra (з урахуванням параметра квадрупольної деформації $\beta_2 = 0.151$) при різних значеннях кута між напрямками руху α -частинки й віссю аксіальної симетрії дочірнього ядра й експериментальні дані [58] показані на Рис. 3.3. Можна бачити, що спектр при куті 180° (див. синю штрихову лінію на малюнку, яка збігається з ймовірністю випромінювання при куті 0°) розташований трохи вище у порівнянні зі спектром при куті 90° (див. червону суцільну лінію на цьому малюнку) [60]. Якщо деформація є більш сильною, то випромінювання фотонів змінюється більш сильно також. Це встановлює взаємозв'язок між деформацією ядра й спектром гальмівного випромінювання. Враховуючи деформацію ядра ^{226}Ra , ми поліпшили згоду з експериментальними даними у порівнянні з попередніми результатами, отриманими у сферично симетричному розгляді розпаду цього ядра [58].

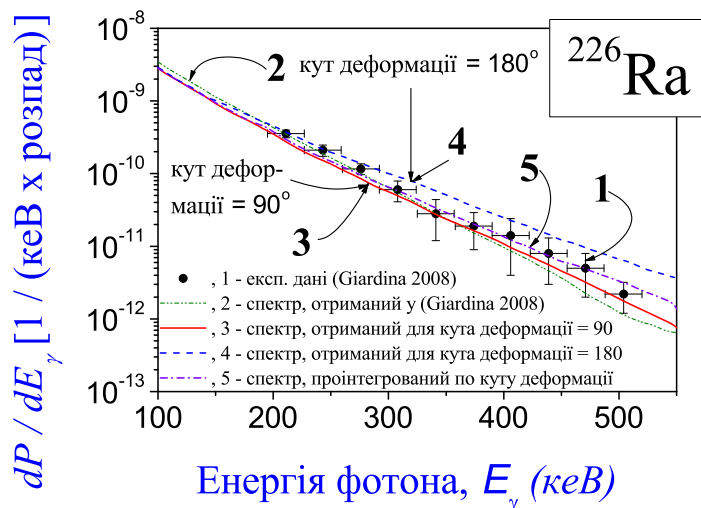


Рис.3.3 Ймовірності випромінювання фотонів при α -розпаді деформованого ядра ^{226}Ra [60]: експериментальні дані 1 узяті з роботи (Giardina 2008: [58]), зелена штрих-двічі пунктирна лінія 2 — ймовірність, отримана у [58] при сферично симетричному розгляді α -розпаду ($\beta_2 \rightarrow 0$), червона суцільна лінія 3 — ймовірність, розрахована у підході [60] при куті деформації $\theta_\alpha = 90^\circ$, синя штрихова лінія 4 — ймовірність, розрахована у підході [60] при куті деформації $\theta_\alpha = 180^\circ$, пурпурна штрих-пунктирна лінія 5 — ймовірність, проінтегрована по діапазону значень θ_α [60].

Однак, модель у роботі [60] не враховує можливості зміни поверхні α -ядерної системи при вильоті α -частинки назовні. Деформація ядра тут є статичною, тобто не змінюється для різних відстаней між центрами мас дочірнього ядра й α -частинки, тоді як саме ядро змінюється під час α -розпаду. Отже, поставимо наступне запитання: який інший тип розпаду можна обрати, де найсильніше проявиться деформація ядерної системи. Процес, де такі властивості включені у всій потужності, — це поділ ядра. Отже, ми приходимо до задачі гальмівного випромінювання фотонів при спонтанному поділі. Питання динамічної деформації ядерної системи у поділі включено природно.

3.3. Модель гальмівного випромінювання, яке супроводжує спонтанний поділ

3.3.1. Форма поверхні ядерної системи у процесі поділу

У теорії поділ ядра описується через безперервну послідовність поверхонь ядра, починаючи від його основного стану до поділу, включаючи послідовність конфігурацій і закінчуючи кінцевою стадією, при якій сформовано два окремі фрагменти, що знаходяться на далекій віддаленні друг від друга. В опис поверхонь ядерної системи слід включити сферу, сфероїд, октупольні деформації, позитивні й негативні гексадекапольні деформації. Оскільки багато питань у теорії поділу, пов'язаних з відхиленням деформації від аксіальної симетрії, не стосуються безпосередньо до визначення спектрів випромінювання фотонів, то ми почнемо з побудови формалізму випромінювання з описом поверхонь ядерної системи, що є аксіально симетричною.

Визначимо форму поверхні ядерної системи у термінах трьох квадратичних поверхонь, що гладко пов'язані між собою: два сфероїда, що поєднані через гіперболоїдальну шийку (див. Рис. 3 у [127]). Скористаємося рівнянням поверхні рідинної краплі у циліндричній системі координат [127]:

$$\rho^2 = \begin{cases} a_1^2 - (a_1^2/c_1^2) (z - l_1)^2 & \text{при } l_1 - c_1 \leq z \leq z_1, \\ a_2^2 - (a_2^2/c_2^2) (z - l_2)^2 & \text{при } z_2 \leq z \leq l_2 + c_2, \\ a_3^2 + (a_3^2/c_3^2) (z - l_3)^2 & \text{при } z_1 \leq z \leq z_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут величина l_i указує на положення центру i -ї квадратичної поверхні, c_i — її вісь симетрії, a_i — її піввісь у перпендикулярному напрямку ($i = 1, 2, 3$) (див. Рис. 3 у [127]). Таким чином, ми одержуємо дев'ять параметрів, які використовуються для повного визначення такої поверхні ядерної системи. Однак, дотримуючись формалізму, запропонованому Болстерлі (Bolsterli) та ін. у роботі [127], один параметр можна виключити, використовуючи вимогу збереження об'єму усієї системи постійним, а інші два — наклавши вимогу,

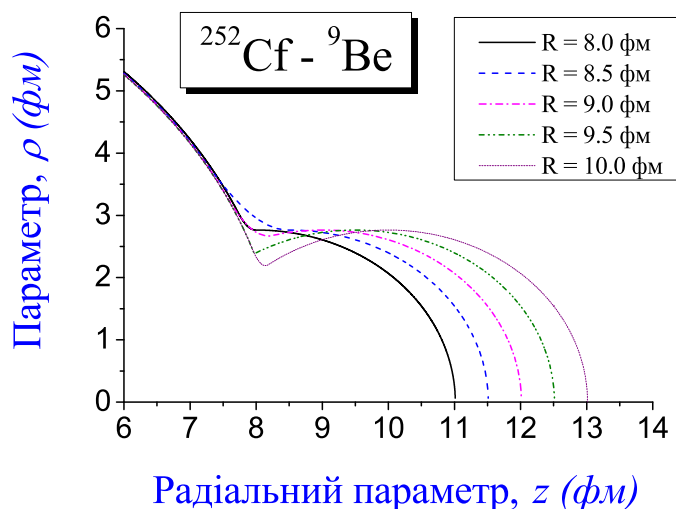


Рис.3.4 Форми поверхонь ядерної системи з вильотом легкого фрагмента ${}^9\text{Be}$, утворені при різних відстанях R між центрами цього фрагмента та остаточного ядра при поділі ядра ${}^{252}\text{Cf}$ [осі z і ρ визначені, відповідно до (3.1)].

що середня поверхня повинна бути гладко пов'язаною із зовнішніми поверхнями (у точках z_1 і z_2). Це накладає три додаткові зв'язки на дев'ять вільних ступенів свободи, що зводить число незалежних параметрів до шести.

Виключення положення центру мас з системи рівнянь зменшує число незалежних параметрів до п'яти. Для демонстрації застосування такої процедури до визначення поверхонь, на Рис. 3.4 показано поверхні для різних відстаней R між центрами легкого фрагмента ${}^9\text{Be}$ та остаточного ядра, сформованих при поділі ${}^{252}\text{Cf}$. Ми будемо визначати радіуси материнського ядра й фрагментів поділу, відповідно до роботи [128].

3.3.2. Потенціал взаємодії між фрагментами поділу

Після визначення рівняння ядерної поверхні тепер знайдемо потенціал взаємодії між фрагментами, центри мас яких знаходяться на заданій відстані. За кілька десятиліть було прикладено значних зусиль у побудові формалізму для визначення потенціальної енергії у задачі поділу, як функції від числа нейтронів, протонів і форми поверхні. Така процедура описує еволюцію поверхні ядерної системи безперервним образом, починаючи від форми мате-

ринського ядра, проходячи через стадії поступового зростання деформації й завершуючи кінцевою стадією з формуванням двох фрагментів і подальшим їхнім розльотом. Потенціал взаємодії між фрагментами можна записати так

$$V_{\text{total}}(\mathbf{r}) = V_C(\mathbf{r}) + V_N(\mathbf{r}) + V_{\text{so}}(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Кулонівська компонента $V_C(\mathbf{r})$ описує взаємодію між фрагментами на основі електромагнітних сил. Цю компоненту ми визначимо як енергію, що формується електромагнітно зарядженим середовищем, яке повністю заповнює об'єм ядерної системи, обмежений заданою поверхнею. Однак, ми будемо вважати, що енергія середовища усередині об'єму фрагмента визначається винятково взаємодіями розподілу електромагнітного заряду (нуклонів) у цьому фрагменті. Така енергія не пов'язана із взаємодією фрагмента із залишком середовища й, тому, вона не повинна давати власного внеску у кулонівську компоненту $V_C(\mathbf{r})$. Тому визначимо кулонівську компоненту як

$$V_C(\mathbf{r}) = E_{C, \text{nucleus}}(\mathbf{r}) - E_{C, \text{fragment}}, \quad (3.3)$$

де

$$E_{C, \text{nucleus}}(\mathbf{r}) = \lambda_C \int_{V, \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'} \frac{d\mathbf{r}'^3}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad E_{C, \text{fragment}} = \lambda_C \int_{V_f, r \neq 0} \frac{d\mathbf{r}^3}{|\mathbf{r}|}, \quad \lambda_C = \frac{Z_d Z_f e^2}{V_p} \quad (3.4)$$

і два інтеграли беруться по повному об'єму V системи поділу (відносно заданої відстані r між центрами фрагментів) і об'єму фрагмента V_f , відповідно (Z_d і Z_f — електричні заряди важкого і легкого фрагментів). На Рис. 3.5 (а) показані кулонівська компонента (3.3), отримана по фолдинг-процедурі (3.4), і кулонівська компонента, визначена у підході [112], з накладенням сферично симетричного наближення, обчислені для α -розпаду ядра ^{210}Po . Можна бачити, що два кулонівські потенціали дуже близькі один до одного.

Спіново-незалежну ядерну компоненту $V_N(\mathbf{r})$ ми визначимо як різницю між енергією повної ядерної системи $E_{N, \text{nucleus}}(\mathbf{r})$ (при заданій відстані

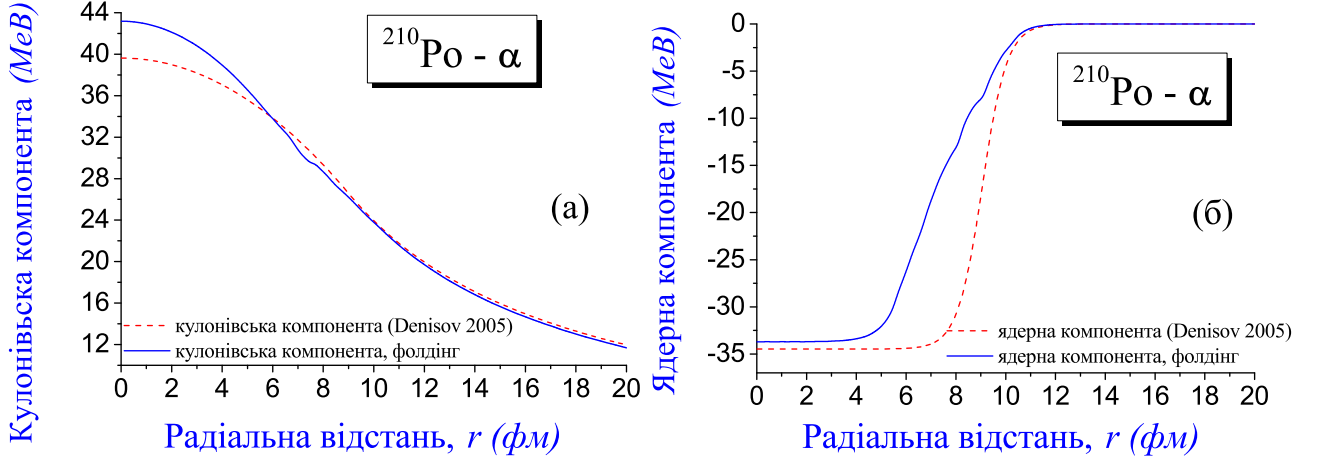


Рис.3.5 Потенціал, розрахований у фолдинг-підході, та сферично симетричний потенціал з параметрами, взятими з роботи (Denisov 2005: [112]), для α -розпаду сферично-симетричного ядра ^{210}Po : (а) — кулоновські компоненти, (б) — ядерні компоненти.

\mathbf{r} між центрами остаточного ядра й легкого фрагмента) і ядерною енергією фрагмента $E_{N, \text{fragment}}$ так:

$$V_N(\mathbf{r}) = E_{N, \text{nucleus}}(\mathbf{r}) - E_{N, \text{fragment}}, \quad (3.5)$$

де $E_{N, \text{nucleus}}$ і $E_{N, \text{fragment}}$ можна представити у такому вигляді:

$$E_{N, \text{nucleus}}(\mathbf{r}) = -\lambda_N \int_V \frac{d\mathbf{r}^3}{1 + \exp(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}, \quad E_{N, \text{fragment}} = -\lambda_N \int_{V_f} \frac{d\mathbf{r}^3}{1 + \exp(|\mathbf{r}|/a)}. \quad (3.6)$$

Перший інтеграл береться по об'єму V ядерної системи, другий — по об'єму важкого фрагмента V_f . $\lambda_N = M_p/V_p$, де V_p і M_p — об'єм і маса материнського ядра. Як виявилось, такий вибір параметра λ_N дає гарний збіг між ядерною компонентою по (3.5) при (3.6) і ядерною компонентою при параметризації з роботи [112] для α -розпаду. На Рис. 3.5 (б) видно, що ядерні компоненти для α -розпаду ^{210}Po [57, 59] близькі у нижній частині ями потенціалів. Спін-орбітальною компонентою $V_{so}(\mathbf{r})$ будемо нехтувати у розрахунках.

Для заданого потенціалу взаємодії у залежності від відстані між центрами фрагментів визначаємо хвильові функції. Нам потрібно знати Q -

значення для кожного фрагмента при поділі, яке визначаємо як

$$Q = M_p - M_d - M_f, \quad (3.7)$$

де M_p , M_d і M_f — маси материнського ядра, важкого та легкого фрагментів, які ми беремо з роботи [129, 130].

3.3.3. Модель гальмівного випромінювання, яке супроводжує розвал ядерної системи на два фрагменти

Ми визначимо ймовірність випромінювання гальмівних фотонів, що формуються при розльоті двох фрагментів під час поділу ядра на основі матричного елемента переходу складеної системи з її стану до випромінювання фотона (ми будемо називати такий стан *початковим i -станом*) у її стан після випромінювання фотона (будемо називати такий стан *кінцевим f -станом*). Відповідно до (1) і (4) у [57] (див. також роботи [59, 58, 56]), можна записати:

$$\frac{dP(w, \vartheta_{f\gamma})}{de_\gamma} = N_0 w |p(w, \vartheta_{f\gamma})|^2, \quad k_{i,f} = \sqrt{2m E_{i,f}}, \quad w = E_i - E_f, \quad (3.8)$$

$$p(w, \vartheta_{f\gamma}) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} r^2 dr \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-ikr \cos \vartheta_{f\gamma}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) d\Omega. \quad (3.9)$$

Тут вектор \mathbf{k} — імпульс фотона, що вказує напрямок його випромінювання, вектор \mathbf{r} — радіус-вектор, що вказує положення центру мас легкого фрагмента відносно центру мас важкого фрагмента, $\theta_{\alpha-\gamma}$ — кут між напрямком $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ руху (або тунелювання) легкого фрагмента і напрямком $\mathbf{n}_{ph} = \mathbf{k}/k$ випромінювання фотона, $k = |\mathbf{k}|$ і $r = |\mathbf{r}|$. $E_{i,f}$ і $k_{i,f}$ — повна енергія й хвильовий вектор системи у початковому i -стані (тобто стані до випромінювання фотона) або в кінцевому f -стані (тобто стані після випромінювання фотона), $\psi_i(\mathbf{r})$ і $\psi_f(\mathbf{r})$ — хвильові функції системи у початковому i - і кінцевому f - станах, $w = k = |\mathbf{k}|$ — частота (енергія) фотона, $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ і $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ — вектори

кругової поляризації із протилежними напрямками обертання. Ми використовуємо кулонівське калібрування, при якому вектори поляризації $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для кожного фотона перпендикулярні до його хвильового вектору \mathbf{k} . У цьому розділі ми будемо використовувати систему одиниць, при якій $\hbar = 1$ і $c = 1$. Такі позначення відповідні до формалізму [56, 57, 58, 59]. N_0 — коефіцієнт, що визначається як (див. роботу [61])

$$N_0 = \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{(2\pi)^4 m}, \quad (3.10)$$

де Z_{eff} і m — ефективний заряд і наведена маса складеної системи, де $Z_{\text{eff}} = (Z_f A_d - Z_d A_f) / (A_f + A_d)$ (індекс f або d позначає легкий або важкий фрагмент, відповідно).

У сферично симетричному наближенні ядра, що ділиться, матричний елемент (3.9) можна записати в такому вигляді:

$$p(w, \vartheta) = -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (-1)^l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \sum_{\mu=-1,1} h_\mu J_{m_f}(l, w), \quad (3.11)$$

$$h_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

Тут $J_{m_f}(l, w)$ — радіальний інтеграл, що не залежить від кута ϑ

$$J_{m_f}(l, w) = \int_0^{+\infty} r^2 R_f^*(r, E_f) \frac{\partial R_i(r, E_i)}{\partial r} j_l(kr) dr, \quad (3.12)$$

де $R_i(r)$ і $R_f(r)$ — радіальні компоненти хвильових функцій $\psi_i(\mathbf{r})$ і $\psi_f(\mathbf{r})$ системи у початковому i - і кінцевому f - станах, $j_l(kr)$ — сферична функція Беселя порядку l (див. Додаток А.2, стор. 384), $P_l(\theta)$ — поліном Лежандра порядку l (див. Додаток А.1, стор. 382). Для квантових чисел l і m маємо правила відбору:

$$\begin{aligned} i\text{-стан до випромінювання фотона:} & \quad l_i = 0, \quad m_i = 0; \\ f\text{-стан після випромінювання фотона:} & \quad l_f = 1, \quad m_f = -\mu = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Щоб обчислити спектри, слід знати хвильові функції у початковому й кінцевому станах. Радіальні компоненти $\chi_{i,f}(r)$ знаходяться чисельно, вирішуючи

рівняння Шредінгера для заданого потенціалу ($\chi_{i,f}(r) = r \cdot R_{i,f}(r)$) при граничних умовах: до випромінювання фотона ми маємо систему з вильотом фрагмента, тому хвильова функція системи у початковому i -стані відповідає розбіжній сферичній хвилі на нескінченності; після випромінювання фотона стан системи може змінитися (за рахунок випромінювання), тому більш зручно використовувати хвильову функцію розсіювання фрагмента на ядрі:

$$\begin{aligned} \text{початковий } i\text{-стан: } \chi_i(r \rightarrow +\infty) &\rightarrow G(r) + if(r), \\ \text{кінцевий } f\text{-стан: } \chi_f(r = 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де F і G — кулонівські функції.

3.3.4. Розрахунок радіальних інтегралів у далекій асимптотичній області й наближення провідної гармоніки

Важкі фрагменти, що формуються у поділі, та високі енергії фотонів вимагають ретельного врахування колосально більшої кількості осциляцій підінтегральних функцій, ніж у розрахунках спектрів випромінювання при α -розпаді [58, 60, 59, 57, 56]. Як виявилось, техніки й комп'ютерні коди, розроблені попередньо для визначення спектрів випромінювання при α -розпаді, що успішно себе виправдали у тій задачі, виявилися зовсім не працездатними для досягнення хочаб мінімальної задовільненої збіжності розрахунків спектрів випромінювання при поділі. Таким чином, перед нами встала серйозна проблема розрахунку спектрів випромінювання фотонів при поділі¹. Однак, було знайдено, що гарні збіжність та точність у розрахунках матричних елементів досягаються у зацікавлених областях мас фрагментів і енергій фотонів, якщо

¹Ця проблема є однією із ключових, чому за довгий період вивчення поділу ядер (більш ніж 50 років), де працювало багато дослідників, практично не було отримано оцінок спектрів гальмівного випромінювання у квантовому підході, у більш наближених підходах робіт дуже небагато. На перший погляд це дивно, оскільки вже давно існував добре розроблений формалізм оптичної моделі, розраховувалися спектри випромінювання для ядерних зіткнень, тому повинно було б накопичено багато теоретичного матеріалу й кодів для рішення задачі гальмівного випромінювання при поділі.

застосувати у асимптотичній області таку процедуру. Спочатку, слід розділити підінтегральну функцію у радіальному інтегралі на гармоніки. Потім, усі гармоніки слід проінтегрувати незалежно й, у завершенні, просумувати їх. Так, використовуючи вираз (3.12) для радіального інтеграла, у асимптотичній області (починаючи від значення R_{as}) ми маємо наступні хвильові функції α -розпадаючої системи у початковому i -стані й кінцевому f -стані:

$$\begin{aligned}\psi_i(\mathbf{r}) &= R_{i,l=0} Y_{00}(\mathbf{n}_r^i) = N_i \cdot \frac{G_{i,l=0}(r) + i F_{i,l=0}(r)}{r}, \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= R_{f,l=1} \sum_m Y_{1m_f}(\mathbf{n}_r^f) = \\ &= N_f \cdot \frac{A_f G_{f,l=1}(r) + B_f F_{f,l=1}(r)}{r} \sum_{m_f} Y_{1m_f}(\mathbf{n}_r^f),\end{aligned}\quad (3.15)$$

де $F(r)$ і $G(r)$ — кулонівські функції, і ми використовуємо таке нормування:

$$N_i = \sqrt{\frac{m}{k_i}}, \quad N_f = \frac{2}{\sqrt{A_f^2 + B_f^2}}. \quad (3.16)$$

Отже, асимптотичну частину інтеграла (3.12) можна записати у вигляді

$$J_{\text{as}}(n) = N_i N_f \int_{R_{\text{as}}} R_{\text{max}} [A_f G_f(r) + B_f F_f(r)] \cdot \frac{d}{dr} \frac{G_i(r) + i F_i(r)}{r} \cdot j_n(k_{\text{ph}} r) r dr. \quad (3.17)$$

У далекій асимптотичній області прийнято використовувати два різні представлення кулонівських функцій. Якщо для більш швидких розрахунків можна використовувати наступний їх вигляд:

$$F_{l,\eta}(r) = \sin \theta_{l,\eta}, \quad G_{l,\eta}(r) = \cos \theta_{l,\eta}, \quad \theta_{l,\eta}(\rho) = \rho - \eta \log(2\rho) - l\pi/2 + \sigma_l(\eta), \quad (3.18)$$

але для акуратних розрахунків краще скористатися наступним:

$$F_{l,\eta}(r) = g \cos \theta_{l,\eta} + f \sin \theta_{l,\eta}, \quad G_{l,\eta}(r) = f \cos \theta_{l,\eta} - g \sin \theta_{l,\eta}, \quad (3.19)$$

де функції f і g мають досить слабку залежність від змінної r і в першому наближенні їх вважають постійними.

На Рис. 3.6 (а) показана підінтегральна функція інтеграла (3.17).

Видно, що вигляд цієї функції надзвичайно складний. При ретельному ана-

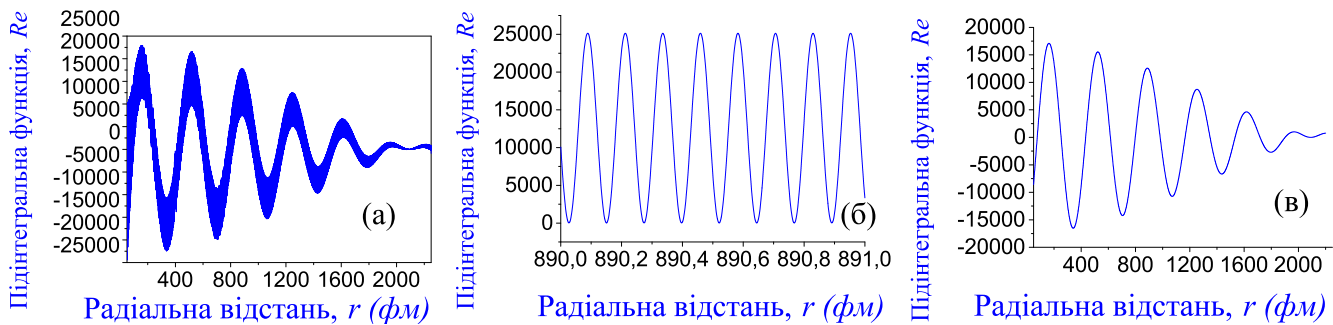


Рис.3.6 (а) Підінтегральна функція (її дійсна частина) для інтеграла (3.17) для ^{115}Rh , що вилітає при спонтанному поділі ^{252}Cf ; (б) Форма цієї функції у межах інтервалу 1 фм (від 890 до 891 фм): функція має 8 осциляцій; (в) Підінтегральна функція інтегралу (3.22), що являє собою провідну гармонічну основу підінтегральної функції оригінального інтеграла (3.17).

лізі відразу виявляється величезне число осциляцій, що мають гармонічну основу. На Рис. 3.6 (б) представлена форма цієї функції для радіального інтервала у межах 1 фм (тобто від 890 до 891 фм для фрагмента ^{115}Rh при енергії випроміненого фотона 300 кеВ). Функція має близько 8 осциляцій, тому в області від 25 до 2225 фм вона містить близько 17600 осциляцій!

Інтеграл (3.17) можна розділити на інтеграли з різними гармоніками:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{as}}(n) = & \frac{N_i N_f k_i}{2} \left\{ -(A_f - i B_f) J_1^+ - (A_f + i B_f) J_1^- + \right. \\
 & + i(A_f - i B_f) J_2^+ + i(A_f + i B_f) J_2^- \left. \right\} + \frac{N_i N_f (i - \eta_i)}{2} \times \\
 & \times \left\{ -(A_f - i B_f) J_3^+ - (A_f + i B_f) J_3^- + i(A_f - i B_f) J_4^+ + i(A_f + i B_f) J_4^- \right\},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

де

$$\begin{aligned}
 J_1^\pm(n) &= \int_{R_{\text{as}}}^{R_{\text{max}}} \sin(\theta_i \pm \theta_f) j_n(k_{\text{ph}} r) dr, & J_2^\pm(n) &= \int_{R_{\text{as}}}^{R_{\text{max}}} \cos(\theta_i \pm \theta_f) j_n(k_{\text{ph}} r) dr, \\
 J_3^\pm(n) &= \int_{R_{\text{as}}}^{R_{\text{max}}} \sin(\theta_i \pm \theta_f) \frac{j_n(k_{\text{ph}} r)}{r} dr, & J_4^\pm(n) &= \int_{R_{\text{as}}}^{R_{\text{max}}} \cos(\theta_i \pm \theta_f) \frac{j_n(k_{\text{ph}} r)}{r} dr.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Щоб з'ясувати, у яких інтегралах підінтегральна функція має найбільший період осциляцій, слід шукати гармоніки з найменшим аргументом, тобто ми отримаємо $\theta_i - \theta_f$ і невідомі інтеграли J_1^- , J_2^- , J_3^- , J_4^- . Підінтегральні функції у J_3^- і J_4^- убувають більш сильно зі зростанням r у порівнянні з функціями у J_1^- і J_2^- . Отже, J_3^- і J_4^- дають менший внесок у повний інтеграл (3.20). Тому формула (3.20) може бути переписана як

$$J_{\text{as}}^-(n) \cong \frac{N_i N_f k_i}{2} \cdot (A_f + i B_f) \cdot \left\{ -J_1^-(n) + i J_2^-(n) \right\}. \quad (3.22)$$

На Рис. 3.6 (в) показана підінтегральна функція у інтегралі. З її порівняння з підінтегральною функцією повного інтеграла на Рис. 3.6 (а) можна переконатися в тому, що ця підінтегральна функція від J_{as}^- несе у собі основну тенденцію оригінальної функції, але вона вже очищена від величезного числа осциляцій! Отже, інтеграл (3.22) — найбільш вдале наближення попереднього інтеграла. Назвемо такий підхід *наближенням провідної гармоніки*.

Зокрема, усередині області від 25 до 2225 фм існує тільки 6 осциляцій для основного інтеграла $J_{\text{as}}^-(0)$, у порівнянні з 17600 осциляціями, які містить попередній інтеграл $J_{\text{as}}(0)$! Наступні два інтеграли J_3^+ і J_4^+ являють собою залишок від неврахованих осциляцій. Тому знайдемо інтеграл

$$J_{\text{as}}^+(n) \cong \frac{N_i N_f k_i}{2} \cdot (A_f - i B_f) \cdot \left\{ -J_1^+(n) + i J_2^+(n) \right\}. \quad (3.23)$$

З метою врахувати корекцію, запишемо

$$J_{\text{as}}(r)(n) \cong \frac{N_i N_f k_i}{2} \left[(A_f + i B_f) \left\{ -J_3^-(n) + i J_4^-(n) \right\} + (A_f - i B_f) \left\{ -J_3^+(n) + i J_4^+(n) \right\} \right]. \quad (3.24)$$

Звичайно, сума інтегралів дає точно інтеграл (3.20). Розрахунки спектрів випромінювання для різних важких фрагментів показали, що корекція при включенні $J_{\text{as}}^+(n)$ і $J_{\text{as}}(r)(n)$ дуже мала. Тому наближення провідної гармоніки дає досить гарну точність при визначенні спектрів.

Щоб включити внесок випромінювання з області при $r > R_{\max}$ у розрахунки спектру, то слід удосконалити техніку визначення радіального інтеграла. Можна скористатися наближеними формулами:

$$\begin{aligned} \int_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\cos \alpha r dr}{r} &= \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} \Big|_{R_{\max}}^{+\infty} + \int_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha r dr}{\alpha r^2} \simeq -\frac{\sin \alpha R_{\max}}{\alpha R_{\max}} + O(R_{\max}^{-2}), \\ \int_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha r dr}{r} &= -\frac{\cos \alpha r}{\alpha r} \Big|_{R_{\max}}^{+\infty} - \int_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\cos \alpha r dr}{\alpha r^2} \simeq \frac{\cos \alpha R_{\max}}{\alpha R_{\max}} + O(R_{\max}^{-2}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

які мають точність до R_{\max}^{-2} . Для першого $n = 0$ ми одержуємо

$$\begin{aligned} J_{1, \text{rest}}^-(0) &\simeq \frac{N_i N_f k_i}{4 k_{\text{ph}}} \left[(A_f + i B_f) \frac{\sin(\theta_i - \theta_f - k_{\text{ph}} r)}{(k_i - k_f - k_{\text{ph}}) r} - \right. \\ &- (A_f + i B_f) \frac{\sin(\theta_i - \theta_f + k_{\text{ph}} r)}{(k_i - k_f + k_{\text{ph}}) r} + (B_f - i A_f) \frac{\cos(\theta_i - \theta_f - k_{\text{ph}} r)}{(k_i - k_f - k_{\text{ph}}) r} - \\ &\left. - (B_f - i A_f) \frac{\cos(\theta_i - \theta_f + k_{\text{ph}} r)}{(k_i - k_f + k_{\text{ph}}) r} \right] \Big|_{r=R_{\max}} + O(R_{\max}^{-2}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Так можна отримати інтеграли при наступних значеннях n . Однак, оцінки виявили малу роль таких інтегралів $J_{i, \text{rest}}^{\pm}(n)$, якщо провідний інтеграл J_{as}^- визначати за формулою (3.22), де коректно обирати значення R_{\max} .

3.4. Випромінювання фотонів, що формується легкими та середніми фрагментами при поділі ^{252}Cf

Перед тим, як виконувати складні розрахунки спектрів фотонів при поділі ^{252}Cf , спочатку отримаємо більш легкі оцінки: знайдемо випромінювання фотонів від вильоту легкого фрагмента з довільними масовим і зарядовим числами A і Z при поділі. Розподіл Q -значень для фрагментів з масовими числами від $A = 4$ до $A = 125$ показано на Рис. 3.7, які приймають участь у поділі ядра ^{252}Cf . Кожний фрагменти формує власне випромінювання, тому зрозуміло, що визначення сумарного спектра при поділі є складною задачею.

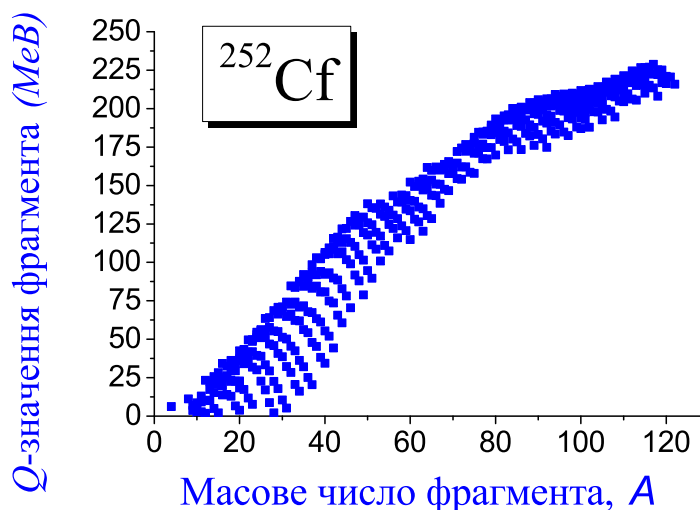


Рис.3.7 Розподіл Q -значень фрагментів відносно їх масового числа A , що беруть участь у процесі спонтанного поділу ^{252}Cf (показано більш ніж 2000 фрагментів).

По перш, виберемо такий легкий фрагмент та знайдемо спектр фотонів, для яких ця теорія добре перевірена. Так, для α -частинки маємо добре вивчений α -розпад та відповідну гарну модель (див. Розділи 1 та 2, роботи [59, 58, 56, 57, 60]). Отже, почнемо розрахунки з вильоту α -частинки з ^{252}Cf .

На Рис. 3.8 (а) показано спектри, отримані при $\vartheta = 90^\circ$ і $l = 0$. Для порівняння, у малюнок включено результати [58] для α -розпаду ядер ^{214}Po і ^{226}Ra . На Рис. 3.8 (б) показано спектри фотонів при вильоті фрагментів середньої маси ^9Be , ^{12}C і ^{24}Mg у порівнянні зі спектром фотонів при α -розпаді того ж ядра. Видно, що ймовірності випромінювання вище для важких фрагментів, які мають більш великі Q -значення й ефективні заряди. Для вильоту ^9Be з ядра ^{252}Cf ймовірність випромінювання менше ніж для вильоту α -частинки. Це пояснюється близькими величинами Q -значення й ефективного заряду [$Q(^9\text{Be}) = 6.927$ MeV, $Q(^4\text{He}) = 6.217$ MeV, і $Z_{\text{eff}}(^9\text{Be}) = 0.5$, $Z_{\text{eff}}(^4\text{He}) = 0.444$], тоді як бар'єр і область тунелювання суттєво більше. Ця умова для ^9Be зменшує випромінювання фотонів у порівнянні з випромінюванням від α -частинки. Для важкого фрагмента ^{24}Mg ймовірність випромінювання більше, ніж для легших фрагментів.

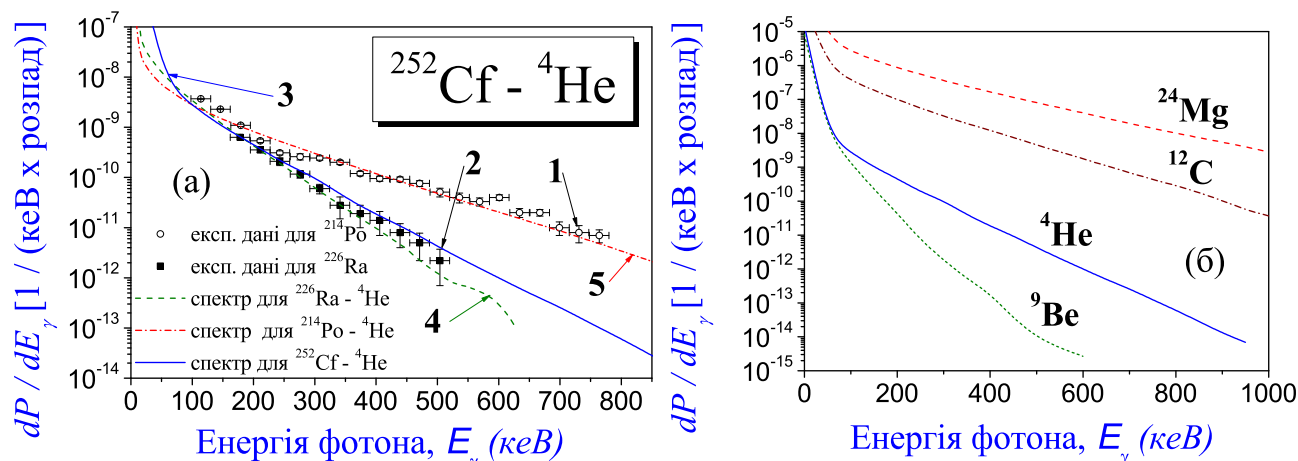


Рис.3.8 Ймовірності випромінювання для легких і середніх фрагментів, що вилітають у поділі ^{252}Cf : спектр при вильоті α -частинки з ^{252}Cf (суцільна лінія, $Q = 6.217$ MeV) у порівнянні зі спектрами при α -розпаді ^{214}Po (штрихова лінія, $Q = 7.7$ MeV) і ^{226}Ra (штрих-пунктирна лінія, $Q = 4.8$ MeV) [58] (а); спектри від вильоту фрагментів ^9Be (пунктирна лінія, $Q = 6.927$ MeV), ^{12}C (штрих-пунктирна лінія, $Q = 23.318$ MeV) і ^{24}Mg (штрихова лінія, $Q = 54.583$ MeV) з ядра ^{252}Cf у порівнянні зі спектром від α -частинки (суцільна лінія, $Q = 6.217$ MeV) з того-ж ядра ^{252}Cf (б).

3.5. Випромінювання, що формується важкими фрагментами, і повний спектр випромінювання при спонтанному поділі ^{252}Cf

Розрахунки ймовірностей випромінювання фотонів при вильоті важких ядер є найбільш складними. Фрагменти з важкими масами мають найбільш великі Q -значення. Щоб досягти стабільності у розрахунках, необхідно врахувати колосальне число осциляцій підінтегральної функції при інтегруванні інтегралів, що визначають матричний елемент випромінювання. Високі енергії фотонів (слід врахувати діапазон від сотень кеВ до десятків і навіть сотень МеВ) значно ускладнюють ці труднощі при визначенні достовірних спектрів. Але, після інтегрування в асимптотичній області за формулою (3.18), вдається досягти збіжності обчислень і одержати стійкі спектри ймовірностей випромінювання для окремих важких фрагментів. Результати таких розрахунків для фрагментів в області мас $A = 95 - 115$ показано на Рис. 3.9.

Щоб знайти повний спектр фотонів при спонтанному поділі ^{252}Cf , слід виконати усереднення за всіма ймовірностями випромінювання від окремих фрагментів. Внесок випромінювання фотонів при вильоті кожного фрагменту у спектр визначається через ймовірність проходження поділу з вильотом такого фрагменту. Визначимо ймовірність випромінювання фотонів як

$$\frac{dP(w, \vartheta)}{de_\gamma} = \sum_i a_i \frac{dP_i(w, \vartheta)}{de_\gamma} \quad \left(\text{за умови} \quad \sum_i a_i = 1 \right), \quad (3.27)$$

де a_i — вагова амплітуда вильоту фрагмента з масовим номером i , підсумовування виконується у межах усієї області мас. Щоб визначити амплітуди для фрагментів, скористаємося інформацією про розподіл мас фрагментів при поділі ^{252}Cf у роботі [131] у порівнянні з експериментальними даними [132]. Оскільки основний внесок у поділ несуть фрагменти у масовому діапазоні 95–115 (остаточне ядро попадає у масовий діапазон 137–157), то при розрахунках сумарної ймовірності випромінювання обмежимося саме цими значеннями мас. Так, на Рис. 3.9 (а) показано ймовірності випромінювання фотонів при спонтанному поділі ^{252}Cf від вильоту 7 фрагментів (від ^{95}Zr до ^{115}Rh). Окремі внески випромінювання у спектр виявляються чутливими до ефективного заряду й Q -значення кожного фрагмента. На Рис. 3.9 (б) показано повну ймовірність фотонів, що отримано за такою процедурою усереднення (3.27).

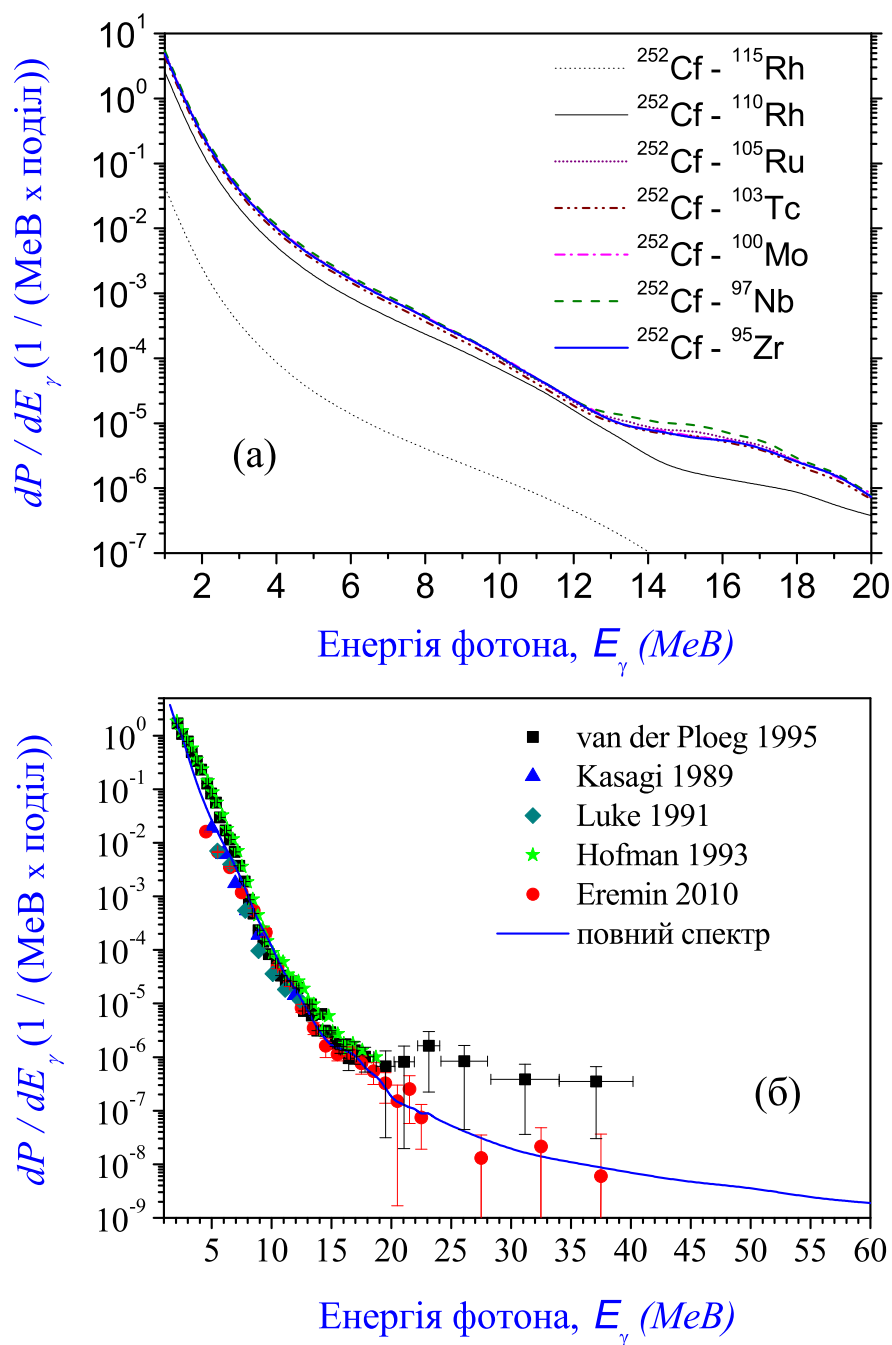


Рис.3.9 (а) Ймовірності гальмівного випромінювання фотонів, що формується при вильоті важких фрагментів при спонтанному поділі ядра ^{252}Cf , коли легкий фрагмент знаходиться у масовому діапазоні від $A = 95$ до $A = 115$ (суцільна лінія — для легкого фрагмента ^{95}Zr : $Q = 202.36$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 3.055$; штрихова лінія — для ^{97}Nb : $Q = 200.43$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 3.277$; пунктирна лінія — для ^{100}Mo : $Q = 204.81$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 3.111$; штрих-пунктирна лінія — для ^{103}Tc : $Q = 204.47$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 2.944$; штрих-двічі пунктирна лінія — для ^{105}Ru : $Q = 205.22$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 3.166$; коротка штрихова лінія — для ^{110}Rh : $Q = 214.53$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 2.222$; коротка пунктирна лінія — для ^{115}Rh : $Q = 226.74$ MeV, $Z_{\text{eff}} = 0.277$). (б) Повна (сумарна) ймовірність гальмівного випромінювання фотонів при спонтанному поділі ядра ^{252}Cf : теоретичний спектр (суцільна лінія), отриманий на основі усереднення внесків випромінювання від усіх фрагментів, розглянутих на попередньому малюнку; експериментальні дані (квадрати — з роботи [12], трикутники — з роботи [8], ромби — з роботи [9] and зірочки — з роботи [11], кола — з роботи [14]).

3.6. Головні результати і висновки до Розділу 3

У розділі сформульовано нову модель гальмівного випромінювання фотонів, яке супроводжує спонтанний поділ ядер [63]. Ця модель уперше була представлена у роботах [63, 86], та вона є подальшим розвитком теорії гальмівного випромінювання в ядерних реакціях [57, 58, 60, 59]. При визначенні хвильової функції фотонів застосовується розкладання за сферичними хвилями (див. також [84]). Для практичних розрахунків було обране ядро ^{252}Cf . Результати обчислень порівнюються з існуючими у літературі експериментальними даними [12, 7, 8, 9, 13] по вимірах ймовірностей гальмівного випромінювання фотонів при спонтанному поділі ^{252}Cf . Результати по визначенню спектрів випромінювання фотонів високих енергій при спонтанному поділі ^{252}Cf по цій моделі виявляються у гарній згоді з цими експериментальними даними. Оцінено внески випромінювання фотонів, що виникає при вильоті легких, середніх і важких фрагментів, що формуються при поділі ^{252}Cf . Спостерігається взаємозв'язок між внесками випромінювання від кожного окремого фрагмента і його Q -значенням та ефективним зарядом, які визначають хвильову функцію системи поділу й ймовірність гальмівного випромінювання. При визначенні хвильових функцій побудовано потенціал взаємодії між фрагментом з довільним масовим і зарядовим числами та залишковим ядром на основі стандартної фолдинг-процедури. Одну з головних труднощів при рішенні задачі являє собою розрахунок радіальних інтегралів, які формують матричний елемент випромінювання. Із цією метою, розроблено нову процедуру, яка дозволяє суттєво підвищити точність обчислень радіального інтеграла у далекій асимптотичній області (див. Розділ 3.3.4). Ця процедура виявилася ключовим пунктом, що відкриває можливість уперше вивчати випромінювання гальмівних фотонів у задачі поділу у повністю квантовому підході. Її було названо *наближенням провідної гармоніки* [63].

РОЗДІЛ 4

ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ, ЩО СУПРОВОДЖУЄ ПОТРІЙНИЙ ПОДІЛ ЯДРА ^{252}Cf

4.1. Вступ

Ядерний поділ з додатковим вильотом легких ядерних фрагментів [що має назву *потрійного поділу (ternary fission)*] вже достатньо широко досліджується [133, 134, 135, 136, 137]. Інтерес до такого процесу пов'язаний з отриманням нової додаткової інформації про геометрію та динаміку поділу. Вивчення гальмівного випромінювання фотонів, яке супроводжує потрійний поділ, відкриває нові та більш багаті можливості у зрозумінні такого процесу. Таке питання ще ніколи раніше не було досліджено. У даному Розділі викладено новий підхід до опису гальмівного випромінювання у потрійному поділі [87]. Для розрахунків та аналізу обрано ядро ^{252}Cf .

4.2. Модель для опису гальмівного випромінювання при потрійному поділі ядра

З метою узагальнити модель, розглянуту вище, для опису випромінювання гальмівних фотонів при потрійному поділі, сформулюємо основні пункти, які потрібно реалізувати. Слід зробити наступне:

1. Визначити геометрію поверхні ядерної системи у процесі потрійного поділу;
2. Визначити та розрахувати потенціал взаємодії між α -частинкою та двома фрагментами, на які розпадається остаточне ядро;

3. Розрахувати матричний елемент випромінювання фотонів, з врахуванням відносного руху двох фрагментів від остаточного ядра;
4. Отримати спектри випромінювання, які повинні бути без розбіжностей (тобто стабільні) як для легких, так і для важких фрагментів від остаточного ядра, для різних геометрій поділу.

4.2.1. Геометрія поділу ядерної системи та потенціал взаємодії

На першому етапі ми визначаємо геометрію поверхні ядра, яка ділиться на три уламки (фрагменти), один з яких є α -частинкою. Далі ми будемо називати остаточне ядро як *бінарну ядерну систему* (або *бінарне ядро*), з метою підкреслити його розпад на два ядерні фрагменти. На Рис. 4.1 (а) показано параметри, які ми використовуємо для визначення поверхні ядра.

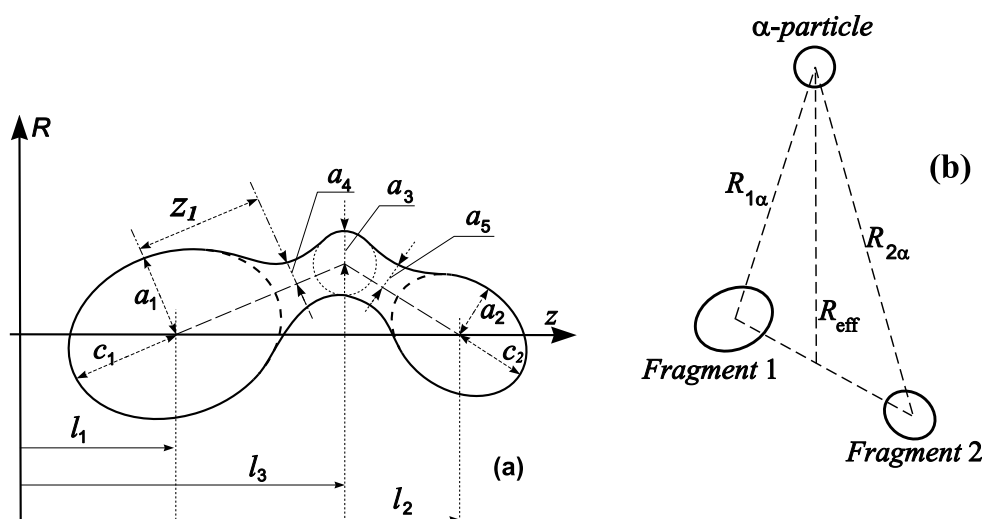


Рис.4.1 Геометрія форми ядерної системи при потрійному поділі: (а) розділення ядра на три уламки (фрагменти); (б) перехід до фіктивного заряду Z_{eff} на великих відстанях.

Використовуючи визначену таким чином поверхню поділу ядра, ми обчислюємо потенціал взаємодії між α -частинкою та бінарною ядерною системою. Тут ми використовуємо стандартну фолдинг-процедуру. У результаті новий потенціал V_{total} вже має залежність від геометрії відносного положення двох фрагментів та α -частинки. Але у якості основного параметра, нас буде цікавити відносна відстань R_{12} між центрами мас двох фрагментів. Таким

чином, ми записуємо повний потенціал як

$$V_{\text{total}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) = V_{\text{N}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) + V_{\text{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) + V_{\text{so}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}), \quad (4.1)$$

де ядерна компонента $V_{\text{N}}(\mathbf{r})$ та кулонівська компонента $V_{\text{C}}(\mathbf{r})$ мають вигляд

$$\begin{aligned} V_{\text{N}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) &= V_{\text{N, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) - E_{\text{N, fragment}}, \\ V_{\text{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) &= V_{\text{C, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) - E_{\text{C, fragment}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тут, $V_{\text{N, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12})$ та $V_{\text{C, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12})$ — ядерна та кулонівська енергії повної остаточної ядерної системи після поділу, $E_{\text{N, fragment}}(\mathbf{r})$ та $E_{\text{C, fragment}}(\mathbf{r})$ — ядерна та кулонівська енергії відокремлених фрагментів, що визначаються так:

$$\begin{aligned} V_{\text{N, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) &= -\lambda_{\text{N}} \int_{V(\mathbf{R}_{12})} \frac{\mathbf{dr}^3}{1 + \exp(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \\ E_{\text{N, fragment}} &= -\lambda_{\text{N}} \int_V \frac{\mathbf{dr}^3}{1 + \exp(\mathbf{r})}, \\ V_{\text{C, nucleus}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{12}) &= \lambda_{\text{C}} \int_{V(\mathbf{R}_{12}), \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'} \frac{\mathbf{dr}'^3}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \\ E_{\text{C, fragment}} &= \lambda_{\text{C}} \int_{V, r \neq 0} \frac{\mathbf{dr}^3}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2.2. Розрахунки кулонівської компоненти потенціалу на великих відстанях

За допомогою процедури, описаної вище, можна обчислити хвильові функції та ймовірності гальмівного випромінювання. Однак у практичній реалізації такого напрямку вирішення задачі ми зустрілися зі наступною проблемою: *час розрахунку спектрів на основі фолдинг-процедури виявляється дуже великим, та складно досягти збіжності у розрахунках і отримати стабільні значення спектрів.* Це можна пояснити тим, що для досягнення збіжності нам необхідно отримати хвильові функції з достатньо гарною точністю на

просторових відстанях, починаючи від немалих значень фолдинг-потенціалу та акуратно враховуючи достатньо далекі асимптотичні відстані від ядра.

З цієї причини, з метою знайти кулонівську компоненту потенціалу взаємодії на далеких відстанях, ми замінемо два фрагменти (що знаходяться на відстанях $\mathbf{R}_{1\alpha}$ та $\mathbf{R}_{2\alpha}$ відносно α -частинки) на новий ефективний фрагмент, який має заряд Z_{eff} , знаходиться від α -частинки на відстані \mathbf{R}_{eff} , та має такий саме вплив на α -частинку, як і два оригінальних фрагменти [див. Рис. 4.1 (б), тут у якості змінної \mathbf{r} у формулах (4.1)–(4.3) ми використовуємо \mathbf{R}_{eff} , та фіксуємо кутову геометрію]. Ми визначаємо такий ефективний заряд з наступної умови:

$$Z_{\text{eff}}(R_{\text{eff}}) = R_{\text{eff}} \left\{ \frac{Z_1}{R_{1\alpha}} + \frac{Z_2}{R_{2\alpha}} \right\}, \quad (4.4)$$

де $R_{\text{eff}} = |\mathbf{R}_{\text{eff}}|$, $R_{1\alpha} = |\mathbf{R}_{1\alpha}|$, $R_{2\alpha} = |\mathbf{R}_{2\alpha}|$. Виявляється, що така ідея дозволяє нам досягти стабільності у розрахунках спектрів гальмівного випромінювання, що збігаються. Інший важливий результат такого підходу — це те, що спектри випромінювання стають чутливими до обраної геометрії поділу ядерної системи.

4.2.3. Розрахунки спектрів випромінювання при потрібному поділі ядра ^{252}Cf

Тепер давайте перейдемо до розрахунків. Ми почнемо з найпростішого випадку — тобто α -розпаду ядра ^{252}Cf . На Рис. 4.2 (а) представлено результати розрахунку гальмівного випромінювання фотонів, що спричиняється α -частинкою, коли бінарне ядро не розділяється. З рисунку видно, що такий спектр має такий же порядок, як і наші попередні результати для спектрів для α -розпаду ядер ^{214}Po та ^{226}Ra . На Рис. 4.2 (б) представлено нові розрахунки випромінювання фотонів, що спричиняються з вильоту α -частинки з того ж самого ядра ^{252}Cf , але коли бінарне ядро ділиться на два фрагменти (ми маємо інше значення енергії α -частинки $E_\alpha = 16$ MeV, взяте нами з літе-

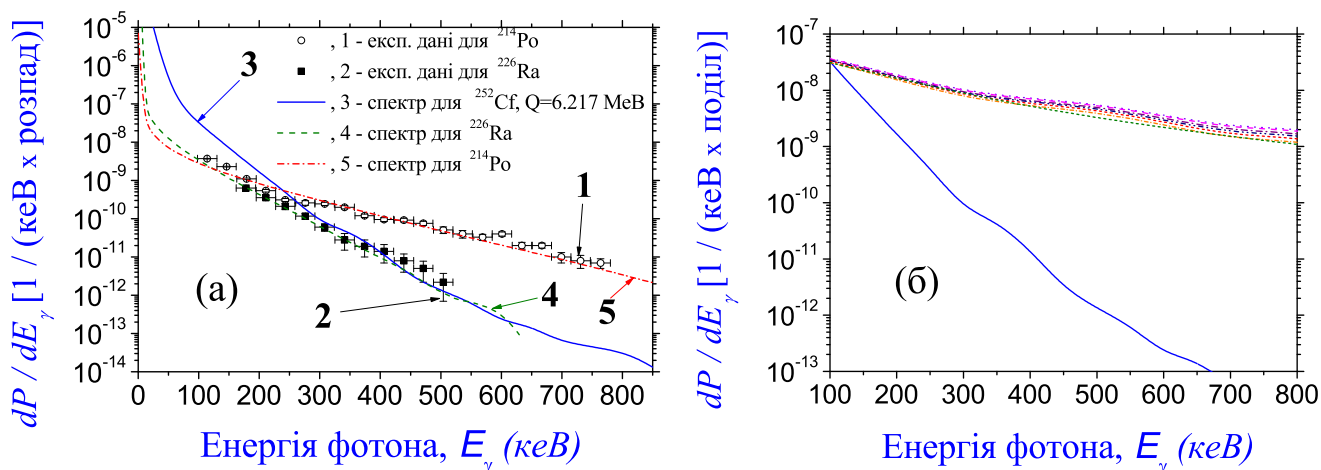


Рис.4.2 Ймовірності гальмівного випромінювання, яке виникає за рахунок руху α -частинки при її вильоті з ядра ^{252}Cf : (а) спектр, що визваний вильотом α -частинки з ядра (синя суцільна лінія), у порівнянні зі спектрами від α -розпаду ядер ^{214}Po і ^{226}Ra (червона штрих-пунктирна та зелена штрихова лінії, відповідно); (б) спектри від вильоту α -частинки у випадку, коли ми враховуємо додатково поділ бінарного ядра на два фрагменти, представлені для різних варіантів фрагментації та при фіксованій довжині шийки 7 фм [$A_1 = 120, Z_1 = 45$ (штрих-двічі пунктирна лінія); $A_1 = 80, Z_1 = 30$ (штрих-пунктирна лінія); $A_1 = 40, Z_1 = 15$ (штрихова лінія); $A_1 = 8, Z_1 = 4$ (пунктирна лінія)]. Ми також додаємо спектр випромінювання, що супроводжує α -розпад (суцільна лінія), що було представлено на лівому малюнку для випадку, коли бінарне ядро не ділиться.

ратури). Звідси видно, що різниця між спектрами є суттєвою, що пояснюється за рахунок більш високої енергії E_α α -частинки.

На Рис. 4.3 представлено результати розрахунків спектрів на основі підходу, викладеного вище, у порівнянні з експериментальними даними [139]. Після порівняння таких експериментальних даних з розрахунками, ми приходимо до наступних висновків: (1) загальна тенденція розрахованих спектрів є подібною до експериментальних даних; (2) існує деяке неузгодження між розрахунками спектрів та експериментальними даними у області енергій 200–400 кеВ випромінених фотонів. На такій основі ми ставимо наступне запитання: *які саме удосконалення теорії могли б призвести до покращення існуючого опису експериментальних даних?*

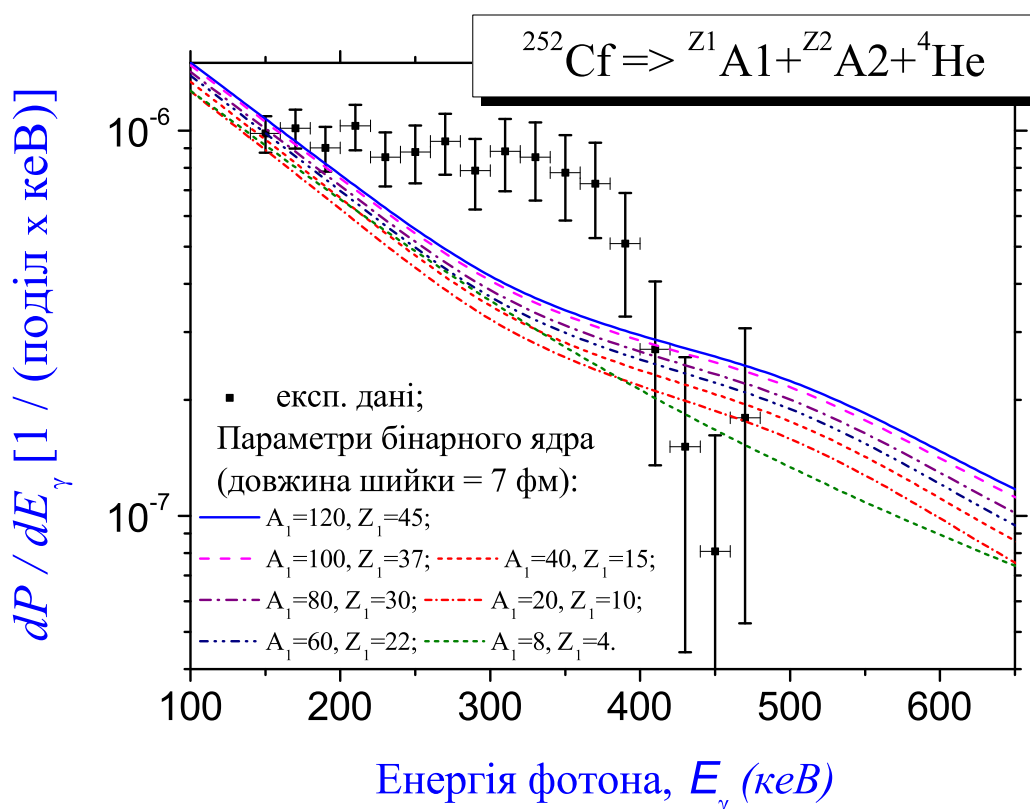


Рис.4.3 Ймовірності гальмівного випромінювання при потрібному поділі ядра ^{252}Cf : спектри, розраховані для різних розділень бінарної ядерної системи на два фрагменти (на рисунку позначено параметри легшого фрагмента), та експериментальні дані [139].

4.3. Удосконалення моделі

З метою вирішити це питання, випишемо всі аспекти моделі, які можуть дати немалий вплив на спектр випромінювання.

1. У розрахунках ймовірностей гальмівного випромінювання фотонів під час потрійного поділу ядра ми розглядаємо:
 - (a) Різні варіанти розділення однієї й тієї-ж бінарної ядерної системи на два фрагменти;
 - (b) Геометрію поділу ядерної системи;
 - (c) Шийку бінарної ядерної системи, як область старту вильоту α -частинки;
 - (d) Динаміку відносного руху α -частинки відносно фрагментів бінарної ядерної системи;
 - (e) Кут між напрямками випромінювання фотона та вильоту фрагмента.
2. Два фрагменти бінарної ядерної системи, які мають власні електричні заряди, рухаються під час поділу та по тій причині спричиняють власний додатковий внесок випромінювання у повний спектр.

Як виявляється, останній пункт дає найбільш вагомий вплив на спектр випромінювання фотонів. Саме по такій причині, нам необхідно проаналізувати саме цей пункт.

4.3.1. Внесок випромінювання, що спричинений розльотом фрагментів бінарної ядерної системи

Розглянемо оператор випромінювання повної ядерної системи (α -частинка та бінарна ядерна система), де як α -частинка, так і бінарне ядро складаються з

нуклонів (ми будемо нумерувати нуклони α -частинки індексом i , а нуклони бінарної ядерної системи — індексом j):

$$\hat{H}_\gamma = -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \hat{\mathbf{p}}_i + \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \hat{\mathbf{p}}_j \right\}. \quad (4.5)$$

Ми переходимо до нових змінних, які враховують центри мас α -частинки та двох фрагментів бінарного ядра. Ми визначаємо координати центрів мас α -частинки через \mathbf{r}_α , бінарної ядерної системи — через \mathbf{R}_A , та повної ядерної системи — через \mathbf{R} :

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{r}_{\alpha i}, \quad \mathbf{R}_A = \frac{1}{m_A} \sum_{j=1}^A m_j \mathbf{r}_{Aj}, \quad \mathbf{R} = \frac{m_A \mathbf{R}_A + m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{m_A + m_\alpha}. \quad (4.6)$$

Вводячи нові відносні координати $\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$, $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ та \mathbf{r} як

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R}_A + \boldsymbol{\rho}_{Aj}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_A \quad (4.7)$$

ми отримаємо

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R} - \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{Aj}. \quad (4.8)$$

У результаті ми отримаємо матричний елемент у наступному вигляді [див. (Г.15), Додаток Г, стор. 447]:

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{H}_\gamma | i \rangle &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \times \\ &\times \left\{ \left\langle f_A, f_\alpha \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| i_A, i_\alpha \right\rangle + \right. \\ &\left. + \left\langle f_\alpha \left| e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \left\langle f_A \left| Z_A(\mathbf{k}) \mathbf{p}_{Aj} \right| i_A \right\rangle \right| i_\alpha \right\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де $s = i$ або f [індекси i та f означають початковий стан (тобто стан перед випромінюванням фотона) та кінцевий стан (тобто стан після випромінювання фотона)], \mathbf{K}_s — імпульс повної ядерної системи, $|s_A\rangle$ — хвильова функція, що описує внутрішні стани бінарної ядерної системи, $|s_\alpha\rangle$ — хвильова функція,

що описує відносний рух (з можливим тунелюванням) α -частинки відносно бінарної ядерної системи. Тут, $Z_{\text{eff}}(\mathbf{r})$, $Z_{\alpha}(\mathbf{k})$ та $Z_A(\mathbf{k})$ — ефективний заряд системи, що складається з α -частинки та бінарної ядерної системи, зарядовий форм-фактор α -частинки та зарядовий форм-фактор бінарної ядерної системи, що визначені у Додатку Г.

Розрахунки різних внесків випромінювання представлено на Рис. 4.4 (а) (без нормування на експериментальні дані). З метою проаналізувати, наскільки сильно вони впливають на спектр випромінювання, ми обрали розрахунки для однакового розділення бінарної ядерної системи на два фрагменти (ми обрали випадок, коли один з фрагментів має $A_1 = 120$ та $Z_1 = 45$) та пронормували отримані спектри на експериментальні дані. Такі розрахунки представлено на Рис. 4.4 (б). Можна бачити, що компонента випромінювання, що спричиняється фрагментами бінарної ядерної системи, суттєво краще описує експериментальні дані для енергій вище ніж 300 кеВ, тоді як при низьких енергіях випромінювання головним чином спричиняється за рахунок руху α -частинки у полі бінарної ядерної системи.

4.3.2. Випромінювання від α -бінарної ядерної системи

Як було отримано вище, повний матричний елемент випромінювання можна записати як сумму двох доданків:

$$\langle f | \hat{H}_\nu | i \rangle = \langle f | \hat{H}_\nu | i \rangle_\alpha + \langle f | \hat{H}_\nu | i \rangle_{\text{binary}}. \quad (4.10)$$

Тут другий доданок представляє собою випромінювання фотонів, що виникає за рахунок відносного руху двох фрагментів бінарної ядерної системи, яке

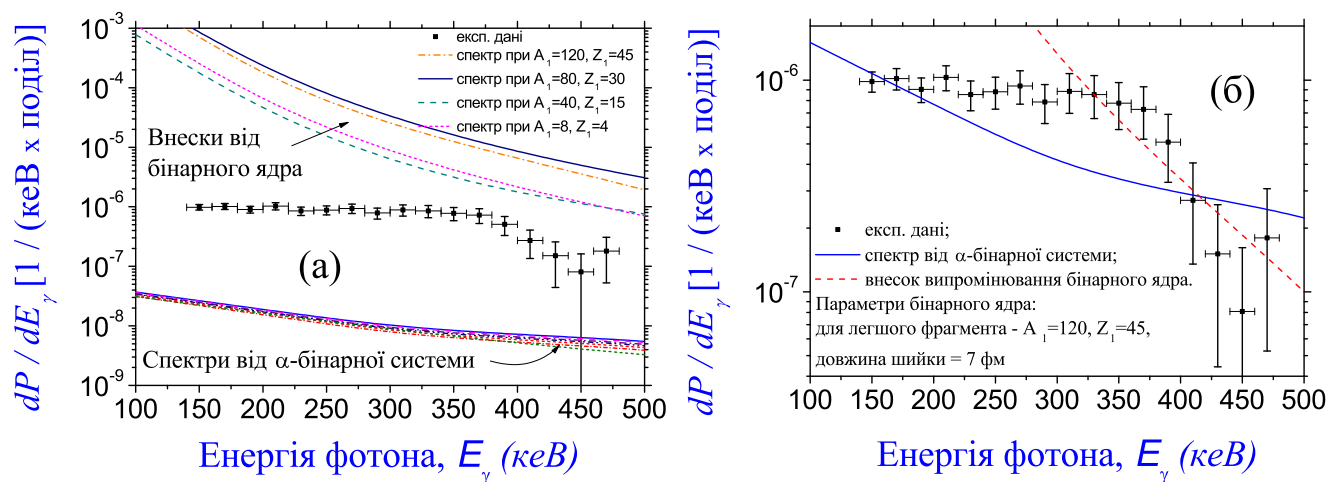


Рис.4.4 Панель (а): Ймовірності гальмівного випромінювання, що спричиняються розльотом ядерної системи, яка складається з α -частинки та бінарного ядра з двох фрагментів (див. нижні лінії) у порівнянні з експериментальні дані [139] [спектри визначаються на основі матричного елемента (4.9)]. Тут суцільна синя лінія — розрахунки для $A_1 = 80$ та $Z_1 = 30$; червона штрихова лінія — для $A_1 = 120$, $Z_1 = 45$; синя штрихова лінія — для $A_1 = 40$, $Z_1 = 15$; червона пунктирна лінія — для $A_1 = 8$, $Z_1 = 4$. На цьому ж рисунку (див. верхні лінії) додаються власні внески випромінювання фотонів у наслідок розльоту лише двох фрагментів бінарного ядра, які були вказані вище [вони визначаються на основі матричного елемента (4.11) при припущенні (4.12)]. Панель (б): Ті ж самі спектри, як і на попередньому рисунку, спричинені вильотом α -частинки при обраному лише одному розділенні бінарного ядра (де один з фрагментів має $A_1 = 120$ та $Z_1 = 45$), показано синьою суцільною лінією. Спектр випромінювання для довжини шийки 7 фм показано червоною штриховою лінією, після нормування обох ліній на експериментальні дані [139].

може бути записано так:

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}_\gamma | i \rangle_{\text{binary}} &= \\
&= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\langle f \left| e^{i\mathbf{kr} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}} \langle f_A | Z_{\text{eff},A}(\rho) \mathbf{P}_\rho | i_A \rangle \right| i \right\rangle = \\
&= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\langle f \left| e^{i\mathbf{kr} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}} \right| i \right\rangle \langle f_A | Z_{\text{eff},A}(\rho) \mathbf{P}_\rho | i_A \rangle.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

У цьому виразі розрахунки першого матричного елемента $\langle f | \exp\left[i\mathbf{kr} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}\right] | i \rangle$ являють собою основну складність. З метою оцінити його, ми обрали наступне припущення у якості першого наближення:

$$\left\langle f \left| e^{i\mathbf{kr} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}} \right| i \right\rangle \simeq N_i^2 = \frac{\mu}{k_i}, \tag{4.12}$$

де N_i — фактор нормування хвильової функції для стану перед випромінюванням фотона (див. роботи [56, 57, 59, 58, 60] для пояснень). Застосовуючи таке наближення, ми отримаємо спектри для внесків від бінарної ядерної системи, що представлені на Рис. 4.4 (а) за допомогою ліній, що розташовані вище експериментальних даних.

Щоб знайти корекцію до наближення (4.12), слід врахувати залежність матричного елемента від хвильового вектору \mathbf{k} фотона, та від кута між векторами \mathbf{k} (що вказує напрямок випромінювання фотона) та \mathbf{r} (що вказує напрямок руху α -частинки). Тобто запишемо наближення як

$$\left\langle f \left| e^{i\mathbf{kr} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}} \right| i \right\rangle \simeq \frac{\mu}{k_i} \cdot F[k, \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})]. \tag{4.13}$$

де $F[k, \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$ — нова невідома функція. Будемо шукати цю функцію так, щоб вона відповідала найкращому опису експериментальних даних при низьких енергіях з випромінюванням від α -бінарної системи та при високих енергіях через внесок випромінювання від бінарної системи. А саме, така ситуація виникає у наступному сценарії динаміки потрійного поділу:

1. На початковій стадії потрійного поділу, α -частинка покидає область ядерної системи. Вона рухається та випромінює фотони при низьких енергіях. Фрагменти бінарної ядерної системи рухаються повільно та спричиняють мале випромінювання (яким можна знехтувати).
2. Після деякого часу, два фрагмента бінарної ядерної системи починають розлітатися з відносним прискоренням. Це формує не мале випромінювання фотонів при більш високих енергіях, що стає домінуючим.

Ми шукаємо функцію $F[k, \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$ у вигляді $F = 1 - f_0 / [1 + \exp((w - w_0)/w_1)]$. За допомогою фітінг-процедури знаходимо параметри [ми отримуємо $f_0 = 1 + \exp(-w_0/w_1)$, $w_0 = w_1 \cdot \ln(\exp(w_2/w_1) - 2)$, $w_1 = 0.057$, $w_2 := 0.24$, w — енергія фотона].

Результати розрахунків спектрів на основі такої логіки представлено на Рис. 4.5 (а). Звідси видно, що новий спектр (представлений суцільною зеленою лінією), який отримано на основі другого наближення (4.13) та функції $F[k, \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$, виявляється розташованим до експериментальних даних суттєво ближче. Таким чином, використовуючи сценарій динаміки потрійного поділу, можна досягти достатньо непоганої згоди між теорією та експериментальними даними [139] для ядра ^{252}Cf .

Відповідно до такої логіки, при більш високих енергіях (вище ніж 300 кеВ) випромінювання фотонів головним чином формується за рахунок внеску від бінарної ядерної системи. Таким чином, при більш низьких енергіях ми маємо головним чином випромінювання, що спричиняється α -частинкою у полі бінарної ядерної системи. Іншими словами, при енергіях, менших ніж 300 кеВ, аналіз залежності спектра від довжини шийки виявляється працездатним. Такі розрахунки представлено на наступному Рис. 4.5 (б), звідки ми отримаємо оптимальне значення для довжини шийки, що дорівнює 11 фм. Для такого значення довжини шийки розрахунковий спектр виявляється розташованим найближче до експериментальних даних (при розділенні

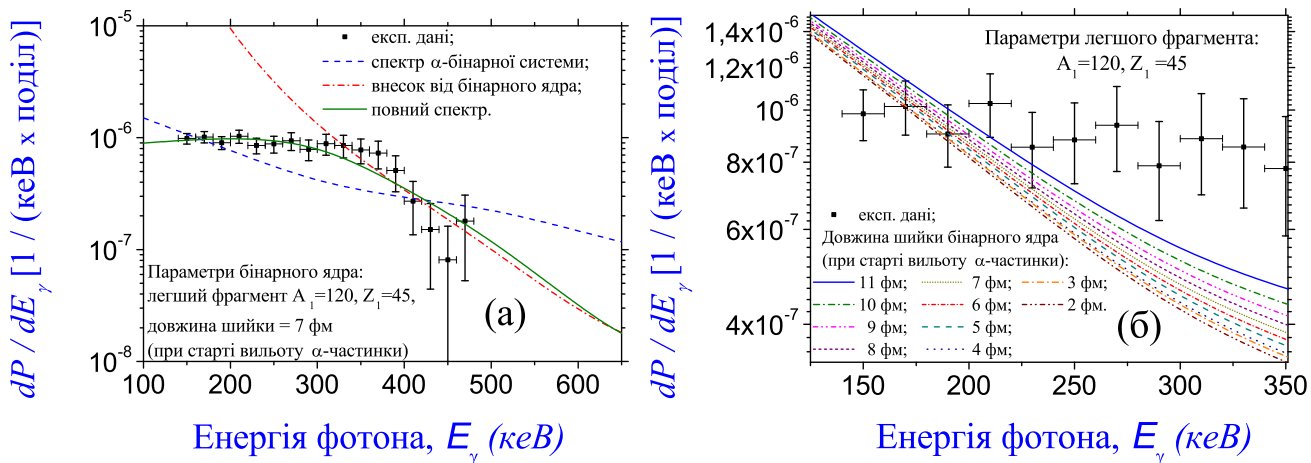


Рис.4.5 Розрахунки ймовірностей гальмівного випромінювання при потрібному поділі ядра ^{252}Cf та експериментальні дані [139] [параметри розрахунків: матричний елемент визначено за формулою (4.10) при уточненні (4.13); для аналізу обрано однаковий розділ бінарної ядерної системи на два фрагменти з $A_1 = 120, Z_1 = 45$ та $A_2 = 128, Z_2 = 51$]: (а) повний спектр випромінювання від α -частинки у полі бінарного ядра та внесок випромінювання від розльоту фрагментів бінарного ядра; (б) спектри, визначені відносно різних значень довжини шийки між двома фрагментами бінарного ядра (у розрахунках такі значення довжини шийки визначено у момент відриву α -частинки від поверхні бінарного ядра).

бінарної ядерної системи на два фрагменти з масовими та зарядовими числами $A_1 = 120, Z_1 = 45$ та $A_2 = 128, Z_2 = 51$).

4.4. Головні результати і висновки до Розділу 4

У Розділі викладено нову модель, що описує випромінювання гальмівних фотонів при потрійному поділі важких ядер. Теоретичні дослідження випромінювання гальмівних фотонів при потрійному поділі ядер ще ніколи не досліджувались іншими авторами. Підхід, представлений у даному розділі, уперше був представлений у роботі [87], та він є подальшим розвитком моделі гальмівного випромінювання при поділі ядер [63, 86]. Для розрахунків та аналізу обрано ядро ^{252}Cf . Досягнуто непоганої згоди між розрахованими спектрами фотонів та експериментальними даними [139] для енергій фотонів до 500 кеВ (див. Рис. 4.3). Однак, існує неспівпадіння між теорією та експериментом у області енергій 200–400 кеВ фотонів. Щоб покращити опис експериментальних даних, запропоновано наступний сценарій динаміки потрійного поділу:

1. На першій стадії, коли α -частинка покидає просторову область ядра, бінарне ядро ділиться на фрагменти повільно, тому воно формує малі внески випромінювання фотонів у повний спектр.
2. На цій стадії α -частинка рухається швидко та спричиняє випромінювання фотонів головним чином при низьких енергіях.
3. Потім бінарне ядро починає ділитися суттєво більш швидко, фрагменти розлітаються з прискоренням, кожний фрагмент спричиняє власне немале випромінювання фотонів при більш високих енергіях.

Такий сценарій краще описує експериментальні дані випромінювання. З порівняння розрахунків з експериментальними даними виявлено, що (1) найбільш ймовірне відділення α -частинки виникає при довжині шийки між важкими фрагментами 11 фм, (2) розділ бінарного ядра на два однакових фрагменти є найбільш ймовірним.

РОЗДІЛ 5

ВИПРОМІНЮВАННЯ У ПРОТОННОМУ РОЗПАДІ ЯДЕР ТА РОЗСІЯННІ ПРОТОНІВ НА ЯДРАХ ВІД БІЛЯНУЛЬОВИХ ДО ПРОМІЖНИХ ЕНЕРГІЙ

5.1. Вступ

В опублікованих роботах вважається, що для вдалого опису зіткнень протонів з ядрами важливою є взаємодія між двома нуклонами, яка з ростом енергій поступово здобуває лідируючої ролі. Тому у релятивістських моделях протон-ядерних зіткнень в основу покладено взаємодію між двома довільними нуклонами (тобто нуклон-нуклонну або двонуклонну взаємодію), з застосуванням формалізму діаграм Фейнмана. З іншого боку, розгляд ядра як ядерного середовища дозволяє включити просторовий розподіл нуклонів. Такий шлях враховує нелокальність квантової механіки (в просторовому описі нуклонів). Виникає питання: що є більш важливим — крапкова взаємодія між окремими двома нуклонами ядерної системи або квантові ефекти в реакціях? Наскільки суттєвими є квантові ефекти?

Вказівку до відповіді на такі запитання дають результати роботи [73]: коректне врахування граничних і початкових умов розпаду змінює період напіврозпаду протонних емітерів до 200 разів (на таку величину можуть бути змінені результати робіт [140, 141, 117, 142, 143, 144, 145, 146, 147], тоді як заявлена помилка у цих роботах становила лише кілька відсотків, де не враховано варіації початкових умов). Виходить, що нелокальні ефекти дійсно не є малими та їх врахування суттєво змінює результат.

Іншим аспектом є колективні ефекти. Моделі з нуклон-нуклонною взаємодією були б ефективними, якби колективні ефекти між нуклонами ядерної

системи були б достатньо малими. Але ми знаємо, що при малих енергіях це не так. Можна було б думати, що багаточастинкові взаємодії зникають зі зростанням енергії взаємодіючих нуклонів. Якщо розглянути гальмівне випромінювання, що супроводжує зіткнення протонів я ядрами, то існують вказівки, що двонуклонні зіткнення дають найбільшу інтенсивність випромінювання. Але, багатонуклонні ефекти повинні проявлятися й зростати з ростом енергії випромінених фотонів.¹ Підтвердження про істотний вплив багаточастинкових ефектів на випромінювання та усієї важливості їх вивчення ми знаходимо у ряді робіт (наприклад, див. [31]; зокрема, двонуклонні підходи не дають відповіді на запитання про природу жорстких фотонів).

Історія досліджень гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах досить довга (див. огляд [25], також [97] для зіткнень важких іонів). Як правило, розглядається емісія фотонів, де в якості випромінювача в ядерній системі можуть виступати як ядро у цілому, так і окремі нуклони у ньому. Сам процес випромінювання вивчається в результаті гальмування нуклонів у середньому полі ядра або в наслідок нуклон-нуклонних зіткнень. Але неодноразово вказувалося [31], що гірше всього вивчено ядерне гальмівне випромінювання, що супроводжує нуклон-ядерні і ядерно-ядерні зіткнення (особливо в області проміжних енергій до 150 MeV / нуклон). Це викликає інтерес до застосування оптичних потенціалів [148] і фолдинг-потенціалів [149] при вивченні гальмівного випромінювання в реакціях протонів з ядрами². Було б цікаво створити модель, яка б дозволила описувати спектри у діапазоні енергій від мінімальних до проміжних. Підсилює наш інтерес до такого потенціального підходу також те, що він дозволяє безпосередньо використовувати нелокальність квантової механіки при описі взаємодій.

¹Наприклад, у задачі α -розпаду, з ростом енергії фотона для одержання стабільного значення ймовірності його випромінювання необхідно постійно підвищувати верхню границю просторової області, у межах якої обчислюються інтеграли. У задачі поділу ця проблема проявляється суттєво сильніше.

²Так, наприклад, такий потенціальний підхід до опису нуклон-ядерних взаємодій при порівнянні із двонуклонним робить його практично безальтернативним.

У дослідженнях гальмівного випромінювання, яке супроводжує α -розпад ядер [32, 16, 98, 17, 18, 42, 99, 102, 100, 109, 150, 123, 122, 103, 104, 56, 57, 121, 151, 21, 101, 59, 58, 60, 61, 62], спонтанний поділ [152, 7, 8, 9, 153, 11, 12, 13, 63, 14, 154], потрібний поділ [87], розсіяння протонів на ядрах [155, 156, 157, 31], іонів і ядер на ядрах при нерелятивістських енергіях [97], не було враховане випромінювання, пов'язане з магнітним моментом ядерного фрагмента. Така ситуація могла б бути виправданою, якщо магнітне випромінювання мале при таких енергіях та їм слід нехтувати (наприклад, див. [31]). Але підтверджень такої думки (обґрунтованих розрахунками та аналізом експериментів) не має. При описі взаємодій такі моделі пов'язані з рішенням рівняння Шредінгера. Потужний підхід могли б дати багатонуклонні моделі [188, 189, 159, 160]. Але, магнітне випромінювання не вивчалось у таких підходах.

Магнітне випромінювання пов'язано з магнітним моментом і спином фрагмента, взаємодіючого з ядром. Врахування цих аспектів веде до матричної форми рівнянь (див. [161], стор. 32–35, 48–60). Магнітний момент й спін включені у релятивістські моделі зіткнень нуклонів між собою та з ядрами при проміжних енергіях. Відзначимо два напрямки досліджень: [162, 163] і [164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175]. Однак, фокус у цих роботах зроблено на побудову коректного релятивістського опису взаємодії між двома нуклонами в імпульсному представленні. Бажано було б поєднати спіновий формалізм взаємодіючих ядерних фрагментів (з урахуванням принципу Паулі, магнітного моменту) і потенціальний підхід до розсіяння.

Найбільш зручною є задача опису гальмівного випромінювання при зіткненні протонів з ядрами або протонному розпаді. У роботі [64] вивчалось гальмівне випромінювання у розпадах з вильотом протона (див. також [29]). Однак, тут не було враховано магнітне випромінювання, що пов'язане з магнітним моментом протона (але було враховано спін-орбітальний компонент

у потенціалі взаємодії й оцінено його вплив на спектр). Для більш глибокого з'ясування його ролі, потрібна модель, що включає такий аспект. Тому основною метою такого формалізму у цьому Розділі є побудова такої моделі, де ми обмежимося граничними умовами для протонного розпаду.

Отже, намічена у цьому Розділі програма повинна використовувати реалістичні потенціали взаємодії між протоном і ядром, які визначаються на основі аналізу експериментальних перетинів зіткнень цих двох об'єктів. Важливим пунктом формалізму є уведення спину. Це ключовий пункт, що дозволяє пов'язати формалізм попередніх моделей із просторовим потенціальним підходом до опису взаємодій (наприклад, див. [64]) з релятивістськими теоріями, що беруть в основу рівняння Дірака. Суттєво, що такий зв'язок дозволяє застосувати раніше розвинені аналітичні методи й комп'ютерні коди до рішення задач випромінювання фотонів у релятивістській теорії.

Що цікавого могла б дати така модель? Поставимо такі питання. Наскільки сильним є магнітне випромінювання і як змінюється спектр при його врахуванні? Чи існують такі кути, при яких магнітне випромінювання є найбільш інтенсивним? Чи існують такі відстані між протоном та ядром, де магнітне випромінювання істотно зростає відносно електричного? Як поводить ся магнітне випромінювання з області тунелювання? З погляду теорії цікаво розібратися в тому, як поводить ся спектр випромінювання при прямуванні енергії фотонів до нуля. Зокрема, чи цей спектр необмежено зростає або є скінченим? Відзначимо, що у літературі існує будь-якої інформації по цим питанням. Відповіді на ці питання даються у даному Розділі.

5.2. Рівняння Паулі багатонуклонної системи

Розглянемо узагальнення рівняння Паулі для $A + 1$ нуклонів, які являють собою систему протона і ядра, у лабораторній системі відліку [отримано, як

узагальнення формули (1.3.6) у [161], стор. 33]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi,$$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{A+1} \left\{ \frac{1}{2m_i} \left(\mathbf{p}_i - \frac{z_i e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + z_i e A_{i,0} - \frac{z_i e \hbar}{2m_i c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_i \right\} + V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1}). \quad (5.1)$$

Тут Ψ — спірна хвильова функція протон-ядерної системи, m_i і z_i — маса й заряд нуклона з номером i , \mathbf{A}_i — компонента потенціалу електромагнітного поля, яке сформовано цим нуклоном (що описує народження гальмівних фотонів, викликане саме цим нуклоном), $\boldsymbol{\sigma}$ — матриці Паулі, A — масове число ядра, $V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1})$ — потенціал (як ядерних, так і електромагнітних) взаємодій між усіма нуклонами³. Ми переходимо у систему центру мас, у якій відносна відстань між протоном розсіяння та центром мас ядра описується за допомогою вектору \mathbf{r} (наприклад, див. Додаток А у роботі [87], також [31]). Тоді можна представити цей гамільтоніан як $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, де \hat{W} включає усі компоненти електромагнітного поля, який ми визначимо як оператор випромінювання гальмівного фотона, викликаного повною ядерною системою, і \hat{H}_0 — залишковий гамільтоніан без включення випромінених фотонів. Зневажаючи відносним рухом нуклонів ядра відносно його центру мас у розрахунку \hat{W} , ми одержимо

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \hat{W}_{\text{el}} + \hat{W}_{\text{mag}}, \\ \hat{W}_{\text{el}} &= -Z_{\text{eff}} \frac{e}{2mc} (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{A} + \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}}) + ea_0 + Z_{\text{eff}}^2 \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2, \\ \hat{W}_{\text{mag}} &= -Z_{\text{eff}} \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

³Відповідно до [161] (див. стор. 32 у цій книзі), рівняння (5.1) може бути використано, якщо енергія ε_i довільного нуклона з номером i досить близька до його маси m_i , тобто при $|\varepsilon_i - m_i| \ll m_i$ ($c = 1$). Звідси можна одержати високоенергетичне граничне значення для енергії протона: $\varepsilon_p \ll 2m_p \simeq 1.86$ Гев. Виходить, у межах області енергій до ε_p рівняння (5.1) включає всі релятивістські властивості, які дає нам рівняння Дірака. Зокрема, ця межа виявляється значно вищою, ніж проміжні енергії протон-ядерних зіткнень, розглянуті у цьому розділі.

де Z_{eff} і m — ефективний заряд і наведена маса протон-ядерної системи, $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор імпульсу відносно до радіус-вектору \mathbf{r} .

5.3. Оператор випромінювання

Нехтуючи доданками при $e^2 \mathbf{A}^2 / c^2$ і A_0 , оператор випромінювання (5.2) при кулонівському калібруванні можна представити як

$$\hat{W} = -Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} - Z_{\text{eff}} \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = -Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \left(\mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \right). \quad (5.3)$$

Відповідно до теорії квантової електродинаміки, виберемо векторний потенціал електромагнітного поля у вигляді:

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w_{\text{ph}}}} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}}, \quad (5.4)$$

де $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона ($\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$), \mathbf{k}_{ph} — хвильовий вектор фотона й $w_{\text{ph}} = k_{\text{ph}}c = |\mathbf{k}_{\text{ph}}|c$. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k}_{ph} у кулонівському калібруванні. Ми маємо два незалежні вектори поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ і $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} ($\alpha = 1, 2$). Можна було б розвивати формалізм далі у системі одиниць, де $\hbar = 1$ і $c = 1$, але для повноти картини ми будемо виписувати сталі \hbar і c явно (у цьому розділі). Підставляючи вектор \mathbf{A} в формулу (5.3) для оператора збурення, одержимо

$$\hat{W} = -Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \left(\mathbf{e}^{(\alpha)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \right). \quad (5.5)$$

Враховуючи явний вигляд оператора імпульсу, одержимо далі:

$$\hat{W} = Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \left(i \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \nabla - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \right). \quad (5.6)$$

Урахувавши властивість:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \left(-i\mathbf{k}_{\text{ph}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (5.7)$$

перепишемо оператор випромінювання так:

$$\begin{aligned} \hat{W} = & Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \times \\ & \times \left(i\mathbf{e}^{(\alpha)} \nabla - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] + i\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Випишемо явно векторні добутки:

$$[\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(1)}] = k_{\text{ph}} \mathbf{e}^{(2)}, \quad [\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(2)}] = -k_{\text{ph}} \mathbf{e}^{(1)}. \quad (5.9)$$

Знайдемо суму:

$$\sum_{\alpha=1,2} [\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] = k_{\text{ph}} (\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)}). \quad (5.10)$$

5.4. Матричний елемент випромінювання

Розглянемо матричний елемент у вигляді:

$$F_{fi} \equiv \langle k_f | \hat{W} | k_i \rangle = \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{W} \psi_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{r}, \quad (5.11)$$

де $\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ і $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ – стаціонарні хвильові функції протон-ядерної системи в початковому i -стані (тобто стані до випромінювання фотона) і кінцевому f -стані (тобто стані після випромінювання фотона). Підставляючи оператор випромінювання (5.8) у формулу (5.11), отримаємо

$$\begin{aligned} F_{fi} = & \langle k_f | \hat{W} | k_i \rangle = \\ = & Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \left\{ i \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \nabla | k_i \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla] | k_i \rangle + i\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} [\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} | k_i \rangle \right\} \end{aligned}$$

або

$$F_{fi} = \langle k_f | \hat{W} | k_i \rangle = Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \left\{ p_{\text{el}} + p_{\text{mag},1} + p_{\text{mag},2} \right\}, \quad (5.12)$$

де

$$\begin{aligned}
p_{\text{el}} &= i \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \nabla | k_i \rangle, \\
p_{\text{mag},1} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla] | k_i \rangle, \\
p_{\text{mag},2} &= -i \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} [\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} | k_i \rangle.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Таке визначення F_{fi} повністю узгодиться з позначеннями, використуваними у роботах [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 87]:

$$\begin{aligned}
F_{fi} &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot p(k_i, k_f), \\
p(k_i, k_f) &= \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \mathbf{p}(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \boldsymbol{\xi}_{\mu}^* \mathbf{p}(k_i, k_f), \\
\mathbf{p}(k_i, k_f) &= \langle k_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} | k_i \rangle = \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Для квадрата матричного елемента випромінювання одержуємо

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w). \tag{5.15}$$

Використовуючи мультипольне розкладання векторного потенціалу електромагнітного поля \mathbf{A} , розрахуємо матричні елементи (5.13) для сферичного ядра. Розрахунки таких матричних елементів та їх диференціальних значень (по куту) достатньо складні та їх приведено у Додатках Д.1– Д.4 [див. стор. 448–464]. Випишемо рішення матричних елементів [див. (Д.45),

стор. 460]:

$$\begin{aligned}
p_{\text{el}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \times \\
&\times \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \left[i p_{l_{\text{ph}}}^{M m_i m_f} + p_{l_{\text{ph}}}^{E m_i m_f} \right], \\
p_{\text{mag},1} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \cdot \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \times \\
&\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{\mu = \pm 1} h_{\mu} \left[i p_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + \mu p_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right], \\
p_{\text{mag},2} &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} k \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \cdot \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \times \\
&\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \left[-1 + i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} \right] \cdot \left[i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^M + \tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^E \right].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.5. Кутова ймовірність випромінювання фотонів з імпульсом \mathbf{k}_{ph}

Відповідно до (1.41) [див. стор. 49], визначимо диференціальні відносну й абсолютну ймовірності випромінювання так:

$$\frac{d^2 W(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{\text{ph}}}{m^2} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\}, \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} &= \frac{d^2 W(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} \cdot \frac{E_i}{\hbar c^2 k_i} = \\
&= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

де с. с.— позначення комплексного спряження. На основі формули (5.12) розпишемо (5.18), розділивши різні компоненти випромінювання:

$$\frac{dP(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} = \frac{dP_{\text{el}}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} + \frac{dP_{\text{mag},1}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} + \frac{dP_{\text{mag},2}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} + \frac{dP_{\text{interference}}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}}, \tag{5.19}$$

де

$$\begin{aligned}
\frac{d P_{\text{el}}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p_{\text{el}}(k_i, k_f) \frac{d p_{\text{el}}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\}, \\
\frac{d P_{\text{mag},1}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p_{\text{mag},1}(k_i, k_f) \frac{d p_{\text{mag},1}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\}, \\
\frac{d P_{\text{mag},2}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p_{\text{mag},2}(k_i, k_f) \frac{d p_{\text{mag},2}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\}, \\
\frac{d P_{\text{interference}}(\theta_f)}{w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \times \\
&\times \left\{ p_{\text{el}}(k_i, k_f) \frac{d [p_{\text{mag},1}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\text{mag},2}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d \cos \theta_f} + \right. \\
&+ p_{\text{mag},1}(k_i, k_f) \frac{d [p_{\text{el}}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\text{mag},2}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d \cos \theta_f} + \\
&+ p_{\text{mag},2}(k_i, k_f) \frac{d [p_{\text{el}}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\text{mag},1}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \left. \right\}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Назвемо $d P_{\text{el}}$ електричною компонентою випромінювання, $d P_{\text{mag},1}$ — магнітною компонентою випромінювання, $d P_{\text{mag},2}$ — корекцією магнітної компоненти випромінювання, $d P_{\text{interference}}$ — інтерференційною компонентою випромінювання. Інколи змінні φ_f і θ_f у дужках цих функцій будемо опускати.

Для опису гальмівного випромінювання, яке супроводжує зіткнення протонів на ядрах, будемо розглядати нормовані перерізи

$$\frac{d^2 \sigma}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = N_0 w_{\text{ph}} \cdot \left\{ p(k_i, k_f) \frac{d p^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\}, \tag{5.21}$$

де N_0 — фактор нормування (нормуємо розрахунковий спектр на одне значення експериментальних даних) та в розрахунках матричних елементів ми будемо використовувати граничну умову для протон-ядерної хвильової функції пружного розсіювання до випромінювання фотона.

5.6. Протон-ядерний потенціал

Для опису протон-ядерної взаємодії ми використовуємо потенціал $V(r) = v_c(r) + v_N(r) + v_{so}(r) + v_l(r)$, де $v_c(r)$, $v_N(r)$, $v_{so}(r)$ та $v_l(r)$ — кулонівська, ядерна, спіно-орбітальна та відцентрова компоненти, що мають вигляд [148]:

$$\begin{aligned} v_N(r) &= -\frac{V_R}{1 + \exp\left\{\frac{r - R_R}{a_R}\right\}}, \quad v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2}, \\ v_{so}(r) &= V_{so} \mathbf{q} \cdot \mathbf{l} \frac{\lambda_{\pi}^2}{r} \frac{d}{dr} \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_{so}}{a_{so}}\right)\right]^{-1}, \\ v_c(r) &= \begin{cases} \frac{Ze^2}{r}, & \text{при } r \geq R_c, \\ \frac{Ze^2}{2R_c} \left\{3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right\}, & \text{при } r < R_c. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Візьмемо параметризацію, введenu Бечетті (Becchetti) та Грінлесом (Greenlees) у роботі [148], що була протестована у великій кількості робіт:

$$\begin{aligned} V_R &= 54.0 - 0.32 E + 0.4 Z/A^{1/3} + 24.0 I, \quad V_{so} = 6.2, \\ R_R &= r_R A^{1/3}, \quad R_c = r_c A^{1/3}, \quad R_{so} = r_{so} A^{1/3}, \\ r_{so} &= 1.01 \text{ fm}, \quad a_R = 0.75 \text{ fm}, \quad a_{so} = 0.75 \text{ fm}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Тут $I = (N - Z)/A$, A та Z — числа нуклонів та протонів ядра, E — енергія протона у лабораторній системі, V_R та V_{so} — сила ядерної та спіно-орбітальної компонент, визначені у одиницях МеВ, R_c та R_R — кулонівський та ядерний радіуси ядра, a_R та a_{so} — параметри дифузності.

5.7. Результати

Проаналізуємо, яку ймовірність гальмівного випромінювання фотонів дає модель протонного розпаду ядер. Ймовірність випромінювання визначається за формулою (5.18). Потенціал взаємодії між протоном і ядром визначається за формулами (5.22) з параметрами, що обчислюються за формулами (5.23).

Хвильові функції протон-ядерної системи у станах до й після випромінювання фотона визначаються відносно такого потенціалу у сферично симетричному наближенні. Граничні умови й умова нормування визначаються, відповідно до (В.1)–(В.9) у [64]. При підборі протонних емітерів для розрахунків та аналізу ми скористалися систематикою, що наведена у роботі [117] (див. Таблицю II у цій статті). Так, у [64] були відібрані ядра ^{157}Ta , ^{161}Re , ^{167}Ir , ^{185}Bi , що розпадаються зі стану $2s_{1/2}$ (при $l_i = 0$), ядра $^{109}_{53}\text{I}$, $^{112}_{55}\text{Cs}$, що розпадаються зі стану $1d_{5/2}$, і ядра $^{146}_{69}\text{Tm}$, $^{151}_{71}\text{Lu}$, що розпадаються зі стану $0h_{11/2}$ (при $l_i \neq 0$). Але у цьому розділі ми обмежимося одним ядром (виберемо $^{146}_{69}\text{Tm}$) при $l_i \neq 0$ (оскільки такі розрахунки суттєво більш складні, ніж для ядер при $l_i = 0$), з метою зосередити свою увагу на пошук та вивчення нових фізичних ефектів, які може дати ця модель (і вважаючи, що для інших ядер такі знайдені ефекти будуть подібними). Для обраного ядра $^{146}_{69}\text{Tm}$ маємо $l_i = 5$, $l_f = 4$, $Q = 1.140$ MeV (узято з [64]).

5.7.1. Електричне, магнітне випромінювання та кутові спектри

Ми з'ясуємо, наскільки є помітним магнітне випромінювання на фоні повного спектра (щоб зрозуміти, чи має сенс взагалі втрачати зусилля на його вивчення). Результати розрахунку ймовірностей випромінювання при протонному розпаді ядра ^{146}Tm (при обраному куті $\theta = 90^\circ$ між напрямками руху протона (з його тунелюванням під бар'єром) і випромінювання фотона) представлені на Рис. 5.1. На цих малюнках додано електричну і магнітну компоненти випромінювання. Звідси можна бачити, що магнітне випромінювання менше електричного. Але воно дає внесок близько 28 відсотків у повний спектр [див. Рис. 5.1 (б)], тобто не є настільки малим (щоб їм можна було нехтувати) і його слід ураховувати у подальших оцінках спектрів у розпадах ядер з вильотом заряджених фрагментів з ненульовим спіном. Однак, включення магнітної компоненти послаблює повну ймовірність випромінювання: відпо-

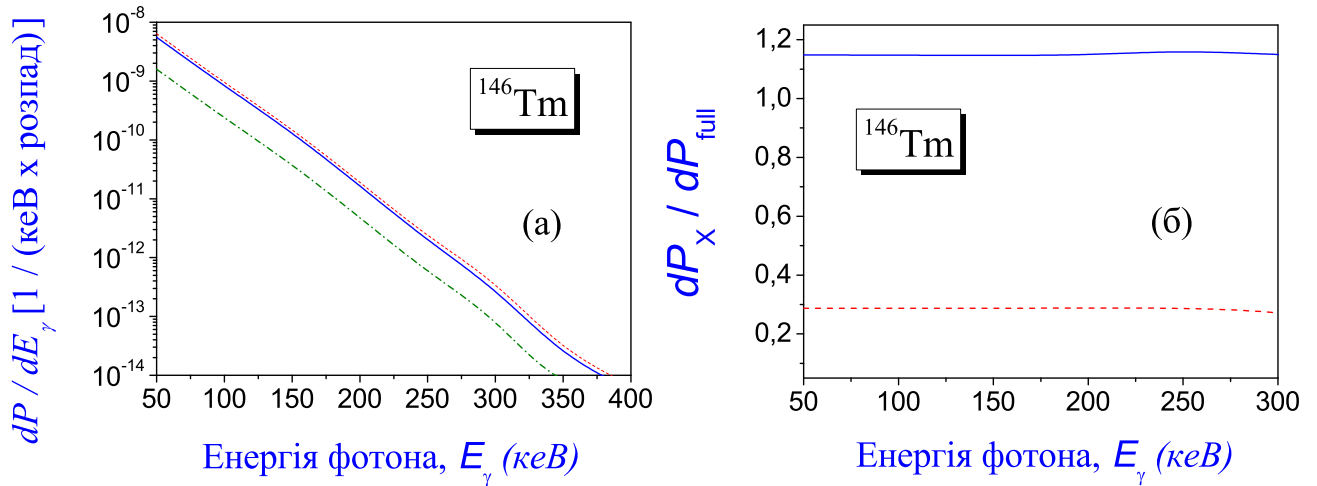


Рис.5.1 Повний спектр гальмівного випромінювання, електрична й магнітна компоненти випромінювання, що визначаються за формулами (5.20) (при $\theta = 90^\circ$): (а) повний спектр (суцільна лінія), електрична компонента dp_{el} (пунктирна лінія) і магнітна компонента $dp_{mag,1}$ (штрихпунктирна лінія), (б) відношення компонент до повного спектра (суцільна лінія — відношення dp_{el}/dp_{full} , штрихова лінія — відношення $dp_{mag,1}/dp_{full}$). Можна бачити, що магнітне випромінювання дає внесок близько 28 відсотків у діапазоні енергій 50–300 кеВ.

відно до Рис. 5.1 (б) (див. суцільну синю лінію), включення магнітної компоненти у розрахунок визначається величиною $P_{el}/P_{full} \simeq 1.14$, яка більше одиниці. Цей ефект зменшення випромінювання можна пояснити наявністю чималої деструктивної інтерференції між електричною і магнітною компонентами у всьому розглянутому діапазоні енергій випромінювання. Відповідно до Рис. 5.1 (б), відносні частини електричної й магнітної компонент повного спектра не змінюються у залежності від енергії випроміненого фотона. За нашими оцінками, корекція магнітної компоненти $dp_{mag,2}$ менше від електричної й магнітної компонентів у 10^6 разів (тому далі ми будемо нехтувати таким випромінюванням).

З'ясуємо, чи можливо суттєве зростання магнітного випромінювання відносно електричного при деяких значеннях кута θ між напрямком випромінювання фотона, та напрямком вильоту протона. На Рис. 5.2 представлені кутові розподіли електричного і магнітного випромінювання при протонному розпаді ^{146}Tm . Звідси можна бачити, що з ростом значення кута електри-

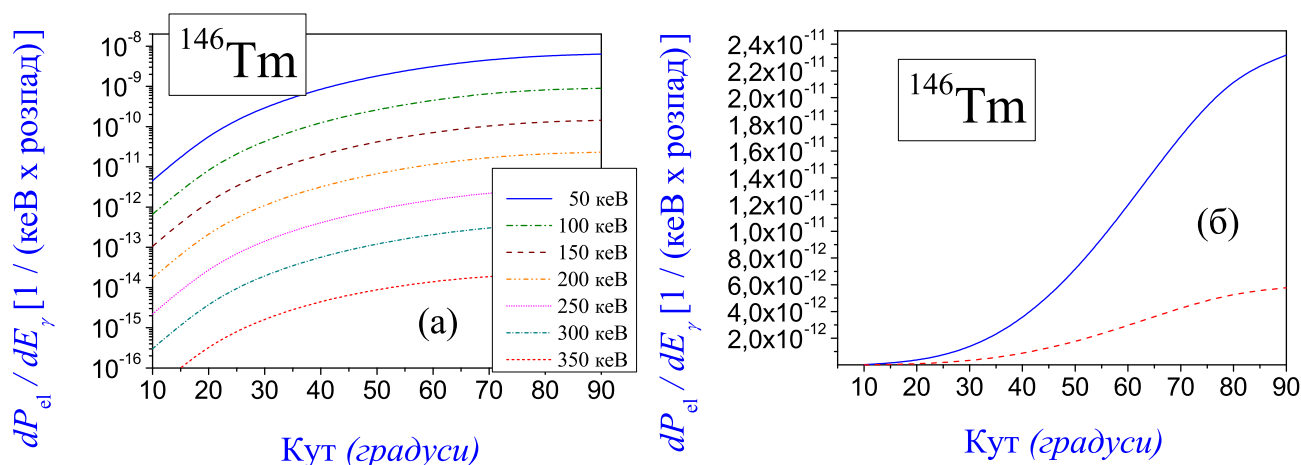


Рис.5.2 Кутові розподіли гальмівного випромінювання фотонів при протонному розпаді ядра ^{146}Tm : (а) електрична компонента випромінювання dp_{el} , обчислена при різних енергіях випромінених фотонів; (б) електрична компонента dp_{el} (суцільна лінія) і магнітна компонента $dp_{mag,1}$ (штрихова лінія) для обраної енергії фотона 200 кеВ. Можна бачити, що обидва спектра пропорційно зростають з ростом кута.

чна й магнітна компоненти зростають пропорційно. З Табл. 5.1 ясно видно, що виділити значення кута, при яких магнітне випромінювання максимальне сильно проявляється на фоні електричного, не вдається.

5.7.2. Як саме змінюються електричне й магнітне випромінювання у залежності від відстані між протоном і дочірнім ядром?

У релятивістських моделях випромінювання у зіткненнях нуклонів між собою та з ядрами (при проміжних енергіях) розрахунки переважно виконуються у імпульсному представленні. Такі підходи практично втрачають інформацію про те, наскільки сильним є випромінювання у залежності від відстані між центрами мас двох ядерних фрагментів. Однак, істотно думати, що фотони випромінюються з різною інтенсивністю у залежності від цієї відстані. Можна припустити, що електричні й магнітні фотони випромінюються по-різному у залежності від відстані. Поставимо наступні запитання:

1. Може магнітне випромінювання бути сильнішим від електричного?
2. Як змінюються електричне й магнітне випромінювання у залежності від

Кут θ	Ймовірність випромінювання		
	Електрична компонента dp_{el}	Магнітна компонента $dp_{mag,1}$	$dp_{mag,1}/dp_{el}$
10°	$1.704 \cdot 10^{-14}$	$4.198 \cdot 10^{-15}$	0.24630
20°	$2.580 \cdot 10^{-13}$	$6.357 \cdot 10^{-14}$	0.24636
30°	$1.192 \cdot 10^{-12}$	$2.940 \cdot 10^{-13}$	0.24647
40°	$3.329 \cdot 10^{-12}$	$8.212 \cdot 10^{-13}$	0.24665
50°	$6.952 \cdot 10^{-12}$	$1.716 \cdot 10^{-12}$	0.24692
60°	$1.188 \cdot 10^{-11}$	$2.939 \cdot 10^{-12}$	0.24730
70°	$1.727 \cdot 10^{-11}$	$4.281 \cdot 10^{-12}$	0.24779
80°	$2.158 \cdot 10^{-11}$	$5.361 \cdot 10^{-12}$	0.24841
90°	$2.319 \cdot 10^{-11}$	$5.779 \cdot 10^{-12}$	0.24916

Табл. 5.1. Електрична й магнітна компоненти випромінювання у залежності від кута θ між напрямками вильоту протона і випромінювання фотона при енергії фотона 200 кеВ. Можна бачити, що відношення магнітного випромінювання до електричного практично не змінюється при зміні цього кута.

відстані між протоном і ядром?

3. Яке електричне і магнітне випромінювання з області тунелювання?

Введемо нові визначення ймовірностей випромінювання гальмівних фотонів з обраної просторової області. У представленому формалізмі випромінювання у залежності від відстані визначається за радіальними інтегралами $J_1(l_i, l_f, n)$, $J_2(l_i, l_f, n)$ і $J_3(l_i, l_f, n)$ у (Д.49) і (Д.51) [див. стор. 461], де інтегрування виконується по всьому просторовому діапазону. Тому, щоб одержати випромінювання лише з довільно обраного інтервалу $r \in [r_1, r_2]$, ми розглянемо інтеграл вигляду

$$J_m(l_i, l_f, n; r_1, r_2) = \int_{r_1} r_2 f_m(r) dr, \quad (5.24)$$

де $m = 1, 2, 3$ і $f_m(r)$ — підінтегральна функція відповідного радіального інтеграла $J_m(l_i, l_f, n)$, визначеного у (Д.49) або (Д.51). Зокрема, $J_m(l_i, l_f, n; r_1, r_2)$ переходить у $J_m(l_i, l_f, n)$ при $r_1 \rightarrow 0$ і $r_2 \rightarrow +\infty$. Тепер, щоб розглянути випромінювання з достатньо малої області Δr при обраній відстані r , одержимо

$$J_m(l_i, l_f, n; r, r + \Delta r) = \int_r^{r + \Delta r} r + \Delta r f_m(r') dr'. \quad (5.25)$$

Звідси визначимо амплітуду ймовірності випромінювання від відстані r

$$\begin{aligned} J_m(l_i, l_f, n; r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{J_m(l_i, l_f, n; r, r + \Delta r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \int_r^{r + \Delta r} r + \Delta r f_m(r') dr' = \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} f_m(r) \int_r^{r + \Delta r} r + \Delta r dr' = f_m(r) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \Delta r = f_m(r). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Далі, матричні елементи й ймовірність випромінювання з вже включеною залежністю від відстані r ми визначимо так, як і раніше, де замість радіальних інтегралів $J_m(l_i, l_f, n)$ скористаємося введеними $J_m(l_i, l_f, n; r)$. Для позначення нових величин, що вже залежать від відстані r , ми будемо включати змінну r у дужки відповідних символів.

На Рис. 5.3 та Рис. 5.6 показана поведінка магнітної компоненти $dp_{\text{mag},1}(r)$ на фоні електричної $dp_{\text{el}}(r)$ у залежності від відстані r . Видно, що поведінка обох функцій є подібною: у зовнішній області вони осцилюють (маючи максимуми і ями у близьких просторових областях), тоді як в області тунелювання мають монотонний характер з можливою однією ямою. У цілому, магнітне випромінювання подавлює повне випромінювання на всій просторовій області. Випромінювання із внутрішньої області до бар'єра є найбільш слабким, а із зовнішньої області — найбільш сильним.

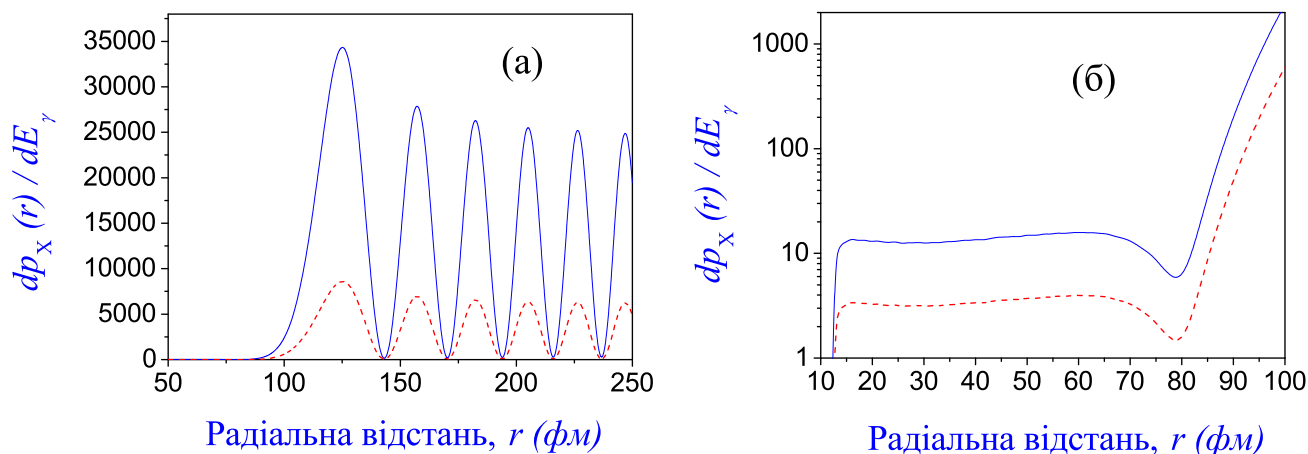


Рис. 5.3 Поведінка магнітної компоненти $dp_{\text{mag},1}(r)$ і електричної компоненти $dp_{\text{mag},1}(r)$ випромінювання у залежності від відстані r між протоном та центром мас дочірнього ядра при енергії 200 кеВ випроміненого фотона (при $\theta = 90^\circ$). (а) Магнітна компонента $dp_{\text{mag},1}(r)$ (штрихова лінія) і електрична компонента $dp_{\text{el}}(r)$ (суцільна лінія) в області до 250 фм. Видно, що на зовнішній області за бар'єром обидві функції осцилюють однаково, тоді як в області тунелювання вони значно менше. (б) Магнітна компонента $dp_{\text{mag},1}(r)$ (штрихова лінія) і електрична компонента $dp_{\text{el}}(r)$ (суцільна лінія) в області тунелювання (до 80 фм). Видно, що в цій області обидві функції мають монотонну поведінку (з можливою однією ямою, але без єдиної осциляції). При виході за межі бар'єра в зовнішню область починається перша осциляція з наступним різким зростаючим піком (що вказує на більш сильне випромінювання із зовнішньої області в порівнянні з областю тунелювання, тобто при тунелюванні випромінювання слабкіше). Також видно, що при виході з області бар'єра у внутрішню область (близько 12 фм) починається сильний спад обох функцій (з осциляціями) — це вказує на надзвичайно мале випромінювання із просторової області ядра.

Зміна корекції магнітної компоненти $dp_{\text{mag},2}(r)$ на фоні електричної $dp_{\text{el}}(r)$ у залежності від відстані r показана на Рис. 5.5. У цілому, вона ви-

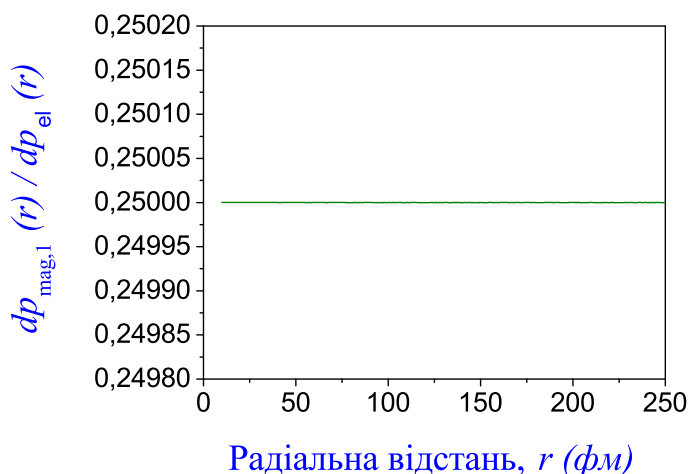


Рис.5.4 Відношення магнітної компоненти до електричної $dp_{\text{mag},1}(r) / dp_{\text{el}}(r)$ (суцільна лінія). Видно, що це співвідношення зберігається у всьому діапазоні відстаней, однаково як в області тунелювання, так і в зовнішній області.

являється суттєво слабкішою. Цікаво відзначити, що в області тунелювання вона постійно зростає, на відміну від електричної й магнітної компонент (див. Рис. 5.6). Це викликає різкий пік функції $dp_{\text{mag},2}(r) / dp_{\text{el}}(r)$ при виході з області бар'єра, як показано на Рис. 5.5 (б). Цей пік міг би викликати інтерес, оскільки він виникає близ другої точки повороту, тобто указує на зовнішню просторову границю бар'єра. Але, на жаль, цей пік надзвичайно слабкий (на фоні повного спектра), для того щоб можна було далі шукати які-небудь можливі способи його експериментального виявлення.

5.7.3. Спектри випромінювання при енергії фотонів поблизу нуля

З'ясуємо, як саме веде себе спектр, коли енергія фотонів прямує до нуля. Чи спектр безмежно зростає або прямує до деякої скінченої величини?

Для фотонів низьких енергій прийнято виділяти два основні підходи. Перший підхід починається з відомої роботи [176], написаної Лоу (Low), та він заснований на застосуванні теореми для м'яких фотонів (soft-photon theorem) на всі процеси ядерного гальмівного випромінювання. Другий підхід заснований на застосуванні наближення Фешбаха й Энні [177], яке є більш ефе-

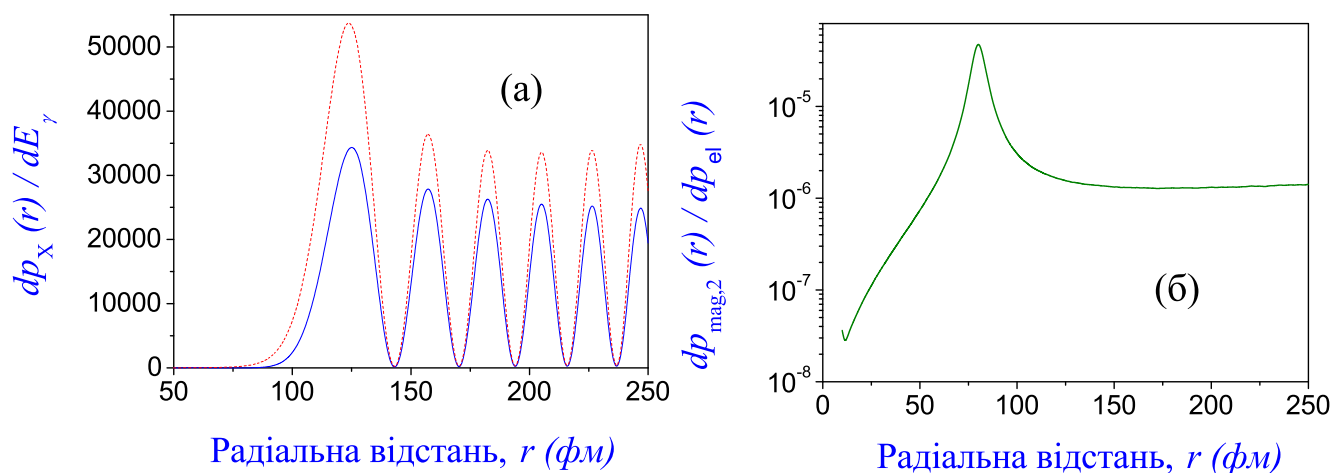


Рис.5.5 Поведінка корекції магнітної компоненти випромінювання $dp_{\text{mag},2}(r)$ у залежності від відстані r між протоном та центром мас дочірнього ядра при енергії 200 кеВ випроміненого фотона (при $\theta = 90^\circ$). (а) Корекція магнітної компоненти $dp_{\text{mag},2}(r) \times 10^6$ (штрихова лінія) і електрична компонента $dp_{\text{el}}(r)$ (суцільна лінія) в області до 250 фм. Видно, що на зовнішній області за бар'єром обидві функції осцилюють однаково, тоді як в області тунелювання (до 80 фм) вони значно менше. (б) Відношення корекції магнітної компоненти до електричної $dp_{\text{mag},2}(r) / dp_{\text{el}}(r)$. Можна бачити, що спостерігається різкий пік близько до 80 фм (що відповідає зовнішній точці повороту).

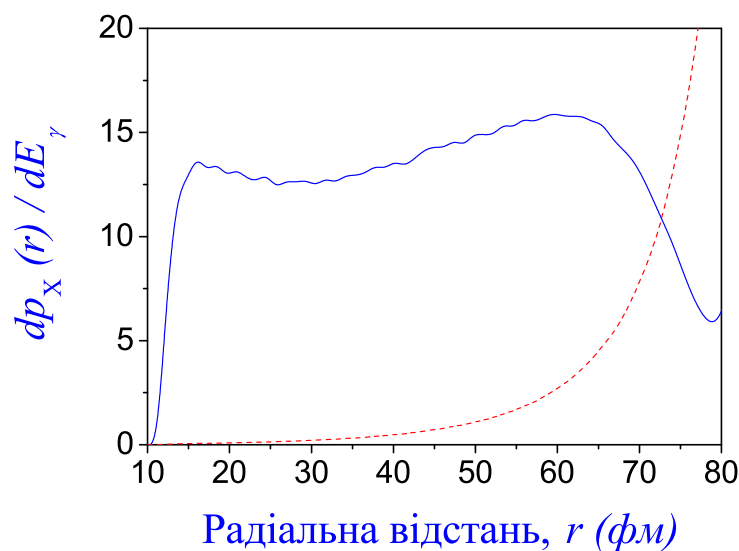


Рис.5.6 Корекція магнітної компоненти $dp_{\text{mag},2}(r) \times 10^5$ (штрихова лінія) і електрична компонента $dp_{\text{el}}(r)$ (суцільна лінія) в області тунелювання. Видно, що в області тунелювання ці дві функції поведуться принципово по різному. Цим можна пояснити наявність піка у кривій на попередньому рисунку 5.6 (б).

ктивним поблизу резонансів (див. також [25]). Однак, як було відзначено у [25] (див. стор. 376), існує й інший шлях розвитку цієї теорії — потенціальний, до якого можна віднести й нашу модель. Відповідно до теорії квантової електродинаміки, при прямуванні енергії фотонів до нуля виникає розбіжність у розрахунку матричного елемента (відома у літературі за назвою “інфрачервона катастрофа”, див. стор. 258–273 у [161]; стор. 194–200 у [178]; стор. 194, 225, 231 у [113]). Однак, у нашому підході ми одержуємо збіжні інтеграли й кінцеве значення ймовірності гальмівного випромінювання. Тобто ніякої інфрачервоної катастрофи не існує у нашому підході. Наприклад, розглянемо перший інтеграл у (Д.49) [див. стор. 461] при $n = 0$ та $w_{\text{ph}} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{w_{\text{ph}} \rightarrow 0} J_1(l_i, l_f, n = 0) &= \lim_{w_{\text{ph}} \rightarrow 0} \int_0^{R_0=1/k} \frac{dr_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_0(kr) r^2 dr + \\ &+ \lim_{w_{\text{ph}} \rightarrow 0} \int_{R_0=1/k}^{+\infty} \frac{dr_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_0(kr) r^2 dr. \end{aligned} \quad (5.27)$$

При $w_{\text{ph}} \rightarrow 0$ маємо $j_0(kr) = \sin(kr)/(kr) \rightarrow 1$ ($k = w_{\text{ph}}/c$). Перший доданок збігається (відповідно до обраних граничних умов, $\chi_f(r) = 0$ при $r = 0$, де $R_f(r) = \chi_f(r)/r$). Другий доданок не включає малі енергії фотона ($k > 1/R_0$) і тому є звичайним інтегралом у розрахунках, тобто збігається. Аналогічний результат отримується при довільному n і для $J_2(l_i, l_f, n)$, $\tilde{J}(l_i, l_f, n)$. На цій основі, усі матричні елементи p_{el} , $p_{\text{mag},1}$ і $p_{\text{mag},2}$ (і кутові матричні елементи) збігаються при довільному виборі квантових чисел l_i, l_f . Відповідно до (5.18), маємо

$$\lim_{w_{\text{ph}} \rightarrow 0} \frac{dP(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = \lim_{w_{\text{ph}} \rightarrow 0} \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \Omega_f)}{d \cos \theta_f} + \text{с. с.} \right\} = 0. \quad (5.28)$$

На Рис. 5.7 показано спектри фотонів до 2.5 кеВ. При прямуванні енергії фотонів до нуля ймовірність випромінювання зростає, плавно досягаючи максимуму, потім знижується ($dp \rightarrow 0$ при $w \rightarrow 0$). Скінчений максимум при

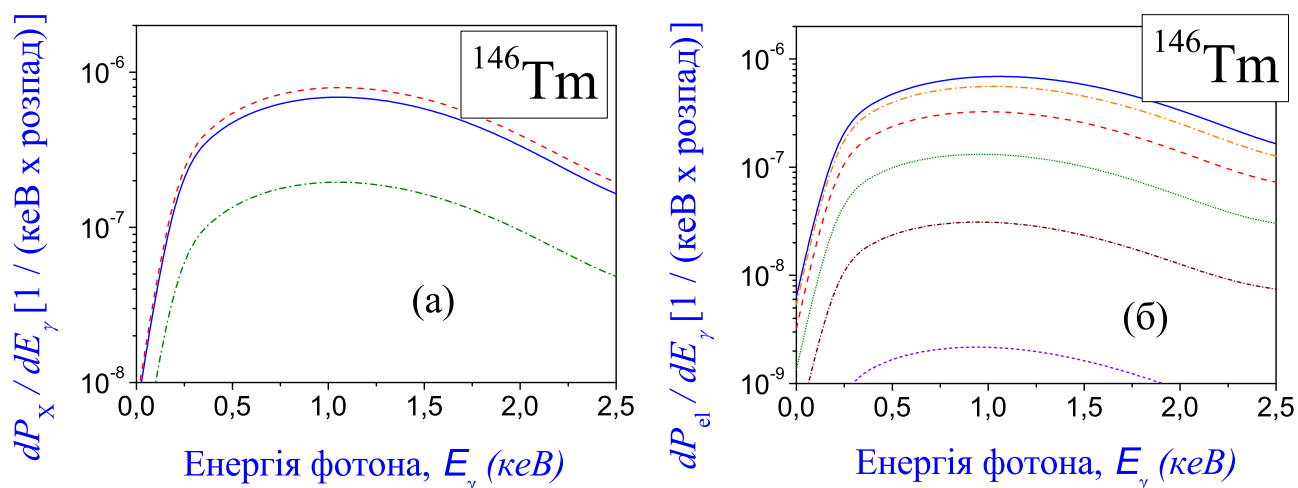


Рис.5.7 Спектри фотонів білянульових енергій (до 2.5 кеВ): (а) повний спектр (суцільна лінія), електрична компонента dp_{el} (штрихова лінія) і магнітна компонента $dp_{mag,1}$ (штрих-пунктирна лінія) при $\theta = 90^\circ$; (б) повний спектр у залежності від кута θ (суцільна лінія — для $\theta = 90^\circ$, штрих-пунктирна лінія — для $\theta = 75^\circ$, штрихова лінія — для $\theta = 60^\circ$, коротка пунктирна лінія — для $\theta = 45^\circ$, коротка штрих-пунктирна лінія — для $\theta = 30^\circ$, коротка штрихова лінія — для $\theta = 15^\circ$).

1,5 кеВ вказує на відсутність інфрачервоної катастрофи у цій моделі.

5.7.4. Спектри у розсіянні протонів проміжних енергій на ядрах

Проаналізуємо розсіяння протонів проміжних енергій на ядрах. Будемо обчислювати переріз випромінювання за формулою (5.21) [див. стор. 128], нормуємо спектр на одну точку експериментальних даних. Потенціал взаємодії між протоном і ядром визначимо як для протонного розпаду ядер⁴. На Рис. 5.8 показано розрахунки для $p + {}^9\text{Be}$, $p + {}^{12}\text{C}$ і $p + {}^{208}\text{Pb}$ при енергії протонів $T_{lab} = 140$ MeV у порівнянні з експериментальними даними й розрахунками за іншими моделями. З Рис. 5.8 (а) видно, що модель у цьому Розділі не гір-

⁴Труднощі у досягненні збіжності у комп'ютерних розрахунках є ключовою проблемою при отриманні достовірних значень перерізів випромінювання. На думку автора, ця проблема є одною з основних причин, чому потенціальні підходи до визначення спектрів випромінювання при проміжних енергіях не розвинені на належному рівні дотепер. Щоб досягти збіжності, при одержанні спектрів на Рис. 5.8 і 5.9 на радіальній області від R_{as} до R_{max} був застосований підхід, описаний у Додатку роботи [63]. Для більшої ясності, використано однакові значення параметрів: $R_{as} = 0.9 \times (R_R + 7a_R)$, R_{max} обране таким, щоб його подальше збільшення не міняє спектр помітно, R_R і a_R — параметри потенціалу за формулою (29) у [64].

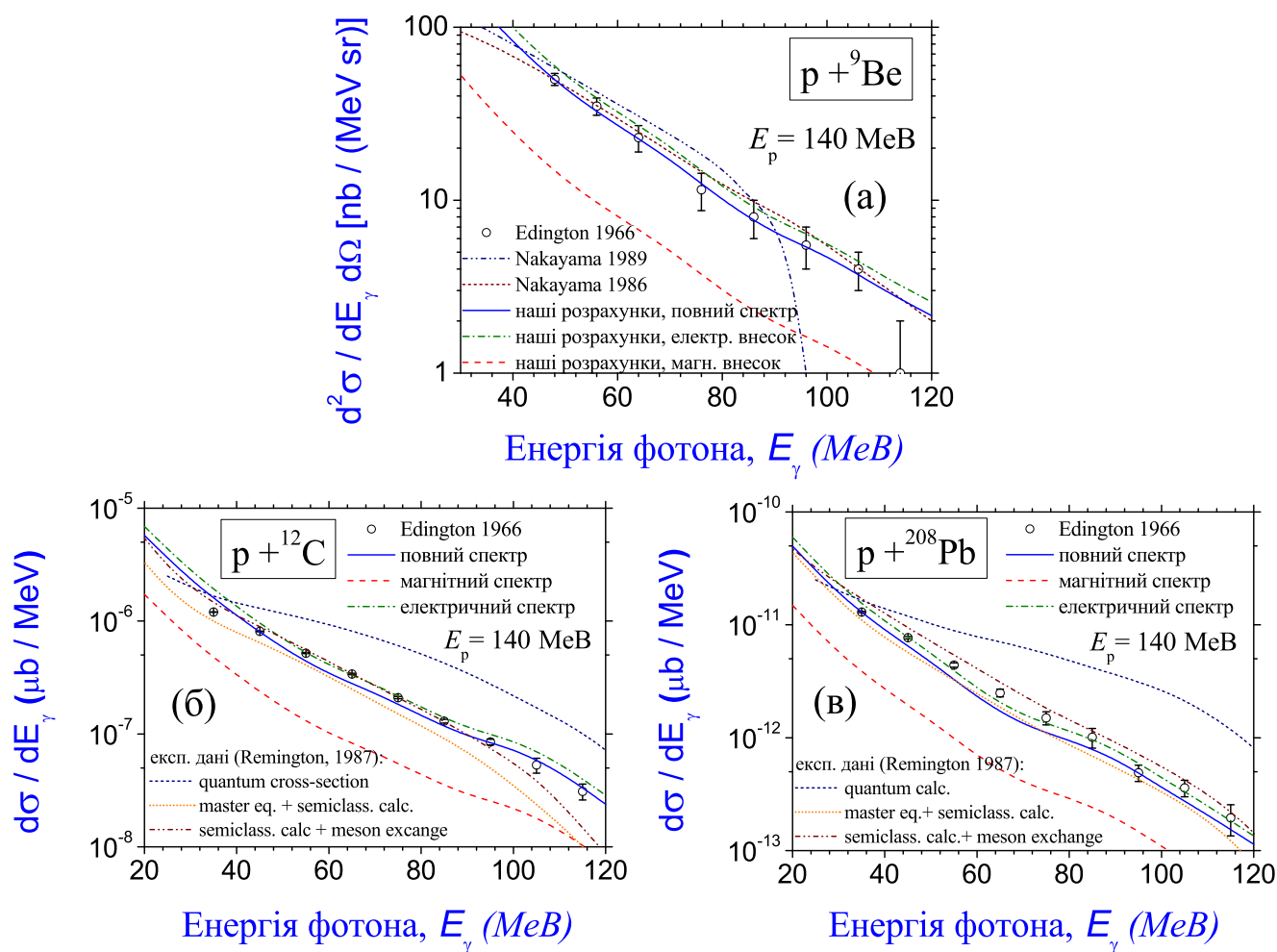


Рис. 5.8 Перерізи випромінювання у зіткненнях протонів з ядрами у лабораторній системі відліку при енергії протонів $T_{\text{lab}} = 140 \text{ MeV}$ (обрано кут випромінювання фотонів $\vartheta = 90^\circ$): (а) Зіставлення розрахунків для $p + {}^9\text{Be}$ на основі моделі, викладеної у цьому розділі (суцільна лінія — повний спектр, штрих-пунктирна лінія — електрична компонента випромінювання, штрихова лінія — магнітна компонента випромінювання), з результатами роботи (Nakayama 1986: [179], коротка штрихова лінія), результатами роботи (Nakayama 1989: [162], штрих-двічі пунктирна лінія) і експериментальними даними (Edington 1966: [180]); (б, в) Зіставлення розрахунків для $p + {}^{12}\text{C}$ і $p + {}^{208}\text{Pb}$ на основі моделі, викладеної у цьому розділі (суцільна лінія — повний спектр, штрих-пунктирна лінія — електрична компонента випромінювання, штрихова лінія — магнітна компонента випромінювання) з обчисленнями Ремінгтона, Блана й Бертча у роботі (Remington 1987: [181], штрих-двічі пунктирна лінія — обчислення у формалізмі майстер-рівняння із застосуванням квазікласичної формули для перерізу гальмівного випромінювання, коротка пунктирна лінія — переріз, отриманий на основі квазікласичної формули із множенням на фактор 2 для обміну мезонами, і коротка штрихова лінія — квантові розрахунки перерізу гальмівного випромінювання) і експериментальними даними (Edington 1966: [180]).

ше описує експериментальні дані [180] для $p + {}^9\text{Be}$ для енергій від 20 MeV до 120 MeV у порівнянні з результатами, отриманими Накаямою і Бергчем у роботі [179], обчисленнями Накаями у роботі [162]. На малюнку (б) досягнуто непоганої згоди між розрахунками та експериментальними даними [180] для $p + {}^{12}\text{C}$ у порівнянні з розрахунками Ремінгтона (Remington), Блана (Blann) і Бергча у роботі [181]. Порівняння з розрахунками авторів цієї роботи (представленими на Рис. 1 у тій роботі) показує: для фотонів аж до 90 MeV наша крива ближче розташована до спектра у формалізмі майстер-рівняння із застосуванням квазікласичної формули для перерізу випромінювання (див. штрих-двічі пунктирну лінію на цьому малюнку), і спектра на основі квазікласичної формули із множенням на множник 2 для обміну мезонами (див. коротку пунктирну лінію на малюнку). Від 90 до 120 MeV досягнуто кращої згоди з експериментом у порівнянні з результатами [181]. Перевага результатів моделі цього розділу із квантовими розрахунками у роботі [181] (див. коротку штрихову лінію на малюнку) підтверджується для високих енергій. На малюнку (в) зіставлено наші розрахунки та результати роботи [181] для $p + {}^{208}\text{Pb}$.

На Рис. 5.9 показано перерізи випромінювання по моделі для розсіяння $p + {}^9\text{C}$, $p + {}^{64}\text{Cu}$ і $p + {}^{107}\text{Ag}$ у порівнянні з експериментальними даними [182] при енергії протонів $T_{\text{lab}} = 72$ MeV. Тут показано повний спектр за формулою (5.21) і скоректований спектр за формулою (5.21) (відповідно до формули (13) у роботі [31]). Порівняння із квантовими розрахунками у [31] (див. Рис. 1 у тій роботі) вказує на більшу збіжність обчислень на основі моделі у цьому розділі. Роль мультипольних компонент у кутовому аналізі є істотним продовженням таких досліджень, що викладено у Додатку Д.5 [див. стор. 464].

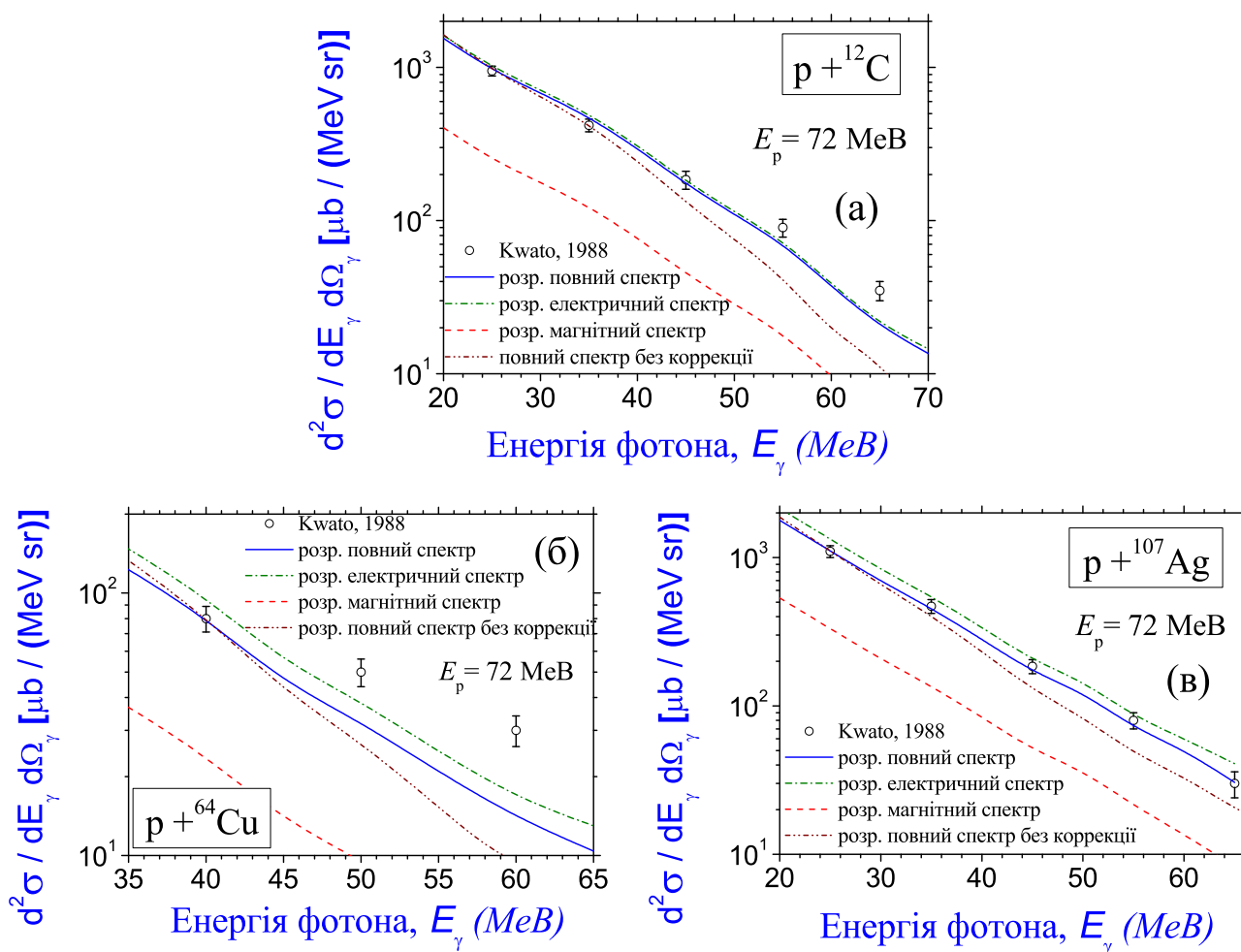


Рис.5.9 Перерізи випромінювання у розсіянні протонів на ядрах при енергії протонів $T_{\text{lab}} = 72 \text{ MeV}$ (у розрахунках обрано кут випромінювання фотонів $\vartheta = 90^\circ$): Порівняння для $p + {}^{12}\text{C}$ (а), $p + {}^{64}\text{Cu}$ (б) і $p + {}^{107}\text{Ag}$ (в) між повним перерізом, отриманим за формулою (5.21) (штрихова двічі-пунктирна лінія), скоректованим перерізом, отриманим за формулою (5.21), з розділенням на k_f (суцільна лінія) і експериментальними даними (Kwato 1988: [182]). На малюнках додано електричну компоненту (штрих-пунктирна лінія) і магнітну компоненту (штрихова лінія).

5.8. Головні результати і висновки до Розділу 5

У Розділі викладено нову модель гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує протонний розпад ядер і зіткнення протонів з ядрами у діапазоні від білянульових до проміжних енергій [65]. Модель включає спіновий формалізм, потенціальний підхід до опису взаємодії протонів з ядрами, а оператор випромінювання включає компоненту магнітного випромінювання. За допомогою цієї моделі досліджено роль магнітного випромінювання, що входить у повний спектр випромінювання при протонному розпаді. Для таких досліджень обрано ядро ^{146}Tm . Вперше отримано наступне.

1. Для фотонів від 50 до 300 кеВ магнітне випромінювання дає внесок близ 28 відсотків у спектр (див. Рис. 5.1), тобто виявляється не малим та його слід враховувати в оцінках спектрів випромінювання в розпадах ядер з вильотом заряджених фрагментів з ненульовим спіном. Однак, включення магнітної компоненти у розрахунок подавляє повну ймовірність випромінювання: таке послаблення випромінювання визначається величиною $P_{\text{el}}/P_{\text{full}} \simeq 1.14$, що є більшою одиниці. Цей ефект послаблення випромінювання можна пояснити наявністю чималої деструктивної інтерференції між електричною та магнітною компонентами в усьому розглянутому діапазоні енергій випромінювання. Відносні частинки електричної й магнітної компонент у повному спектрі не змінюються при зміні енергії випроміненого фотона. Корекція до магнітної компоненти $dp_{\text{mag},2}$ у 10^6 разів менше ніж електрична та магнітна компоненти.
2. З ростом кута θ між напрямками руху протона, що вилітає, і випромінювання фотона електрична й магнітна компоненти зростають пропорційно (див. Рис. 5.2), а відношення між ними зберігається (див. Табл. 5.1). Тому виділити значення кута, при якому магнітне випромінювання значно сильніше проявляється на фоні електричного, не вдається.

3. Магнітна компонента $dp_{\text{mag},1}(r)$ залежить від відстані r між центрами мас протона й ядра подібно до електричної компоненти $dp_{\text{el}}(r)$ (їх відношення не змінюється на відстані від 5 до 250 фм). У зовнішній області магнітна компонента $d\tilde{P}_{\text{mag},1}$ і електрична компонента $d\tilde{P}_{\text{el}}$ осцилюють (маючи максимуми і ями у близьких радіальних координатах), в області тунелювання вони мають монотонний характер з однієї ямою (див. Рис. 5.3). Магнітне випромінювання послаблює повне випромінювання на всій просторовій області. Випромінювання із внутрішньої області до бар'єра є найбільш слабким, із зовнішньої області — найбільш сильним.
4. Зміна корекції магнітної компоненти $dp_{\text{mag},2}(r)$ суттєво менше електричної $dp_{\text{el}}(r)$ (див. Рис. 5.5). В області тунелювання вона монотонно зростає, тоді як електрична і магнітна компоненти мають різкий пік функції $dp_{\text{mag},2}(r)/dp_{\text{el}}(r)$ близ 80 фм при виході з бар'єра.
5. При прямуванні енергії фотонів до нуля ймовірність випромінювання зростає, досягаючи максимуму (при енергії фотона менш 1,5 кеВ), потім монотонно знижується до нуля (див. Рис. 5.7). Кутовий розподіл випромінювання є подібним до вивченого вище у діапазоні від 50 до 350 кеВ. Інфрачервоної катастрофи у такому підході не існує.

Відзначимо, що модель у цьому Розділі успішно описує випромінювання фотонів проміжних енергій при розсіянні протонів на ядрах ${}^9\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ і ${}^{208}\text{Pb}$ при енергії протонів $T_{\text{lab}} = 140$ МеВ (для енергій фотонів до 120 МеВ, див. Рис. 5.8), та ядрах ${}^9\text{C}$, ${}^{64}\text{Cu}$ і ${}^{107}\text{Ag}$ при енергії протонів $T_{\text{lab}} = 72$ МеВ (для енергій фотонів до 60 МеВ, див. Рис. 5.9).

РОЗДІЛ 6

НОВИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРОТОН-ЯДЕРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ З АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ СПЕКТРІВ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

6.1. Вступ

Оптична модель грає суттєву роль у теорії ядерних реакцій. Усі фізичні аспекти повинні бути враховані при побудові цієї теорії, з метою досягти опису експериментальних даних найкращим чином, включаючи взаємодію між нуклонами, динаміку реакцій, нелокальні квантові властивості тощо. Важливим є обрання численних методів, наближень, граничних умов, що застосовуються у розрахунках перерізів. Однак, іноді застосування різних вхідних параметрів можуть призвести до близьких або навіть однакових перерізів. Такі невизначеності виявляються також у параметрах потенціалів взаємодії.

У такій ситуації аналіз гальмівного випромінювання відкриває незалежний шлях до здобуття нової інформації про потенціали взаємодії. Тут, випромінюванню фотонів при розсіянні протонів на ядрах вже було приділено достатньо уваги. За тривалий час вимірювалися перерізи випромінювання фотонів у реакціях з протонами [180, 183, 182, 2, 3, 4, 25, 97, 184, 5, 6], та розроблялися моделі з метою визначити фотони [179, 162, 185, 186, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 64, 29]. Зокрема, спектри фотонів залежать від динаміки розсіяння протона на ядрі, яка визначається взаємодією між протоном і ядром. Однак, отримати інформацію про таку взаємодію з аналізу спектрів випромінювання ще не вдавалося.

Проблема полягає у тому, що щоб отримати достовірні значення параметрів потенціалу взаємодії, необхідно досягти надвисоку точність визначе-

ння спектрів; але збіжність розрахунків дуже слабка. Таку проблему відзначали дослідники (див., наприклад, роботу [31]), хто виконував розрахунки з реалістичними потенціалами взаємодії. Додаткова вказівка — це відсутність будь-якої ясної інформації у літературі про визначення параметрів потенціалів саме таким шляхом в той час, коли історія досліджень гальмівного випромінювання у ядерній фізиці є дуже тривалою. У Розділі представлено новий підхід до вирішення такої проблеми для розсіяння протонів на ядрах.

У даному Розділі аналіз починається з реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$, яку раніше було вивчено декількома групами дослідників (див., роботи [180, 184, 4]). Так, автори робіт [184, 4] спостерігали плато у вигляді *горбу округлої форми* (*hump-shaped plateau*) у експериментальних даних при малих енергіях фотонів, що суттєво відрізняється від традиційної форми спектра експоненціального характеру для гальмівного випромінювання, яке раніше було експериментально виявлено Едінгтоном (Edington) та Росом (Rose) у роботі [180]. Більш ретельні виміри випромінювання фотонів при розсіянні протонів на ядрах було проведено колаборацією TAPS [6], результати яких ясно підтвердили існування такого плато у спектрах. З метою з'ясувати таку незвичайну поведінку спектра випромінювання при малих енергіях фотонів, виникла гіпотеза врахувати внутрішню динаміку нуклонів та зіткнення між ними. У такому напрямку раніше Накаяма (Nakayama) та Бертч (Bertsch) визначили суттєву роль нуклон-нуклонної взаємодії у гальмівному випромінюванні при протон-ядерному розсіянні [179, 162, 185]. Однак, виміри випромінювання гальмівних фотонів при α -розпаді вказують на відсутність такого плато округлої форми у спектрах [21, 187]. Співіснування двох принципово різних типів випромінювання фотонів вимагає більш глибокого дослідження внутрішньо-ядерних процесів у ядрах, що можуть формувати випромінювання фотонів. З метою з'ясувати ці питання, у даному Розділі розвивається новий багато-нуклонний формалізм, якого не враховано у Розділі 5.

6.2. Модель

6.2.1. Узагальнене рівняння Паулі для багатонуклонної системи

Відповідно до (5.1) Розділу 5 (див. стор. 123), гамільтоніан розсіяння протона на ядрі, що складається з A нуклонів, можна записати так:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\gamma, \quad (6.1)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \sum_{i=1}^{A+1} \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 + V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1}), \\ \hat{H}_\gamma &= \sum_{i=1}^{A+1} \left\{ -\frac{z_i e}{m_i c} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_i + \frac{z_i^2 e^2}{2m_i c^2} \mathbf{A}_i^2 - \frac{z_i e \hbar}{2m_i c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot} \mathbf{A}_i + z_i e A_{i,0} \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Тут m_i та z_i — маса та електричний заряд нуклона з номером i , $\mathbf{p}_i = -i\hbar \mathbf{d}/d\mathbf{r}_i$ — оператор імпульсу для нуклона з номером i , $V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1})$ — загальна форма потенціалу взаємодії між нуклонами, $\boldsymbol{\sigma}$ — матриці Паулі, $A_i = (\mathbf{A}_i, A_{i,0})$ — потенціал електромагнітного поля, що формується нуклоном з номером i . Введемо координати центрів мас для ядра $\mathbf{R}_A = \sum_{j=1}^A m_j \mathbf{r}_{Aj}/m_A$, координати центра мас повної системи $\mathbf{R} = (m_A \mathbf{R}_A + m_p \mathbf{r}_p)/(m_A + m_p)$, відносні координати $\boldsymbol{\rho}_{Aj} = \mathbf{r}_j - \mathbf{R}_A$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{R}_A$. Отримаємо нові незалежні змінні \mathbf{R} , \mathbf{r} та $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ ($j = 1 \dots A - 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{m_A + m_p} \left\{ \sum_{j=1}^A m_{Aj} \mathbf{r}_{Aj} + m_p \mathbf{r}_p \right\}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_p - \frac{1}{m_A} \sum_{j=1}^A m_{Aj} \mathbf{r}_{Aj}, \\ \boldsymbol{\rho}_{Aj} &= \mathbf{r}_{Aj} - \frac{1}{m_A} \sum_{k=1}^A m_{Ak} \mathbf{r}_{Ak}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

та знаходимо оператори відповідних імпульсів

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_p &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{r}_p} = \frac{m_p}{m_A + m_p} \mathbf{P} + \mathbf{p}, \\
 \mathbf{p}_{Aj} &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{r}_{Aj}} = \\
 &= \frac{m_{Aj}}{m_A + m_p} \mathbf{P} - \frac{m_{Aj}}{m_A} \mathbf{p} + \frac{m_A - m_{Aj}}{m_A} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} - \frac{m_{Aj}}{m_A} \sum_{k=1, k \neq j}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

де $\mathbf{P} = -i\hbar \mathbf{d}/d\mathbf{R}$, $\mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{d}/d\mathbf{r}$, $\tilde{\mathbf{p}}_{Aj} = -i\hbar \mathbf{d}/d\boldsymbol{\rho}_{Aj}$, m_p та m_A — маси протона, що розсіюється на ядрі, та ядра. Ми знаходимо кінетичну енергію незбуреного гамільтоніана (при наближенні $\sum_{j=1}^A m_{Aj} = m_A$):

$$\sum_{i=1}^{A+1} \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 = \frac{1}{2(m_A + m_p)} \mathbf{P}^2 + \frac{m_A + m_p}{2m_p m_A} \mathbf{p}^2 + \hat{T}_{\text{nucl}}. \tag{6.5}$$

Перший член у правій частині отриманого рівняння являє собою кінетичну енергію руху повної протон-ядерної системи, другий член — кінетичну енергію відносного руху протона відносно ядра, та останній член \hat{T}_{nucl} — кінетичну енергію внутрішнього руху нуклонів у ядрі, що має вигляд:

$$\hat{T}_{\text{nucl}} = \sum_{j=1}^{A-1} \frac{1}{2m_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj}^2 - \frac{1}{2m_A} \left\{ \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right\}^2. \tag{6.6}$$

Будемо вивчати оператор випромінювання для системи, що складається з протона та ядра у лабораторній системі, що дає найбільш вагомий внесок у повний спектр випромінювання:

$$\hat{H}_\gamma = -\frac{z_p e}{m_p c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_p - \sum_{j=1}^A \frac{z_j e}{m_j c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_j. \tag{6.7}$$

Тут векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t)$ описує випромінювання фотона, яке формується нуклоном з номером s ($s = p$ — для протона, $s = j$ — для нуклонів ядра). Використовуючи його представлення (5.4) [також див. (5) з роботи [65],

для оператора випромінювання ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma = & -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\cdot\left[\mathbf{R}-\frac{m_p}{M+m_p}\mathbf{r}\right]} \left\{ \frac{1}{M+m_p} \left[e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} z_p + \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} + \right. \\ & \left. + \left[e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{z_p}{m_p} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{p} + \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} - \frac{1}{M} \left[\sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

де зірочка означає комплексне спряження, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації випроміненого фотона ($\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$), \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона, та $w_{\text{ph}} = kc = |\mathbf{k}|c$. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} у кулонівському калібруванні [див. властивості цих векторів у попередньому Розділі 5.3, стор. 124].

6.2.2. Хвильова функція багатонуклонної системи

Перейдемо до більш загального представлення хвильової функції протон-ядерної системи, ніж було введено у Розділі 5. Гальмівне випромінювання фотонів у реакціях при описі ядер на багатонуклонному рівні було досліджено (наприклад, див. роботи [159, 160, 188, 189, 194, 190, 191, 192, 193]). Але такий формалізм був сфокусований на опис ядерних систем з малою кількістю нуклонів. Для досліджень середніх та важких ядер легше буде використати наші попередні розробки (де було досягнуто найбільш гарної згоди в описі існуючої експериментальної інформації для протон-ядерного розсіяння у порівнянні з іншими відомими підходами, див. [65]).

Випромінювання гальмівних фотонів виникає у наслідок відносного руху нуклонів повної ядерної системи. Однак, ми вважаємо, що найбільш інтенсивне випромінювання фотонів формується у наслідок відносного руху протона відносно ядра. Тобто, перш за все, має сенс представити повну хвильову функцію через координати відносного руху цих об'єктів. Ми визначимо хвильову функцію повної ядерної системи як

$$\Psi_s = \Phi_s(\mathbf{R}) \cdot \Phi_{\text{p-nucl},s}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},s}(\beta_A), \quad \Phi_s(\mathbf{R}) = N_s e^{-i\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}}, \quad (6.9)$$

де $s = i$ або f (індекси i та f означають початковий стан, тобто стан перед випромінюванням фотона, та кінцевий стан, тобто стан після випромінювання фотона), \mathbf{K}_s — повний імпульс протон-ядерної системи (у лабораторній системі), $\Phi_s(\mathbf{R})$ — хвильова функція, що описує еволюцію центру мас повної ядерної системи у лабораторній системі, $\Phi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ — функція, що описує відносний рух (з можливим тунелюванням при підбар'єрних енергіях) протона відносно ядра (без опису внутрішнього відносного руху (еволюції) нуклонів у ядрі), $\psi_{\text{nucl},s}(\beta)$ — багатонуклонна функція, що описує внутрішні стани нуклонів у ядрі (вона визначає просторові стани на основі відносних відстаней $\rho_1 \dots \rho_A$ нуклонів ядра відносно центру мас ядра, та спін-ізоспінкові стани також), β_A — множина номерів $1 \dots A$ нуклонів ядра. N_s — фактор нормування, який буде визначено далі.

Відносний рух нуклонів ядра не повинен давати суттєвого впливу на стани розсіяння протона відносно ядра як цілого об'єкта, та тому таке представлення повної хвильової функції можна розглянути як наближення. Однак, внутрішній рух нуклонів відносно один одного в ядрі дає власний внесок у повний спектр випромінювання та його можна оцінити. Ми включимо багатонуклонну структуру у хвильову функцію $\psi_{\text{nucl},s}(\beta_A)$ ядра, та будемо припускати, що хвильова функція відносного руху $\psi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ визначається без такої структури, але з максимальною орієнтацією на протон-ядерний потенціал, який раніше було визначено на основі аналізу експериментальних даних розсіяння протонів на ядрах (багатонуклонні корекції можна буде врахувати далі, як наступний крок у цьому напрямку досліджень). Такий напрямок дозволяє нам зберігати точність хвильової функції відносного руху, що забезпечує найбільш вагомий внесок випромінювання у повний спектр, тоді як роль багатонуклонної структури ядра можна буди оцінити потім (ми робимо таке припущення після досягнення гарної згоди між теорією та експериментом для α -розпаду, якої було досягнуто без врахування багатонуклонної

структури у роботах [56, 59, 57, 58, 60, 61, 62]).

Нерелятивістський гамільтоніан системи, що складається з A нуклонів з дво-нуклонною взаємодією, можна записати як

$$\hat{H} = \hat{T} - \hat{T}_0 + \sum_{i>j=1}^A \hat{V}(ij) + \sum_{i>j=1}^Z \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (6.10)$$

де \hat{T} — оператор кінетичної енергії всіх нуклонів у лабораторній системі, \hat{T}_0 — оператор кінетичної енергії центру мас системи, що складається з усіх нуклонів, у лабораторній системі, член зі першою сумою описує ядерну взаємодію між двома нуклонами, член зі другою сумою — двонуклонна кулонівська взаємодія. Використаємо багатонуклонну функцію ядерної системи у вигляді детермінанта Слетера¹

$$\psi_{\text{nucl},s}(\beta_A) \equiv \psi_{\text{nucl},s}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_p (-1)^{\varepsilon_p} \psi_{\lambda_1}(1) \psi_{\lambda_2}(2) \dots \psi_{\lambda_A}(A). \quad (6.11)$$

Тут сумування виконується за всіма можливими перестановками $A!$ координат та станів нуклонів, ε_p — число перестановок у формалізмі детермінантних хвильових функцій. Однонуклонна функція $\psi_{\lambda_s}(s) = \varphi_{n_s}(\mathbf{r}_s) |\sigma^{(s)}\tau^{(s)}\rangle$ являє собою добуток просторової та спін-ізоспінової функцій, де φ_{n_s} — просторова функція нуклону з номером s , n_s — номер стану просторової функції нуклону з номером s , $|\sigma^{(s)}\tau^{(s)}\rangle$ — відповідна спін-ізоспінова функція. Ми будемо вивчати випромінювання фотонів як збурення ядерної системи, що визначається через оператор випромінювання \hat{H}_γ . Для опису випромінювання фотонів ми будемо розраховувати матричний елемент, що записується через комбіна-

¹Наприклад, див. роботи [195] для огляду основних положень моделі деформованих осциляторних оболонок, роботу [196] для моделі бінарних кластерних конфігурацій легких ядер, пов'язаних у колективних (монопольних та квадрупольних) каналах, дисертацію [197] та роботи [198, 199, 200, 201] для трикластерних структур у ядрах та реакціях.

цію однонуکلонних хвильових функцій у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{\text{nucl},f}(1 \dots A) | \hat{H}_\gamma | \psi_{\text{nucl},i}(1 \dots A) \rangle = \\
& = \frac{1}{A(A-1)} \sum_{k=1}^A \sum_{m=1, m \neq k}^A \left\{ \langle \psi_k(i) \psi_m(j) | \hat{H}_\gamma | \psi_k(i) \psi_m(j) \rangle - \right. \\
& - \left. \langle \psi_k(i) \psi_m(j) | \hat{H}_\gamma | \psi_m(i) \psi_k(j) \rangle \right\}. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

6.2.3. Матричний елемент випромінювання

Знайдемо матричний елемент на основі оператора випромінювання (6.8) та хвильової функції (6.9). Запишемо:

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle = -N_i N_f e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \{F_1 + F_2 + F_3 + F_4\}, \tag{6.13}$$

де

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{m_A + m_p}} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} z_p + \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} \right| \Psi_i \right\rangle, \\
F_2 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{m_A + m_p}} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{z_p}{m_p} - \sum_{j=1}^A \frac{z_{Aj}}{m_A} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} \right| \Psi_i \right\rangle, \\
F_3 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{m_A + m_p}} \left[\sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right] \right| \Psi_i \right\rangle, \\
F_4 &= - \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{m_A + m_p}} \frac{1}{m_A} \left[\sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{Aj}} \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right] \right| \Psi_i \right\rangle. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Перший доданок у цих формулах описує випромінювання фотонів, що виникає за рахунок руху повної ядерної системи у лабораторній системі. Ми будемо аналізувати випромінювання, спричинене відносним рухом нуклонів ядерної системи, тому ми будемо нехтувати першим доданком. Другий доданок описує випромінювання фотона, що виникає за рахунок руху протона відносно ядра, як цілого об'єкта. Такий доданок дає найбільш суттєвий внесок у повний спектр випромінювання. Третій та четвертий доданки описують

випромінювання фотона, що виникає за рахунок руху кожного нуклона ядра відносно інших нуклонів (наприклад, деформація ядра при розсіянні протона та випромінювання фотона пов'язана з такими доданками).

Розрахунки матричного елемента випромінювання достатньо складні, їх викладено у Додатку **Е** [див. стор. 470–477]. Отримаємо:

$$p_1 + p_3 + p_4 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \times \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f, M=m_f+\mu_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i, M=m_i+\mu_i} h_{\mu} g, \quad (6.15)$$

де

$$g = i \mu \left(Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} p_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + \check{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} \right) + \left(Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} p_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} + \check{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right) + f \frac{\hbar m k}{4} Z_A(\mathbf{k}) \left(i \mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^M + \tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^E \right). \quad (6.16)$$

Тут введено новий фактор f , щоб з'ясувати, наскільки інтенсивним є випромінювання, що формується за рахунок динаміки нуклонів ядра та визначається внеском (Е.29) [див. стор. 477, що виникає за рахунок другого доданку у операторі випромінювання (Е.19) на стор. 474], на фоні повного спектра випромінювання. Виявляється, що спектри чутливі до цього коефіцієнта, та його можна знайти з порівняння розрахунків з експериментальними даними. Він характеризує випромінювання за рахунок динаміки нуклонів ядра.

6.2.4. Ймовірність гальмівного випромінювання

Ми визначаємо переріз випромінювання гальмівних фотонів на основі матричного елемента (6.13) (у який включено оператор випромінювання (Е.19) без останнього доданку, що дає найменший внесок у повний спектр, див. роботу [65] для подробиць), відповідно до формалізму роботи [65]. Радіальні хвильові функції $R_l(r)$ розраховуються чисельно відповідно до обраного потенціалу взаємодії між протоном та сферично симетричним ядром. Потенціал

взаємодії між протоном і ядром визначається за формулами (5.22) з параметрами, що обчислюються за формулами (5.23) [див. стор. 129]. Критерій для фітінгу теоретичної кривої обрано таким, щоб виконувалася умова мінімуму наступної функції

$$\varepsilon = \frac{1}{n_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left| \sigma^{(\text{theor})}(E_n) - \sigma^{(\text{exp})}(E_n) \right|, \quad (6.17)$$

де $\sigma^{(\text{theor})}(E_n)$ та $\sigma^{(\text{exp})}(E_n)$ — теоретичні та експериментальні значення перерізів гальмівного випромінювання для обраного ядра при енергії E_n та сумування виконується за всіма значеннями експериментальних даних. Ми будемо шукати такі значення параметрів r_R (для перших розрахунків ми обмежимося наближенням $r_c = r_R$), при яких похибка (6.17) набуває мінімального значення (для простоти, будемо називати такий підхід *методом мінімізації*). Виявляється, що спектр випромінювання більш чутливий до V_R ніж до r_R . Тому ми будемо вивчати вплив параметра r_R на спектр випромінювання при фіксованому V_R , що дано формулою (6.17).

6.3. Аналіз

Почнемо аналіз з реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$, яку було досліджено достатньо глибоко різними експериментальними групами та, саме тому, для неї накопичено достатньо багатий експериментальний матеріал [180, 184, 4]. Однак, автори робіт [180, 184] спостерігали принципово суттєве відхилення своїх експериментальних даних від типової експоненціальної форми спектра гальмівного випромінювання, що раніше було отримано Едінгтоном та Розом у роботі [180]. Це у свій час стало предметом активних дискусій та могло б бути пояснено через підтвердження новими розрахунками. Відзначимо, що новий підхід, описаний у цьому розділі, може бути застосованим для виконання такого аналізу (тобто цей підхід спроможний здобути нової інформації про радіус-параметр r_R протон-ядерного потенціалу) навіть конфлікуючих між

собою експериментальних даних. Таким чином, для аналізу ми оберемо два набіра експериментальних даних: а саме, дані [180] та [184, 4] при відповідній енергії протонів 140 MeV та 145 MeV, та для куту між напрямками випромінювання фотонів та налітаючих протонів, що дорівнює 90° .

Поперш, з'ясуємо, чи змінюються розраховані спектри у залежності від варіації параметра r_R (ми застосовуємо апроксимацію для параметра $r_C = r_R$). Почнемо з розрахунків перерізів на основі першого матричного елемента p_1 , що визначено за формулою (E.21). Результати таких розрахунків при енергії протонів 140 MeV у порівнянні з експериментальними даними [180] представлено на Рис. 6.1 (а). Можна бачити, що спектри слабо

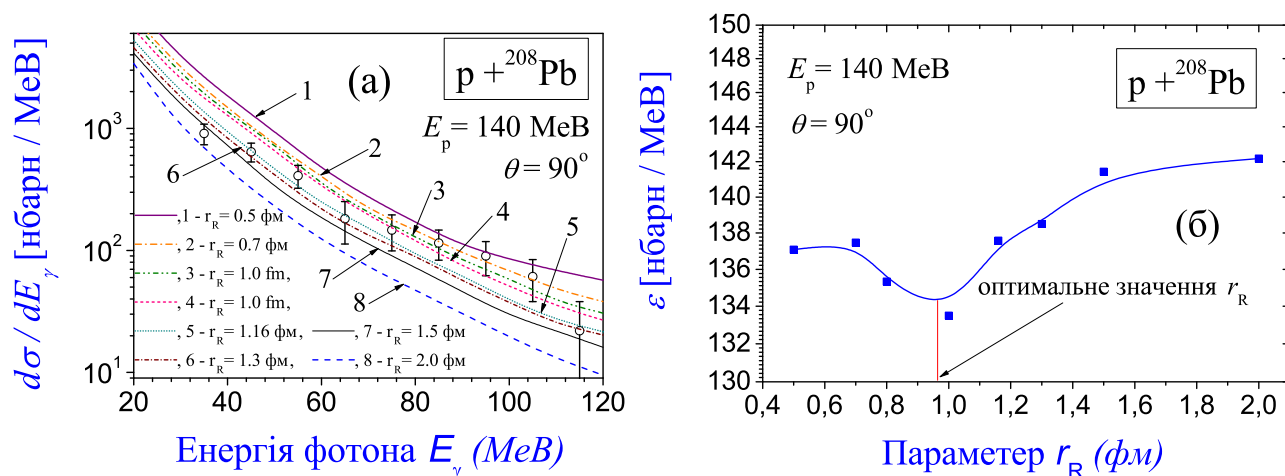


Рис.6.1 (а) Перерізи гальмівного випромінювання для реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$, розраховані на основі першого матричного елемента p_1 у (E.21) при енергії розсіяних протонів 140 MeV у залежності від параметра r_R у порівнянні з експериментальними даними Едінгтона та Роза [180] при куті $\theta = 90^\circ$. Можна бачити слабку чутливість розрахованих спектрів від параметра r_R . А саме, така чутливість повинна бути присутньою після нормування розрахованих спектрів відносно експериментальних даних. (б) Похибки, отримані за допомогою метода мінімізації за формулою (6.17) у залежності від параметра r_R . Можна бачити, що існує ясний стабільний мінімум, який вказує на існування певних оптимальних значень параметра r_R , при яких згода між розрахованими спектрами та експериментальними даними є найкращою.

спадають у залежності від цього параметра. З метою визначити параметр більш ретельно, ми порівнюємо розрахунковий спектр з експериментальними даними та визначимо похибку за формулою (6.17). Пронормуємо кожен роз-

раховану криву на одну й ту ж точку експериментальних даних (ми обираємо експериментальні дані $643 \text{ nb}/(\text{sr} \cdot \text{MeV})$ при енергії 45 MeV та куті 90° , які взяті з Таблиці 8 з роботи [180], див. стор. 544). На наступному Рис. 6.1 (б) можна бачити наявність мінімуму у поведінці функції похибок. Цей факт ясно підтверджує стабільність у визначенні мінімального значення похибки за допомогою цього методу, та ми отримуємо параметр r_R , для якого збіг між теорією та експериментом повинен бути найбільш близьким.

Результати аналізу гальмівного випромінювання при розсіянні $p + {}^{208}\text{Pb}$ при енергії протонів 145 MeV у порівнянні з експериментальними даними [184, 4] представлено на Рис. 6.2. Ми спостерігаємо чутливість розрахованого спектра від параметра r_R [див. Рис. 6.2(a)], та знаходимо ясний мінімум у залежності функції ε , визначеної за формулою (6.17) для r_R [див. Рис. 6.2(б)]. Після порівняння розрахунків з експериментальними даними, ми

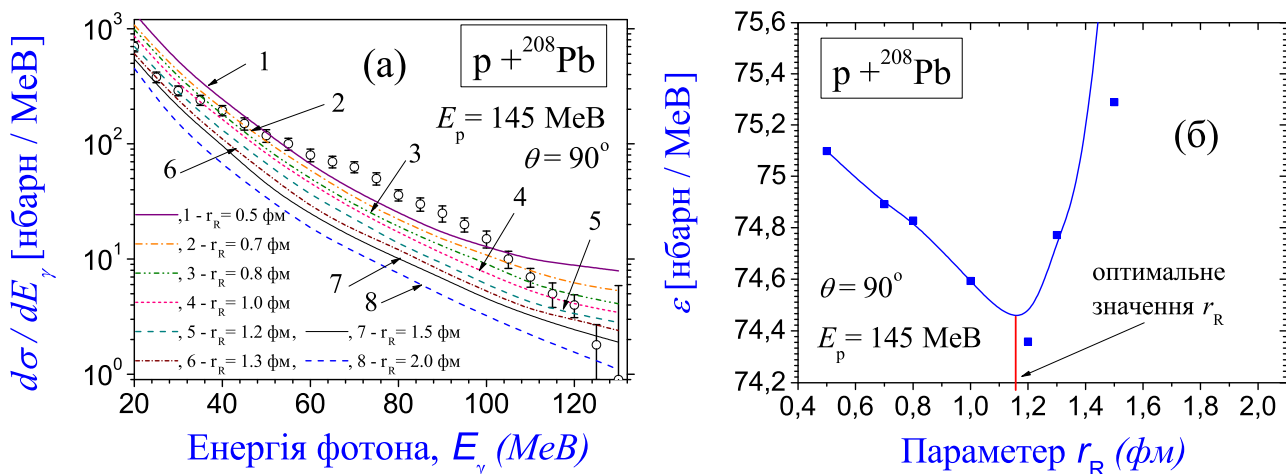


Рис.6.2 (а) Перерізи гальмівного випромінювання для реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$, розраховані на основі першого матричного елемента p_1 у (E.21) при енергії розсіяних протонів 145 MeV у залежності від параметра r_R у порівнянні з експериментальними даними Клайтона (Clayton) *та ін.* [184, 4] при куті $\theta = 90^\circ$. Ми знов отримали слабку чутливість спектрів від параметра r_R . Можна бачити ясну різницю між логарифмічною формою розрахованих спектрів та поведінкою експериментальних даних у вигляді опуклого плато. (б) Похибки, отримані за допомогою метода мінімізації, у залежності від параметра r_R . Можна бачити, що існує мінімум, який вказує на існування оптимальних значень для r_R , при яких згода між теорією та експериментальними даними є найкращою.

спостерігаємо різницю між їх формами. А саме, у розрахункових спектрах ми

отримаємо форму логарифмічного типу, що є типовою для гальмівного випромінювання при α -розпаді та поділі (де саме нами було досягнуто найбільш гарної згоди між розрахунками та існуючими експериментальними даними, див. роботи [57, 59, 58] та [63] для подробиць). У той-же час, експериментальні дані [180, 184, 4] мають декілька іншу поведінку з малим горбком опуклого типу у області енергій фотонів 60–100 MeV [ця яма видна найбільш ясно на Рис. 6.2(a)]. Звідси ми робимо висновок про те, що експериментальні дані для протон-ядерного розсіяння та для α -розпаду і поділу мають різну поведінку, що повинно бути пов'язаним з якимись фізичними причинами, які невідомі.

Наші розрахунки спектрів гальмівного випромінювання для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при 140 MeV на основі другого матричного елемента $p_2^{(\text{dip})}$ у (E.22) та третього матричного елемента p_3 у (E.23) дають подібні результати (див. Рис. 6.3 та 6.4). Ми отримуємо подібні форми логарифмічного типу для всіх розра-

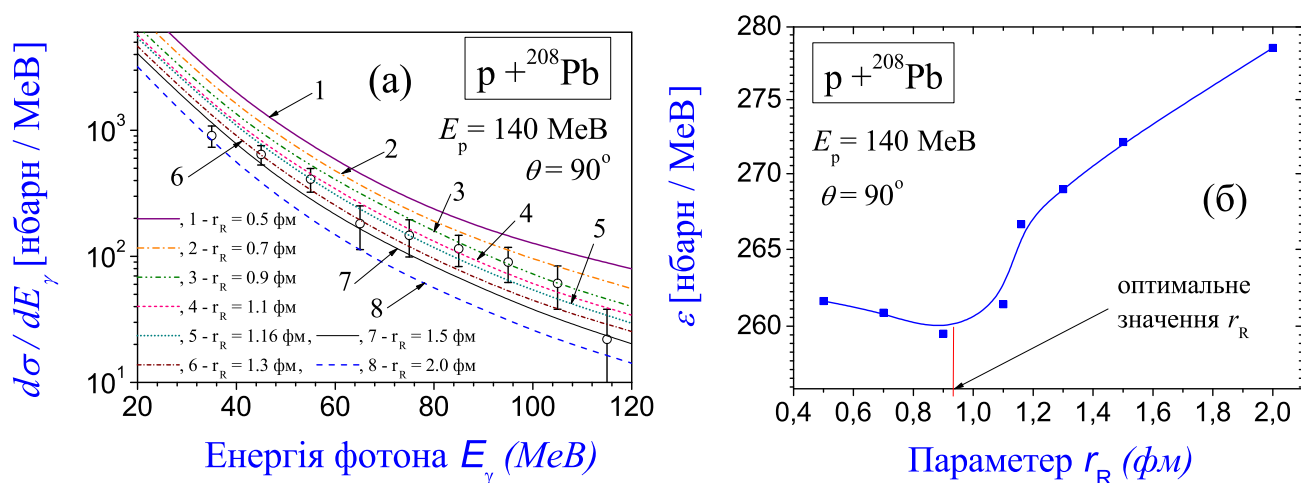


Рис.6.3 (а) Перерізи гальмівного випромінювання для реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$ при 140 MeV, розраховані на основі другого матричного елемента p_2 у (E.22) при різних значеннях параметра r_R у порівнянні з експериментальними даними Едінгтона та Роза [180] при куті $\theta = 90^\circ$. (б) Похибки, отримані за допомогою метода мінімізації, у залежності від параметра r_R .

хованих спектрів. Такі ж результати ми отримуємо у розрахунках спектрів при енергії 145 MeV. Стає ясним, що всі такі розраховані спектри не описують (та не пояснюють) плато з опуклим горбком у експериментальних даних [180, 184] (див. Рис. 6.2). Похибки для всіх нових розрахунків виявля-

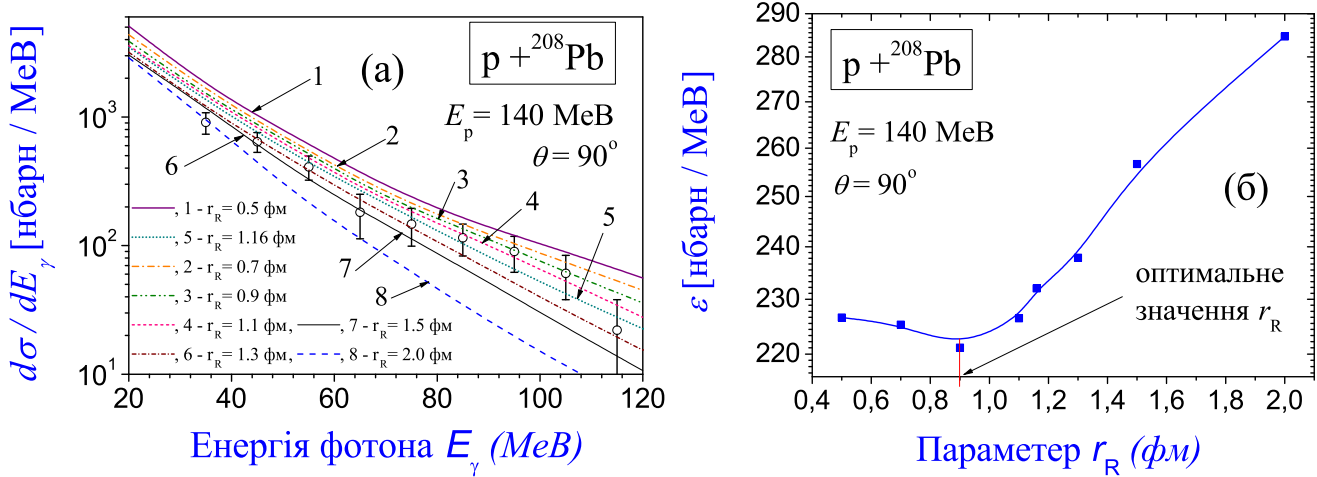


Рис.6.4 (а) Перерізи гальмівного випромінювання для реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$ при 140 MeV, розраховані на основі третього матричного елемента p_3 у (Е.23) при різних значеннях параметра r_R , у порівнянні з експериментальними даними Едінгтона та Роза [180] при куті $\theta = 90^\circ$. (б) Похибки, отримані за допомогою метода мінімізації, у залежності від параметра r_R .

Матричний елемент p_i у розрахунках перерізів	Аналіз даних [180]		Аналіз даних [184, 4]	
	параметр p_R , фм	похибка ε	параметр p_R , фм	похибка ε
Матричний елемент p_1	0.97	134	1.15	74.5
Матричний елемент $p_2^{(\text{dip})}$	0.93	261	1.16	95.5
Матричний елемент p_3	0.90	223	1.17	83.5

Табл. 6.1. Значення параметра p_R , отримані за допомогою метода мінімізації, та відповідні похибки.

ються трохи більшими, ніж для розрахунків на основі першого матричного елемента p_1 . Однак, різниця між значеннями для параметра r_R для кожного випадку, отриманого за допомогою метода мінімізації, є суттєво меншою (див. Таблицю 6.1).

Уключення останнього матричного елемента p_4 у формулі (Е.29) до розрахунків змінює спектр гальмівного випромінювання суттєво. А саме, основна частина спектра перетворюється з логарифмічної форми на форму горбу опуклого виду. Така цікава картина спостерігається більш прозоро у експериментальних даних [184, 4]. Однак, загальна тенденція розрахованого спектра та його нахлн є чутливими до відносного внеску від доданку p_3

у (Е.23) у повний матричний елемент p_4 (який ми визначаємо через фактор f , див. формулу (6.16)). Такий внесок визначається ваговими амплітудами протон–ядерної хвильової функції у різних станах з різними квантовими числами та їх інтерференцією (див. роботу [65] для подробиць). Таким чином, було б цікавим проаналізувати, як саме спектр випромінювання змінюється у залежності від такого внеску. Результати таких розрахунків у порівнянні з експериментальними даними [4] представлені на Рис. 6.5. Звідси ми досяга-

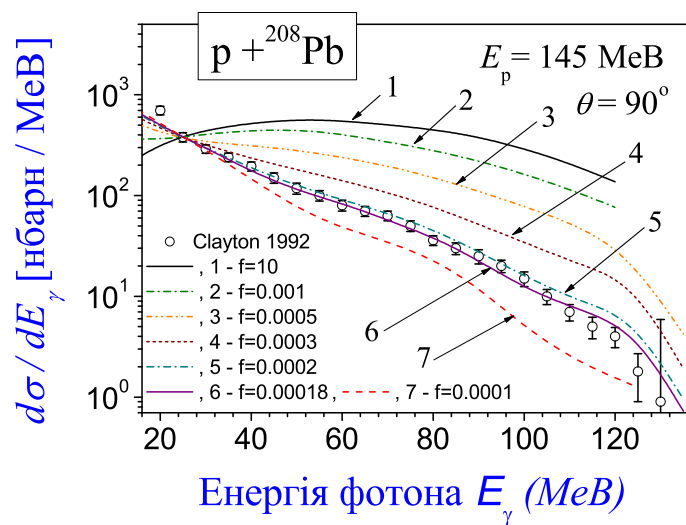


Рис.6.5 Перерізи гальмівного випромінювання для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при 145 МеВ енергії протонів, розраховані на основі останнього матричного елемента p_4 у (6.15), у залежності від параметра f у порівнянні з експериментальними даними групи Клайтона *in. (Clayton 1992: [4])* при $\theta = 90^\circ$. Найкращої згоди між теорією та експериментальними даними отримано для фактора $f = 0.00018$ (використано наступні параметри потенціалу: $r_R = r_C = 1.17$ фм).

ємо дійсно гарної згоди між нашими розрахунками та експериментальними даними при $f = 0.00018$, яка спостерігається практично у всій області енергій випромінених фотонів, де існують експериментальні дані (з мінімальним винятком тільки першої та третьої точок). Такі розрахунки суттєво покращують наші попередні результати в описі випромінювання гальмівних фотонів для реакції $p + {}^{208}\text{Pb}$, отримані у роботі [65], після уключення розгляду ядра як системи нуклонів та їх динамічних властивостей.

Звідси виходить, що роль динаміки нуклонів у ядрі та її зв'язок зі

спіновими властивостями розсіяного протона є суттєвими. Тепер стає зрозумілим, що при вивченні гальмівного випромінювання при α -розпаді ми не отримували такого спектру з горбом опуклої форми: тому-що α -частинка має нульовий спін та, тому, відповідний внесок дорівнює нулю. Таким чином, різниця між експериментальними спектрами для протон-ядерного розсіяння та α -розпаду пояснюється на такій фізичній основі.

Детальний розгляд отриманого спектра показує на існування слабо спадаючого плато з горбом опуклої форми від 40 до 120 MeV енергій випромінених фотонів. Однак, у області мінімальних енергій фотонів спектр (нижче ніж 40 MeV) має логарифмічну форму. Таке розділення може бути пояснено тим, що фотони при низьких енергіях випромінюються за рахунок когерентних процесів (тобто випромінювання саме таких фотонів формується у наслідок взаємодії між розсіяним протоном та ядром як цілим об'єктом, без включення внутрішнього розгляду багатьох нуклонів ядра). Для більш високих енергій, ми отримуємо спектр з горбом опуклої форми, який може бути пояснений суттєвим проявом випромінювання за рахунок взаємодії між розсіяним протоном та імпульсами нуклонів ядра (тобто ми маємо некогерентне випромінювання фотонів).

Більш ретельні виміри випромінювання гальмівних фотонів при протон-ядерному розсіянню виконані колаборацією TAPS [6] та тому необхідно уключити результати таких досліджень у наш аналіз. На Рис. 6.6 ми представляємо результати наших розрахунків спектрів гальмівного випромінювання для $p + {}^{12}\text{C}$ (а) та $p + {}^{197}\text{Au}$ (б) при $E_p = 190$ MeV у порівнянні з цими експериментальними даними (див. Рис. 2 та 3 у роботі [6]). На Рис. 6.7 додамо розрахунки спектрів випромінювання для $p + {}^{58}\text{Ni}$ (а) та $p + {}^{107}\text{Ag}$ (б) при $E_p = 190$ MeV у порівнянні з експериментальними даними [6], що нормовані на переріз випромінювання $\sigma_r = 1.44 \pi A^{2/3} \text{ fm}^2$, де A — масове число ядра (див. Рис. 1 у роботі [6]). Можна бачити, що уключення внеску, що

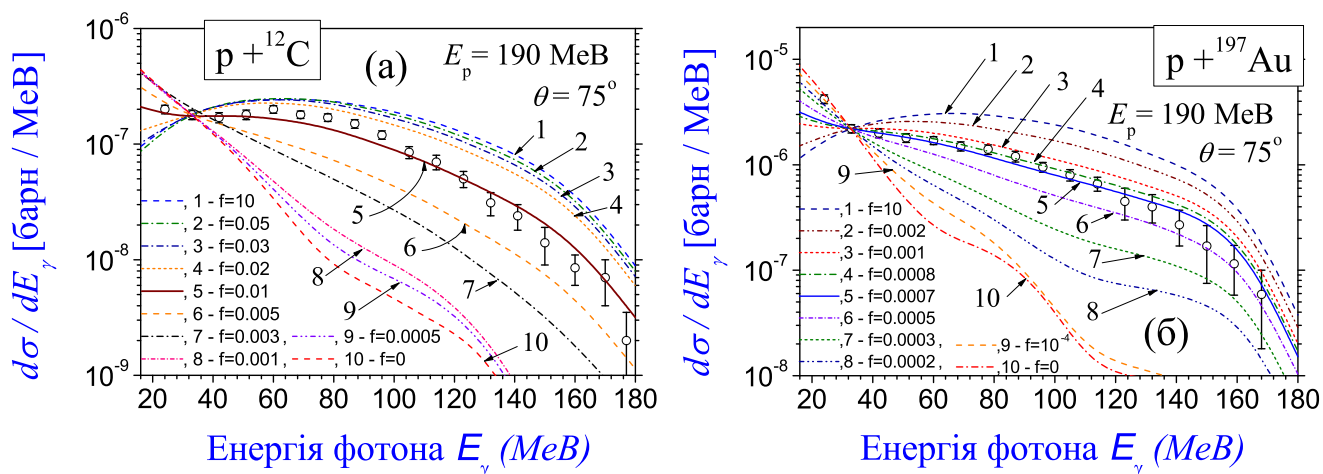


Рис.6.6 Перерізи гальмівного випромінювання для $p+^{12}\text{C}$ (а) та $p+^{197}\text{Au}$ (б) при 190 МеВ енергії протонів розсіяння, розраховані на основі останнього матричного елемента p_4 у формулі (6.15), у залежності від параметра f у порівнянні з експериментальними даними М. Дж. ван Гоесема (M. J. van Goethem) *та ін.* [6] при $\theta = 75^\circ$ (розраховані спектри нормовані на другу точку експериментальних даних, використано параметри потенціалу $r_R = r_C = 0.95$ фм). Спектри виявляються чутливими до параметра f , що характеризує внесок випромінювання за рахунок динаміки нуклонів ядра. Найкраща згода між теорією та експериментом спостерігається для $p + ^{12}\text{C}$ при факторі $f = 0.01$ [див. пурпурну суцільну лінію 5 на Рис. (а)] та $p + ^{197}\text{Au}$ при факторі $f = 0.0007$ [див. синю суцільну лінію 5 на Рис. (б)]. Такий результат демонструє, що включення динаміки нуклонів та їх зв'язок зі спіновими властивостями розсіяного протона у модель дозволяє описати (та пояснити) існування плато у спектрах випромінювання фотонів.

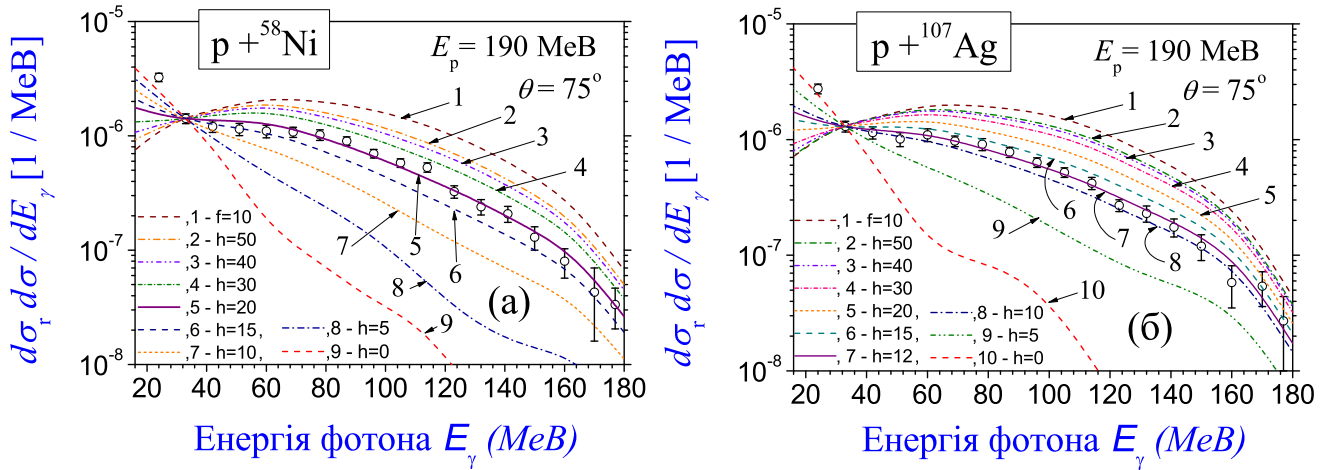


Рис.6.7 Перерізи випромінювання для $p + {}^{58}\text{Ni}$ (а) та $p + {}^{107}\text{Ag}$ (б) при 190 MeV протонів, розраховані на основі матричного елемента p_4 у формулі (6.15), у залежності від параметра f у порівнянні з експериментальними даними М. Дж. ван Гоесема *та ін.* [6] при $\theta = 75^\circ$ (експериментальні дані нормовані на геометричний переріз, розрахунки нормовані на другу точку експериментальних даних, параметри потенціалу — $r_R = r_C = 0.95$ фм, на рисунках використано фактор нормування $h = f \times 10^4$). Найкраща згода між теорією та експериментальними даними спостерігається для $p + {}^{58}\text{Ni}$ при факторі $f = 0.002$ [див. пурпурну суцільну лінію 5 на рисунку (а)] та $p + {}^{107}\text{Ag}$ при факторі $f = 0.0012$ [див. пурпурну суцільну лінію 7 на рисунку (б)].

виникає за рахунок врахування динаміки нуклонів ядра в моделі та розрахунках, дозволяє описати ці експериментальні дані достатньо добре практично в усьому досліджуємому інтервалі енергій випромінених фотонів (з можливим виключенням першої точки даних для деяких реакцій).

Згода між розрахунками та експериментальними даними для всіх ядер вказує, що внесок у повний спектр від фотонів при врахуванні зв'язку між імпульсами нуклонів ядра та спіном розсіяного протона є суттєвим. На цій підставі ми будемо розглядувати таке випромінювання фотонів як новий тип, якому дамо назву *гальмівного випромінювання за рахунок взаємодії між спіном розсіяного протона та імпульсами нуклонів ядра*. Уведення такого випромінювання дозволяє вперше пояснити походження плато у вигляді опуклого горбу у спектрі при протон-ядерному розсіянні та відсутність саме такого плато у спектрах при α -розпаді (див. експериментальні данні у [21, 187] та [57, 59, 58]). Оптична модель не включає такого типу взаємодії при розсіянні

протонів на ядрах. Тому, представлені результати по вивченню випромінювання фотонів при протон-ядерному розсіянні є першою вказівкою узагальнити оптичну модель через уключення спінімпульсної взаємодії.

Оцінимо, наскільки сильніше некогерентне випромінювання (що формується за рахунок взаємодії між розсіяним протоном та імпульсами нуклонів ядра) відносно когерентного (що формується за рахунок взаємодії між розсіяним протоном та ядром, як цілим об'єктом без багатонуклонної структури). На Рис. 6.8 (а) показано відношення між квадратами відповідних матричних елементів $|f \cdot p_4|^2 / |p_1|^2$ для $p + {}^{197}\text{Au}$. Можна бачити, що когерентне випро-

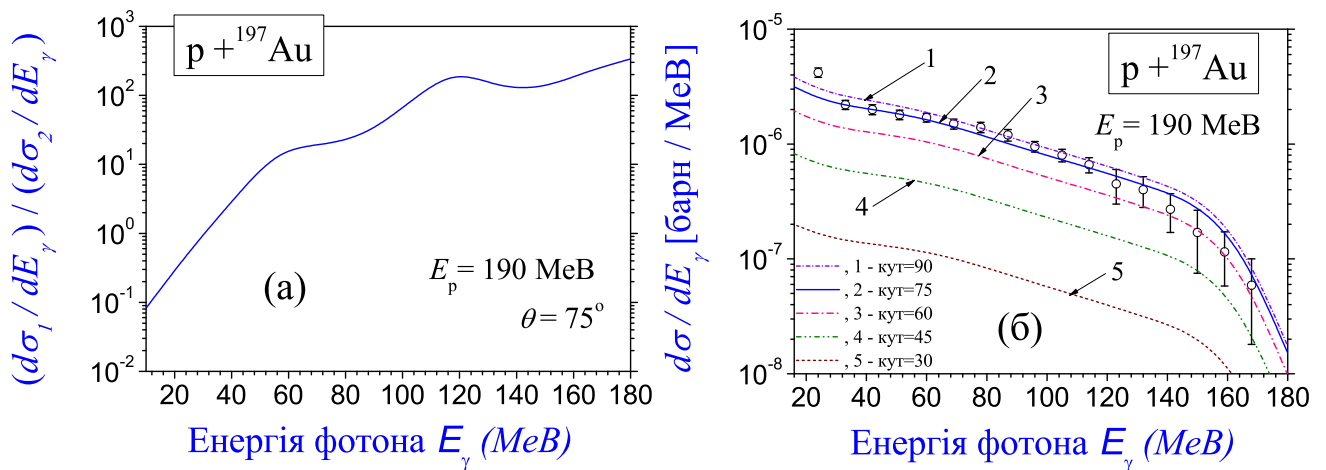


Рис.6.8 (а) Відношення між некогерентним випромінюванням $d\sigma_1/dE_\gamma$ та когерентним випромінюванням $d\sigma_2/dE_\gamma$ у залежності від енергії фотонів для $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV та $\theta = 75^\circ$ [параметри потенціалу — $r_R = r_C = 0.95$ фм; $f = 0.0007$, згідно до результатів на Рис. 6.6 (б)]. (б) Кутовий розподіл фотонів для $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV у порівнянні з експериментальними даними М. Дж. ван Гоесема *та ін.* [6] при $\theta = 75^\circ$ [$f = 0.0007$].

мінювання фотонів менш ніж 30 MeV є більш інтенсивним. Але при зростанні енергії фотонів інтенсивність некогерентного випромінювання зростає, що стає домінуючим. Подібна ситуація є для інших реакцій. На Рис. 6.8 (б) показано кутовий розподіл фотонів для $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV.

6.4. Головні результати і висновки до Розділу 6

У Розділі сформульовано нову модель гальмівного випромінювання фотонів при розсіянні протонів на ядрах при низьких та проміжних енергіях фотонів. Її опублікований у роботі [66], та він є подальшим розвитком теорії гальмівного випромінювання у ядерних реакціях, розвинутої у попередніх роботах [64, 65, 56, 57, 59, 58, 61, 62, 60, 63, 86]. На основі моделі проаналізовано властивості випромінювання для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при енергіях протонів $E_p = 140$ та 145 MeV, $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{58}\text{Ni}$, $p + {}^{107}\text{Ag}$ та $p + {}^{197}\text{Au}$ при енергії протонів $E_p = 190$ MeV. Зроблено фокус на побудову формалізму та здобуття нової інформації про протон–ядерну взаємодію з аналізу експериментальних даних випромінювання [180, 184, 4, 6]. Відзначимо наступне:

- Розрахунки на основі першого, другого та третього матричних елементів p_1 , $p_2^{(\text{dip})}$ та p_3 , визначених за формулами (E.21), (E.22) та (E.23), дають подібні спектри логарифмічного типу. Такі розрахунки є у непоганій згоді з експериментальними даними [180] для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при $E_p = 140$ MeV. Але вони є у протиріччі з експериментальними даними [184, 4] для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при $E_p = 145$ MeV та даними [6] для $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{58}\text{Ni}$, $p + {}^{107}\text{Ag}$ та $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV.
- Включення матричного елемента p_4 у (E.29) у розрахунки принципово змінює спектр, в якому з'являється плато опуклої форми для середніх енергій, що спадає до кінематичної межі енергій фотонів. При низьких енергіях фотонів, спектр має логарифмічну форму. Розділення спектра на два різних типи форм пояснюється тим, що при низьких енергіях фотони випромінюються за рахунок когерентних процесів (тобто взаємодія між розсіяним протоном та ядром як цілим об'єктом, без впливу внутрішньої багатонуклонної структури ядра), тоді як для високих енергій некогерентні процеси мають більш важливу роль (тобто взаємодія

між розсіяним протоном та імпульсами нуклонів ядра). Так, згода розрахунків є гарною у практично всій області енергій фотонів (з можливим виключенням першої точки експериментальних даних) з даними [184, 4] для $p + {}^{208}\text{Pb}$ при $E_p = 145$ MeV та даними [6] для $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{58}\text{Ni}$, $p + {}^{107}\text{Ag}$ та $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV. Такий результат покращує розрахунки гальмівних фотонів для $p + {}^{208}\text{Pb}$, приведені у попередньому Розділі. Тобто, роль динаміки нуклонів у ядрі та їх зв'язок зі спіном розсіяного протона є суттєвими.

- При використанні такого підходу, ми пояснюємо різницю між спектрами гальмівного випромінювання у протон–ядерному розсіянні та спектрами гальмівного випромінювання при α -розпаді та реакцій з важкими іонами. Відзначимо, що спектри випромінювання при α -розпаді, отримані нами раніше, мали форму логарифмічного типу без існування плато опуклої форми (тут ми досягли найбільш акуратної згоди між нашими розрахунками [57, 59, 58] та існуючими експериментальними даними [21, 187, 59, 58], подібна ситуація спостерігається також для поділу [65]). Тепер стає ясным, що відсутність такого плато опуклої форми у спектрах випромінювання при α -розпаді пояснюється за рахунок нульового спіну α -частинки, та відповідні матричні елементи у формулах (E.16) та (E.22) дорівнюють нулю. Різниця між тенденціями у експериментальних спектрах випромінювання для протон–ядерного розсіяння [184, 4] та α -розпаду [21, 187, 59, 58] пояснюється на основі фізичних міркувань. При високих енергіях фотонів (у порівнянні з енергіями у α -розпадах) у взаємодії між α -частинкою та ядром (як при розсіянні α -частинок на ядрах) внутрішня нуклонна структура α -частинки додає немалий внесок некогерентного випромінювання у спектр.
- Виявлено слабку залежність спектрів випромінювання від радіус-

параметра r_R протон-ядерного потенціалу. Аналіз показав наступне:

- Спектри слабо затухають зі зростанням цього параметра.
- З метою знайти радіус-параметр, оцінено функцію похибок ε за допомогою формули (6.17) для кожної реакції. Отримана залежність функції похибок від радіус-параметра має ясний мінімум (див. Рис. 6.1 (б), Рис. 6.2 (б)). Існування такого мінімуму підтверджує стабільність розрахунків при отриманні мінімального значення функції похибок. Ми знаходимо $r_R = 0.90$ фм при аналізі даних [180] при $E_p = 140$ МеВ та $r_R = 1.17$ фм при аналізі даних [184, 4] при $E_p = 145$ МеВ. Враховуючи найбільш вдале співпадіння між розрахунками та експериментальними даними [184, 4] (див. Рис. 6.5) після включення матричного елемента p_4 , ми обираємо значення $r_R = 1.17$ фм (цей результат є у згоді з результатом [148], де отримано $r_R = 1.17$ фм та $r_c = 1.22$ фм). З аналізу даних [6] при $E_p = 190$ МеВ знаходимо $r_R = 1.09$ фм для $p + {}^{12}\text{C}$, $r_R = 1.11$ фм для $p + {}^{58}\text{Ni}$, $r_R = 1.12$ фм для $p + {}^{107}\text{Ag}$ та $r_R = 1.08$ фм для $p + {}^{197}\text{Au}$.
- Модель оцінює некогерентне випромінювання фотонів відносно когерентного. Для $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ МеВ при $\theta = 75^\circ$, для фотонів з енергіям менш 30 МеВ когерентне випромінювання є переважним [відношення некогерентного випромінювання до когерентного є меншим одиниці на Рис. 6.8 (а)]. Але при більш високих енергіях фотонів інтенсивність некогерентного випромінювання зростає [його відношення до когерентного випромінювання більше одиниці на Рис. 6.8 (а)], яке стає переважним [відношення некогерентного випромінювання до когерентного досягає значення 336 на Рис. 6.8 (а)]. Подібна ситуація спостерігається для інших реакцій. Звідси випливає, що роль динаміки нуклонів у ядрі є суттєвою при високих енергіях випромінювання у розсіянні частинок з

ненульовим спіном, та вона зростає при зростанні енергії фотонів. Формалізм некогерентного випромінювання у моделі має подібним до метода Накаями та Бергча [185].

- Представлено нові передбачення кутового розподілу випромінювання фотонів для $p + {}^{197}\text{Au}$ при $E_p = 190$ MeV [див. Рис. 6.8 (б)]. Оскільки різниця між спектрами при різних кутах є більшою ніж похибки у даних при $\theta = 75^\circ$ [6], то такі результати могли б бути використані експериментаторами для майбутнього тестування моделі та розрахунків спектрів. А саме, такі виміри кутового розподілу фотонів можливо було б виконати на протонному циклотроні PROTEUS C-235 (який забезпечує пучок протонів з енергіями 70–230 MeV) в інституті ядерної фізики у Кракові (the Henryk Niewodniczanski Institute of Nuclear Physics in Krakow) з використанням детектора HECTOR (HECTOR array) для кутової реєстрації фотонів [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41].
- У попередніх дослідженнях [31] сформувалася не ясна картина відносно того, чи має сенс розробляти потенціальні моделі гальмівного випромінювання при протон-ядерному та ядерно-ядерному розсіяннях. Результати у Розділі відкривають шлях до здобуття нової інформації про протон-ядерну взаємодію через аналіз випромінювання.
- У спектрів вперше виявлено осциляції з малою амплітудою. Такі осциляції можуть бути пов'язані з менш помітними ефектами та властивостями розсіяння протонів на ядрах. Нагадаємо про гіпотезу, висунуту Єр'омінім, Ольховським та Джардіна (Giardina) багато років назад, про можливий зв'язок таких осциляцій у спектрах випромінювання з часом тунелювання крізь бар'єр. Якщо повернутися до результатів, то можна зробити висновок, що таке явище є загальним для ядерних реакцій.

РОЗДІЛ 7

НОВИЙ ПІДХІД ДО ЗДОБУТТЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРО БАГАТОНУКЛОННУ СТРУКТУРУ ЯДЕР ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ З АНАЛІЗУ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

7.1. Вступ

Не дивлячись на достатньо довгу історію досліджень гальмівного випромінювання у ядерній фізиці (наприклад, див. огляди [25, 97], книги [28, 26, 95]), прогрес у вивченні взаємодії між нуклонами та ядерних сил методами гальмівного випромінювання є обмеженим. На таку ситуацію вказували раніше саме ті дослідники, хто зміг використовувати реалістичні потенціали взаємодії у розрахунках спектрів гальмівного випромінювання (наприклад, див. [31]). Це відбивається невеликою кількістю публікацій, що пов'язані з саме цим питанням. Можна пояснити ситуацію, що склалася, через суттєву відстань між (1) досягненнями у гарній згоді між експериментальними даними та розрахунками та (2) побудовою формалізму, який є дійсно чутливим до багатонуклонної взаємодії та пояснював би експериментальні дані.

Суттєвих зусиль було прикладено до зрозуміння властивостей випромінювання фотонів у нуклон-нуклонному та нуклон-ядерному зіткненнях. Але, в таких моделях переважною є ідея, що полягає у зведенні взаємодії між ядрами до двонуклонної, та вважається, що така взаємодія повинна бути переважною. Фокус направлено на побудову коректного релятивістського опису взаємодії між двома нуклонами, де формалізм розроблявся в імпульсному представленні (відзначимо два напрямки досліджень: [162, 163] та [164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175]).

Фотони, що випромінюються у ядерних реакціях з описом ядер на багатонуклонному рівні, вивчаються тривалий час. Відзначимо прогрес Бає (Baye), Десковемонтом (Descouvemont), Келлером (Keller), Саувенсом (Sauwens), Ліу (Liu), Тангом (Tang), Канадою (Kanada), Дохет-Ерالی (Dohet-Eraly) та колегами [202, 159, 188, 189, 160, 203, 191, 190, 194, 192, 193, 204, 205]. Для контролю параметрів беруться дані нуклон-нуклонного розсіяння [дані Ніджмегена (Nijmegen data set) [206]] та властивості дейтрона. Цей підхід ґрунтується на методі резонуючих груп (resonating group method) [207, 208, 209] та методі генераторних координат (generator coordinate method) [210].

Відзначимо, що дослідження на основі мікроскопічних кластерних моделей було виконано з аналізом експериментальних даних гальмівного випромінювання головним чином для розсіяння $p + \alpha$, $\alpha + \alpha$, ${}^3\text{H} + \alpha$. Результати було отримано у копланарній геометрії (coplanar geometry), де спостерігалися максимуми у перерізах гальмівного випромінювання при деяких енергіях. Максимуми пояснювалися через існування резонансних станів ядерної системи. Тут використано кінематичні співвідношення між енергією випроміненого фотона та енергією відносного руху двох ядер або ядра та нуклона.

У той-же час, існує суттєво більш багатий об'єм експериментальної інформації про гальмівне випромінювання, що супроводжує ядерні процеси та не було проаналізовано тими дослідниками. А саме, це дані розсіяння протонів на ядрах ${}^9\text{Be}$, ${}^{9,12}\text{C}$, ${}^{64}\text{Cu}$, ${}^{107}\text{Ag}$, ${}^{208}\text{Pb}$ (для енергій розсіяних протонів до 140 MeV), альфа-розпад ядер ${}^{210,214}\text{Po}$, ${}^{226}\text{Ra}$ and ${}^{244}\text{Cm}$, поділ, злиття. Тут точність експериментальних вимірів фотонів суттєво вище. Для кожного типу реакції, перерізи (або ймовірності) гальмівного випромінювання виміряно у широких діапазонах енергій фотонів для однакової фіксованої енергії ядерного фрагменту (перед випромінюванням фотона), що не описується кінематичними співвідношеннями, вказаними вище. Такі перерізи мають гладку неперервну форми, в них не спостерігається ніяких різких резонансних піків.

З такої точки зору було б цікавим проаналізувати такі експериментальні дані на основі нашого формалізму, який не передбачає необхідності накладати додаткових кінематичних обмежень, що вказані вище. З метою виконати багато-нуклонний аналіз, ми включаємо елементи мікроскопічної теорії у наш формалізм. Як за мету для вибраного дослідження, ми зробимо фокус на побудову нового формалізму випромінювання фотонів для реакцій з участю важких ядер, для яких існує більш очевидності (наприклад, див. дослідницькі роботи [180, 183, 182, 2, 3, 4], огляди [25, 97] та дисертацію (PhD thesis) [184] по дослідженням гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах при низьких та проміжних енергіях фотонів та теоретичні розробки [65, 66, 162, 179, 181], роботи [16, 17, 18, 21, 187, 59, 58] по дослідженням гальмівного випромінювання при α розпаді ядер та повністю квантові розрахунки [57, 59, 58, 42, 123] і квазікласичні розрахунки [101], роботу [60], сфокусовану на здобуття нової інформації про ядерні деформації α -розпадаючих ядер на основі аналізу експериментальних спектрів гальмівного випромінювання, роботи [12, 8, 9, 13, 11, 14, 154] по дослідженням гальмівного випромінювання при поділі важких ядер, теоретичні дослідження [63] та [64] гальмівного випромінювання при протонному розпаді ядер з наданими новими передбаченнями).

Перше запитання, що виникає та повинно бути з'ясоване, — це наскільки суттєво нуклонна структура ядра та взаємодіючого з ним іншого ядерного фрагмента проявляється у спектрах випромінювання. Може виявитися, що включення багато-нуклонної структури у формалізм не змінить (помітно) розрахункових спектрів випромінювання для енергій та параметрів, які відповідають експериментам. Розробка мікроскопічного формалізму з описом випромінювання гальмівних фотонів є достатньо складною задачею, що вимагає суттєвих зусиль. Саме тому, перед тим як розпочати працю над акуратним мікроскопічним формалізмом, поперш було б корисним отримати перші

оцінки та з'ясувати таке питання.

Цей розділ присвячений рішенням саме такого питання, де у якості ядерного процесу обрано α -розпад. Вибір такої реакції пояснимо наступним.

1. Для опису багато-нуклонної структури α -розпадаючих ядер може бути застосований (розвинутий) мікроскопічний формалізм (наприклад, див. дослідницькі роботи [211, 212, 213, 215, 214], огляди [215, 216, 217, 218] з посиланнями на інші дослідження по цьому напрямку).
2. α -Розпадаючі ядра — це середні, важкі та надважкі ядра.
3. На сьогодні вже досягнуто прогрес у вивченні взаємодії між ядрами та α -частинками, який відтестовано експериментально, що робить α -розпад однією з найбільш глибоко вивчених реакцій у ядерній фізиці.
4. Вже побудовано багатий матеріал у теоретичному описі випромінювання фотонів для даної реакції [32, 98, 17, 18, 42, 99, 102, 100, 109, 150, 123, 122, 103, 104, 56, 57, 121, 151, 101, 59, 58, 60, 61, 62].
5. У вивченні випромінювання фотонів при α -розпаді досягнуто гарної згоди між теорією та експериментом [17, 18, 59, 58, 16, 21, 187]. Найбільш точним виявився тут мультипольний метод у цих роботах.

Це є новим внеском у теорію гальмівного випромінювання, який представлено у даному Розділі.

7.2. Модель

7.2.1. Оператор випромінювання α -ядерної системи

Почнемо з оператора випромінювання фотона \hat{H}_γ у (6.1)–(6.2) [див. стор. 147] для ядерної системи, що включає у себе α -частинку з 4 нуклонів та дочірне

ядро, що складається з A нуклонів, у лабораторній системі відліку. Використовуючи представлення векторного потенціалу електромагнітного поля у вигляді (5) у роботі [65], отримаємо

$$\hat{H}_\gamma = -e \sqrt{\frac{2\pi}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^A \frac{z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \mathbf{p}_j \right\}. \quad (7.1)$$

Тут, зірочка означає комплексне спряження, z_s та m_s — електричний заряд та маса нуклона з номером s , $\mathbf{p}_s = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\mathbf{r}_s$ — оператор імпульсу нуклона з номером s ($s = i$ — для нуклона α -частинки та $s = j$ — для нуклона дочірнього ядра; нумеруємо нуклони α -частинки через індекс i , нуклони ядра — через індекс j). $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона [$\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$], \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона та $w_{\text{ph}} = kc = |\mathbf{k}|c$. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} у кулонівському калібруванні. Ми маємо дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ та $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k} ($\alpha = 1, 2$). У цьому розділі ми будемо використовувати систему одиниць, де $\hbar = 1$ та $c = 1$.

Позначимо координати центрів мас α -частинки як \mathbf{r}_α , дочірнього ядра як \mathbf{R}_A та повної системи як \mathbf{R} , визначивши їх через формули $\mathbf{r}_\alpha = \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{r}_{\alpha i}/m_\alpha$, $\mathbf{R}_A = \sum_{j=1}^A m_j \mathbf{r}_{Aj}/m_A$, $\mathbf{R} = (m_A \mathbf{R}_A + m_\alpha \mathbf{r}_\alpha)/(m_A + m_\alpha)$, де m_α та m_A — маси α -частинки та дочірнього ядра. Ми введемо відносні координати $\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$, $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ та \mathbf{r} як $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$, $\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_A + \boldsymbol{\rho}_{Aj}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_A$ та знаходимо відповідні імпульси $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_\alpha + \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha i}$, $\mathbf{p}_j = \mathbf{P}_A + \tilde{\mathbf{p}}_{Aj}$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{P}_A$, де $\mathbf{p}_\alpha = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\mathbf{r}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha i} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$, $\mathbf{P}_A = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\mathbf{R}_A$, $\tilde{\mathbf{p}}_{Aj} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}_{Aj}$. Ми отримаємо

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R} - c_\alpha \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + c_A \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + c_A \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R} - c_\alpha \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{Aj}, \quad (7.2)$$

де введені масові параметри $c_A = \frac{m_A}{m_A + m_\alpha}$ та $c_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha}$. Підставляючи такі

вирази у формулу (7.1), знаходимо (m_p — маса протона)¹

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\gamma = & -e \sqrt{\frac{2\pi}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}[\mathbf{R}-c_\alpha \mathbf{r}]} \cdot \left\{ \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} + \sum_{j=1}^A \frac{z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{A j}} \right] \mathbf{P} + \right. \\
& + \left[c_A e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} - c_\alpha \sum_{j=1}^A \frac{z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{A j}} \right] \mathbf{p} + \\
& \left. + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha i} + \sum_{j=1}^A \frac{z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{A j}} \tilde{\mathbf{p}}_{A j} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

7.2.2. Хвильова функція α -ядерної системи

Ми будемо розвивати далі формалізм, представлений у Розділі 6 для протон-ядерного розсіяння, де ми додамо новий формалізм нуклонної структури α -частинки. Це дозволяє врахувати акуратно найбільш вагомий внесок від хвильової функції відносного руху у розрахунках спектрів, тоді як нуклонна структура α -частинки та ядра надає менші корекції таких спектрів (така оцінка впливу багатонуклонної структури впливає з гарної згоди між попередніми розрахунками та експериментальними даними випромінювання для α -розпаду без врахування багатонуклонної структури, див. роботи [57, 59, 58, 60]). Перед тим як розробляти складний багатонуклонний формалізм, поперш з'ясуємо, чи може бути помітною багатонуклонна структура α -ядерної системи у експериментальних спектрах випромінювання. Тобто, визначимо хвильову функцію повної ядерної системи як

$$\Psi = \Phi(\mathbf{R}) \cdot \Phi_{\alpha\text{-nucl}}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl}}(\beta_A) \cdot \psi_\alpha(\beta_\alpha), \tag{7.4}$$

¹Оскільки ми маємо тільки 3 незалежні змінні $\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$ та $A - 1$ незалежних змінних $\boldsymbol{\rho}_{A j}$, то формулу (7.3) можна переписати без змінних $\boldsymbol{\rho}_{\alpha 4}$, $\boldsymbol{\rho}_{AA}$ та $\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha 4}$, $\tilde{\mathbf{p}}_{AA}$.

де

$$\begin{aligned}\psi_{\text{nucl}}(\beta_A) &= \psi_{\text{nucl}}(1 \cdots A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{p_A} (-1)^{\varepsilon_{p_A}} \psi_{\lambda_1}(1) \psi_{\lambda_2}(2) \cdots \psi_{\lambda_A}(A), \\ \psi_\alpha(\beta_\alpha) &= \psi_\alpha(1 \cdots 4) = \frac{1}{\sqrt{4!}} \sum_{p_\alpha} (-1)^{\varepsilon_{p_\alpha}} \psi_{\lambda_1}(1) \psi_{\lambda_2}(2) \psi_{\lambda_3}(3) \psi_{\lambda_4}(4).\end{aligned}\tag{7.5}$$

Тут β_α — послідовність номерів $1 \cdots 4$ нуклонів α -частинки, β_A — послідовність номерів $1 \cdots A$ нуклонів ядра, $\Phi(\mathbf{R})$ — функція, що описує рух центру мас повної ядерної системи у лабораторній системі відліку, $\Phi_{\alpha\text{-nucl}}(\mathbf{r})$ — функція, що описує рух α -частинки відносно ядра (без відносного руху нуклонів у α -частинці та ядрі), $\psi_\alpha(\beta_\alpha)$ — багатонуклонна функція, що залежить від нуклонів α -частинки (вона визначає просторові стани на основі відстаней $\rho_1 \cdots \rho_4$ від нуклонів α -частинки до її центру мас), $\psi_{\text{nucl}}(\beta_A)$ — багатонуклонна функція, що залежить від нуклонів ядра. Сумування у (7.5) виконується за всіма $A!$ перестановками координат або станів нуклонів. Однонуклонні функції $\psi_{\lambda_s}(s)$ являють собою перемноження функцій станів та ізоспінів як $\psi_{\lambda_s}(s) = \varphi_{n_s}(\mathbf{r}_s) | \sigma^{(s)} \tau^{(s)} \rangle$, де φ_{n_s} — просторова функція нуклону з номером s , n_s — номер стану просторової функції нуклону з номером s , $| \sigma^{(s)} \tau^{(s)} \rangle$ — спін-ізоспінова функція нуклону з номером s .

Ми включаємо багатонуклонну структуру у хвильові функції ψ_{nucl} та ψ_α ядра та α -частинки, тоді як хвильову функцію відносного руху $\Phi_{\alpha\text{-nucl}}(\mathbf{r})$ шукаємо без їх, але з максимальною орієнтацією на α -ядерний потенціал, що здобуто на основі аналізу експериментальних даних α -розпаду, розсіяння α -частинок на ядрах та α -захоплення. Тобто, ψ_α та ψ_{nucl} описують внутрішні стани α -частинки та ядра. Відносний рух нуклонів ядра не впливає на внутрішні стани α -частинки, тому таке представлення хвильової функції можна розглядати як наближене. Однак, відносні рухи нуклонів α -частинки і ядра дають власні внески у повний спектр випромінювання. Розрахуємо матричний елемент випромінювання по формулі (6.12) [див. стор. 152].

7.2.3. Матричний елемент випромінювання та ефективний заряд

Припустимо, що функція $\Phi_{\bar{s}}(\mathbf{R})$ має вигляд $\Phi_{\bar{s}}(\mathbf{R}) = e^{-i\mathbf{K}_{\bar{s}}\cdot\mathbf{R}}$, де $\bar{s} = i$ або f (індекси i та f означають початковий стан тобто стан перед випромінюванням фотона, та кінцевий стан тобто стан після випромінювання фотона), $\mathbf{K}_{\bar{s}}$ — імпульс повної системи [31]. При $\mathbf{K}_i = 0$ розраховуємо матричний елемент

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle = -\frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{2\pi}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\{ M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \right\}, \quad (7.6)$$

де

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}} e^{i c_\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 z_i \frac{m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^A z_j \frac{m_p}{m_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{A j}} \right] \mathbf{P} \right| \Psi_i \rangle, \\ M_2 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}} e^{i c_\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_A \sum_{i=1}^4 z_i \frac{m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_\alpha \sum_{j=1}^A z_j \frac{m_p}{m_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{A j}} \right] \mathbf{p} \right| \Psi_i \rangle, \\ M_3 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}} e^{i c_\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 z_i \frac{m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha i} \right| \Psi_i \rangle, \\ M_4 &= \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}} e^{i c_\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{j=1}^A z_j \frac{m_p}{m_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_{A j}} \tilde{\mathbf{p}}_{A j} \right| \Psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ми не будемо використовувати перший доданок M_1 (тому що ми будемо вивчати розпад у системі центра мас), третій доданок M_3 (тому що ми будемо нехтувати внесками випромінювання фотонів, що спричинено деформацією α -частинки при її вильоті з ядра) та четвертий доданок M_4 (тому що ми не будемо вивчати внески випромінювання фотонів, що виникають за рахунок деформації дочірнього ядра при розпаді). На такій підставі отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle &= -\frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{2\pi}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \times \\ &\quad \times \left\langle \Phi_f(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \Phi_i(\mathbf{r}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.8)$$

де ми ввели ефективний заряд системи, що складається з α -частинки та дочірнього ядра, та зарядові форм-фактори α -частинки та ядра як

$$Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\{ e^{-i c_A \mathbf{k}\mathbf{r}} c_A Z_\alpha(\mathbf{k}) - e^{i c_\alpha \mathbf{k}\mathbf{r}} c_\alpha Z_A(\mathbf{k}) \right\}, \quad (7.9)$$

$$Z_\alpha(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\alpha,f} \left| \sum_{i=1}^4 z_i \frac{m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \right| \psi_{\alpha,i} \right\rangle, \quad (7.10)$$

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f} \left| \sum_{j=1}^A z_j \frac{m_p}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right| \psi_{\text{nucl},i} \right\rangle.$$

У першому наближенні (що має назву *дипольного*) $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rightarrow 1$ ми маємо

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) = c_A Z_\alpha(\mathbf{k}) - c_\alpha Z_A(\mathbf{k}), \quad (7.11)$$

тобто ефективний заряд є незалежним від відстані між центрами мас ядра та α -частинки. У розрахунках обмежимося дипольним наближенням (7.11) ефективного заряду, але матричний елемент випромінювання будемо рахувати без дипольного наближення, що дозволяє оцінити мультипольні корекції.

7.2.4. Електричні форм-фактори α -частинки та дочірнього ядра

Для розрахунків форм-факторів (7.10) потрібно знати хвильові функції перед випромінюванням фотона та після випромінювання. Ці функції визначаємо за формулою (7.5), де однонуклонні функції представлено через добуток просторової та спін-ізоспінової функцій. У цьому розділі ми будемо припускати, що квадрат модуля просторової функції одного нуклона визначає ймовірність зміщення цього нуклона відносно до його найбільш ймовірного просторового положення, що не сконцентровано у центрі мас ядерного фрагмента. Введемо наступну ідею: положення найбільш ймовірного існування нуклонів α -частинки у основному стані не співпадають з центром мас α -частинки. Тобто вони являють собою вершини тетраедра, тоді як осциляторні просторові функції перших чотирьох станів дають максимальні ймовірності у спільному

центрі. Такий розгляд істотно поширюється на опис систем з більшим числом нуклонів, де найбільш ймовірні просторові положення нуклонів ядра у основному стані повинні бути зкорильованими з густиною ядерної речовини. Передбачається, що інформацію про найбільш ймовірні положення нуклонів слід брати від інших методів. Тепер ми переформулюємо багатонуклонний формалізм моделі, яку було розроблено до опису гальмівного випромінювання при протон-ядерному розсіянні у попередньому Розділі 6. Як буде показано нижче, таке представлення просторової одностуклонної функції дозволяє виконати аналіз залежності спектрів випромінювання від розміру α -частинки.

Перепишемо вектор нуклону з номером s від до центру мас фрагмента

$$\boldsymbol{\rho}_s = \boldsymbol{\rho}_{0,s} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}_s, \quad (7.12)$$

де $\boldsymbol{\rho}_{0,s}$ — радіус-вектор від центру мас фрагмента до точки найбільш ймовірного положення нуклону з номером s , $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s$ — зміщення нуклону відносно точки найбільш ймовірного положення. Одностуклонна функція має вигляд:

$$\psi_{\lambda_s}(s) = \varphi_{\lambda_s}(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_{s,0}) | \sigma^{(s)} \tau^{(s)} \rangle, \quad (7.13)$$

де λ_s означає номер стану нуклона з номером s . Також ми будемо вважати, що просторова функція нуклона нормована умовою:

$$\int |\varphi_{\lambda}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s)|^2 \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s = 1. \quad (7.14)$$

Звідси ми знаходимо форм-фактор α -частинки [див. формули (Ж.9), (Ж.12), (Ж.13) у Додатку Ж.1, стор. 494, 495]:

$$Z_{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{Z_{\alpha}}{4} \sum_{i=1}^4 e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{i,0}}, \quad (7.15)$$

тоді як форм-фактор дочірнього ядра отримує наступного вигляду:

$$Z_d(\mathbf{k}) = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2)/4} f_1(\mathbf{k}, n_1 \cdots n_{A_d}) f_2(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}), \quad (7.16)$$

де

$$f_1(\mathbf{k}, n_1 \cdots n_{A_d}) = \sum_{\substack{n_x+n_y+n_z \leq N \\ n_x, n_y, n_z=0}} L_{n_x} [a^2 k_x^2 / 2] L_{n_y} [b^2 k_y^2 / 2] L_{n_z} [c^2 k_z^2 / 2], \quad (7.17)$$

$$f_2(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}) = \frac{1}{A_d} \sum_{j=1}^{A_d} e^{-i\mathbf{k}\rho_{j,0}}.$$

Тут, функція f_1 має сумування за всіма станами однонуклонної просторової хвильової функції, а функція f_2 описує просторовий розподіл нуклонів у ядрі.

7.2.5. Ефективний заряд та ймовірність випромінювання фотонів

Підставляючи формули (7.15) та (7.16) форм-факторів α -частинки та ядра у формулу (7.11), знайдемо ефективний заряд у дипольному наближенні:

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4} \left\{ c_A f_{2\alpha}(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_4) - c_\alpha f_{1,d}(\mathbf{k}, n_1 \cdots n_{A_d}) f_{2,d}(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}) \right\}. \quad (7.18)$$

Тепер ми перепишемо матричний елемент випромінювання фотона як

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle = - \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{2\pi}{w_{\text{ph}}}} \cdot p_{fi} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}), \quad (7.19)$$

де

$$p_{fi} = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \cdot \left\langle \varphi_f(\mathbf{r}) \left| \tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \varphi_i(\mathbf{r}) \right\rangle,$$

$$\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) = c_A f_{2\alpha}(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_4) - c_\alpha f_{1,d}(\mathbf{k}, n_1 \cdots n_{A_d}) f_{2,d}(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}). \quad (7.20)$$

Ми визначаємо ймовірність випромінювання гальмівних фотонів на основі матричного елемента (7.19) у рамках формалізму, представленого у роботі [65], який ми не повторюємо у цьому розділі:²

$$\frac{d^2 P(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = \frac{e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m_p^2 k_i} \left\{ p_{fi} \frac{d p_{fi}^*(\theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c.c.} \right\}, \quad (7.21)$$

²Ми отримуємо формулу (7.21) у залежності від маси протона m_p , тоді як у роботі [65] ми мали ймовірність гальмівного випромінювання (49) у залежності від зведеної маси μ . Така різниця пояснюється тим, що у даному розділі ми розвиваємо формалізм на основі оператора випромінювання багатонуклонної системи (7.1), тоді як у роботі [65] ми розвивали формалізм на основі оператора випромінювання (4) протон-ядерної системи, визначений через зведену масу протона та ядра.

де $c. c.$ — позначення комплексного спряження, p_{fi} пропорційно до електричної компоненти p_{el} у формулах (10) у роботі [65] [з додатковим множником $2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2)/4}$ та включеним ефективним зарядом $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip})}$], $dp_{fi}(\theta_f)/d \cos \theta_f$ визначається також як $dp(k_i, k_f, \theta_f)/d \cos \theta_f$ у роботі [65].

7.3. Розрахунки та аналіз

Ми застосували метод, описаний вище, до розрахунків спектрів випромінювання гальмівних фотонів при α -розпаді. Почали ми розрахунки з ядер ^{210}Po , ^{214}Po та ^{226}Ra , для яких існують експериментальні дані гальмівного випромінювання [17, 18, 59, 58, 16, 21, 187], а також розроблено наш попередній формалізм та його відтестовано [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62]. Поперш за все, нас цікавило саме ядро ^{210}Po , для якого отримано експериментальні дані [21, 187] з найбільш високою точністю. Але, виявилось, що різниця між розрахунками з включеною багатонуклонною структурою та розрахунками без такої структури практично непомітна [див. Рис. 7.1(а)]. Обидва отриманих спектри описують експериментальні дані достатньо добре. Навіть виявилось, що для всіх ядер, вказаних вище, для яких ми маємо експериментальну інформацію для гальмівного випромінювання, уключення нуклонної структури α -частинки та дочірнього ядра практично не проявляється у спектрах гальмівного випромінювання (змінюється лише друга та наступні цифри у розрахункових спектрах) у області енергій фотонів нижче 1 МеВ (такий ліміт діапазону енергій фотонів є найвищим у експериментальних даних). Однак, уключення багатонуклонної структури підвищує ймовірність випромінювання фотонів для кожного ядра. Це є першим висновком на основі моделі.

З ситуації, що склалася, виходить висновок, що необхідно виконати

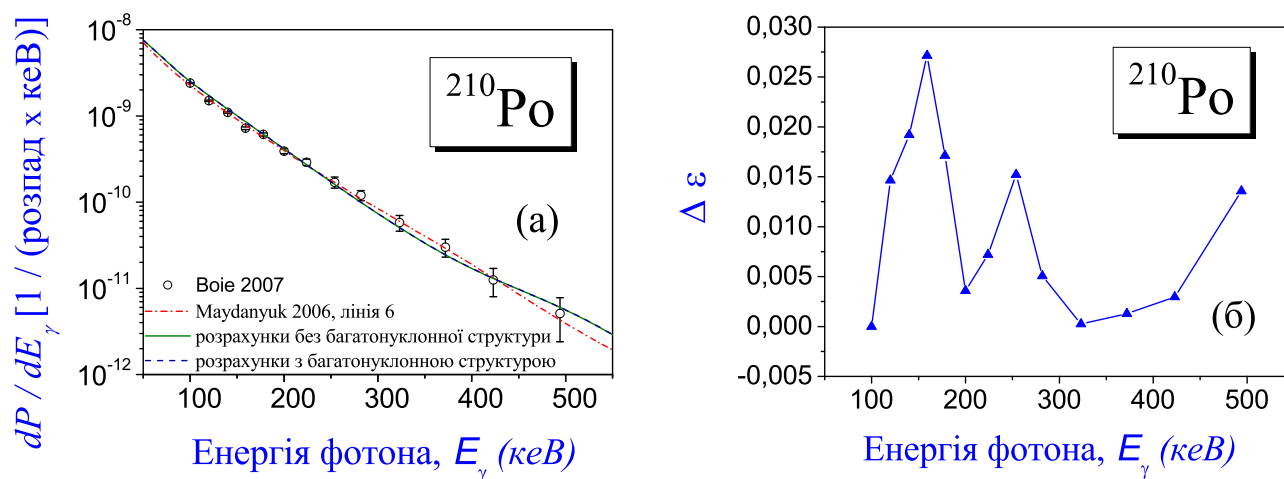


Рис.7.1 Панель (а): Ймовірності гальмівного випромінювання фотонів при α -розпаді ядра ^{210}Po у порівнянні з експериментальними даними [21] [у розрахунках використано $\rho_{i,0} = 1.7$ фм для α -частинки та $\theta_f = 90^\circ$, θ_f — кут між напрямком руху α -частинки (або її тунелювання) після випромінювання фотона та напрямком випромінювання фотона]. Тут експериментальні дані, позначені білими кружечками, взяті з роботи (Voie 2007: [21]), суцільна зелена лінія — розрахунки без включення багатонуклонної структури, пунктирна синя лінія — розрахунки з включенням багатонуклонної структури, штрих-пунктирна червона лінія — розрахунки для точкової α -частинки, взяті з роботи (Maydanuyk 2006: [57], див. лінію 6 на Рис. 1 у тій роботі). Спектр з включенням багатонуклонної структури у розрахунки розташовано вище ніж спектр без включення такої структури, але різниця між такими розрахунками виявляється дуже непомітною. Панель (б): Різниця між функціями похибок $\Delta\epsilon(E_k)$, що визначаються за формулами (7.23) та отримані після порівняльного аналізу між новими розрахунками з включенням багатонуклонної структури та без включення неї та експериментальними даними, представленими на рисунку (а).

більш ретельний аналіз. Введемо нові функції помилок

$$\varepsilon^{(s)}(E_k) = \frac{\left| \ln(\sigma^{(\text{theor},s)}(E_k)) - \ln(\sigma^{(\text{exp})}(E_k)) \right|}{\left| \ln(\sigma^{(\text{exp})}(E_1)) \right|}, \quad (7.22)$$

та визначимо різницю між цими функціями та знаходимо суму

$$\Delta\varepsilon(E_k) = \varepsilon^{(\text{no-micro})}(E_k) - \varepsilon^{(\text{micro})}(E_k), \quad \Delta\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta\varepsilon(E_k). \quad (7.23)$$

Тут $\sigma^{(\text{theor},s)}(E_k)$ та $\sigma^{(\text{exp})}(E_k)$ — теоретичні та експериментальні ймовірності випромінювання при α -розпаді при енергії E_k випроміненого фотона, s — індикатор включення багатонуклонної структури у модель та розрахунки (позначимо такі розрахунки індексом *micro*) або розрахунки без такої багатонуклонної структури (будемо використовувати індекс *no-micro* для такого випадку), та сумування виконується за всім набором експериментальних даних. Такі визначення сформульовані на основі метода мінімізації [75].

Щоб з'ясувати, чи включення багатонуклонної структури у модель і розрахунки дає кращий опис експериментальних даних, потрібно оцінити різницю $\Delta\varepsilon(E_k)$ між функціями $\varepsilon^{(\text{no-micro})}(E_k)$ та $\varepsilon^{(\text{micro})}(E_k)$. Результати таких розрахунків для ядра ^{210}Po представлено на Рис. 7.1 (б). Можна бачити, що функція є позитивною у всій області енергій фотонів. Це підтверджує, що включення багатонуклонної структури у модель покращує опис експериментальних даних [21, 187]. Загальної оцінки можна отримати через сумарні характеристики у формулами (7.23), та ми отримуємо $\Delta\bar{\varepsilon} = 0.00001015$ (що є позитивним також). На Рис. 7.1 (б) спостерігається слабка осциляторна залежність кривої від енергії фотона з періодом біля 200 кеВ у низькоенергетичній частині спектру. Однак, інформація про такі осциляції є більш непомітною, ніж позитивні значення функції $\Delta\varepsilon$, тому вона вимагає більш високої точності розрахунків спектрів [відповідно до Рис. 7.1 (б), слід бути впевненим у перших 3–5 цифрах у значеннях спектрів для ^{210}Po]³.

³Можна припустити, що форм-фактори мають дуже слабку осциляторну залежність від енергії фотона

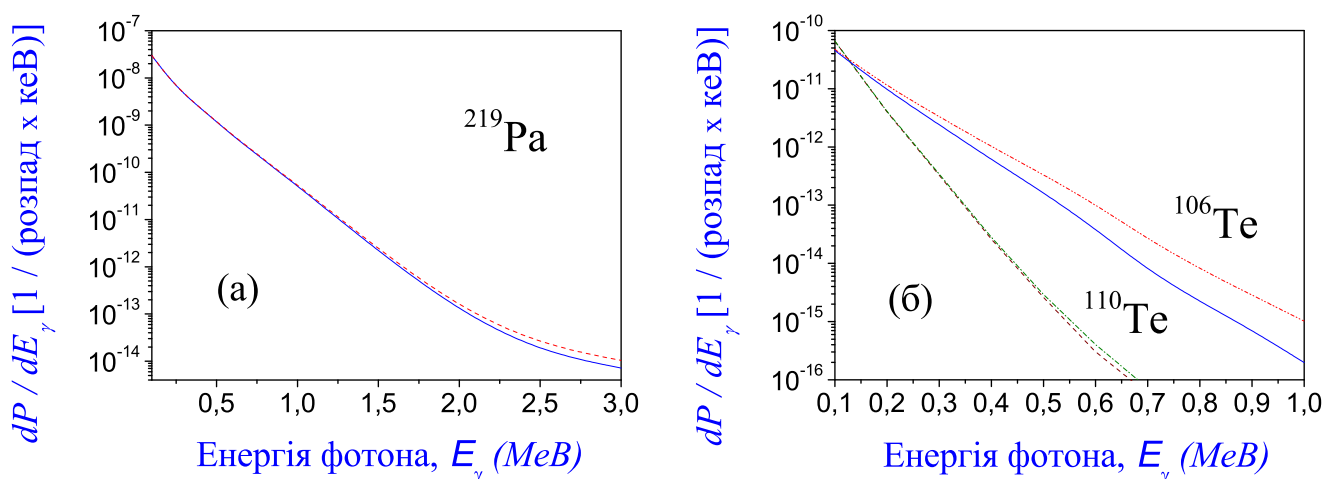


Рис.7.2 Ймовірності гальмівного випромінювання фотонів при α -розпаді ядер ^{219}Pa (а), ^{106}Te та ^{110}Te (б) [у розрахунках $\rho_{i,0} = 1.7$ фм для α -частинки та $\theta_f = 90^\circ$, θ_f — кут між напрямком руху α -частинки (або її тунелювання) після випромінювання фотона та напрямком випромінювання фотона]. Панель а: штрихова червона лінія — розрахунки для ^{219}Pa з включенням нуклонної структури, суцільна синя лінія — розрахунки для ^{219}Pa без нуклонної структури, Панель б: штрих-двічі пунктирна червона лінія — розрахунки для ^{106}Te з включенням нуклонної структури, суцільна синя лінія — розрахунки для ^{106}Te без нуклонної структури, штрих-пунктирна зелена лінія — розрахунки для ^{110}Te з включенням нуклонної структури, штрихова коричнева лінія — розрахунки для ^{110}Te без нуклонної структури. Спектр для кожного ядра після уключення нуклонної структури підвищується у порівнянні з спектром без такої структури. Нуклонная структура більш помітна у спектрах для ядер з більшим Q_α -значенням та меншим Z .

Як наступний шаг, ми почали шукати інші α -розпадні ядра, для яких вплив нуклонної структури на спектр випромінювання міг би виявитися помітним. При підборі ядер, ми обрали наступний базис:

1. Виміри гальмівних фотонів мають менші похибки для ядер з більш високою ймовірністю α -розпаду (при однакових енергіях фотонів), що відповідає більшим Q_α -значенням.
2. Розрахунки спектрів випромінювання більш стабільні при більш високих Q_α -значеннях ядер та менших енергіях фотонів.

Форм-фактори входять у визначення ефективного заряду Z_{eff} , тому він змінює спектри випромінювання після включення нуклонної структури у розрахунки. Але розрахунки вказують, що зміна спектрів при варіаціях цих параметрів виявляється малою для різних ядер. Більш того, Q_α -значення впливає на ймовірність випромінювання гальмівних фотонів. Чим більше цей параметр, тим випромінювання фотонів є більш інтенсивним. Звідси можна зробити висновок про те, що нуклонна структура повинна більш сильно проявлятися у спектрах випромінювання для ядер з більш великими Q_α -значеннями. Ця ідея дозволяє виявити область ядер для пошуку, що стало наступним кроком. Загалом, при зростанні маси ядра Q_α -значення постійно зростає. Тобто, ми отримали ядра у напрямку більш важких, де нуклонна

(а саме, форм-фактор α -частинки (7.15) має гармонічну поведінку у залежності від енергії фотона; при точковому наближенні цей форм-фактор перетворюється у електричний заряд α -частинки та осциляторна залежність зникає; форм-фактор ядра у (7.16) має подібну поведінку). Таким чином, їх уключення у розрахунки визиває появу малих осциляторних змін спектру випромінювання. Тоді з Рис. 7.1 (б) можна б було припустити, що при деяких енергіях, розташованих на відстанях періоду осциляцій, розрахунки з включеною нуклонною структурою опишуть експериментальні дані більш вдало по цій причині (у порівнянні з розрахунками без включення такої структури). Слід також врахувати, що експериментальні дані мають осциляції з малою помітною амплітудою, що не були враховані у моделі, представленій у цьому розділі, та при деяких значеннях енергії розрахунки з включеною нуклонною структурою виявляються у найкращій згоді з таким експериментом. У будь-якому випадку, такий шлях міг би дозволити удосконалити прояв розподілу нуклонів у α -частинці та ядрі під час α -розпаду через аналіз спектрів гальмівного випромінювання, що є цікавою задачею для наступних досліджень.

структура очікується бути помітною у спектрах випромінювання. Однак, розрахунки показали, що для важких та надважких ядер такий вплив нуклонної структури виявляється не помітним знов [див. Рис. 7.2 (а)].

Як виявляється, існують інші параметри, важливі у такому пошуку. А саме, це кулонівський бар'єр, що визначається на основі дочірнього ядра. Для легких ядер бар'єр менший та ймовірність випромінювання фотонів для таких ядер повинна бути більшою. Після аналізу розподілу Q -значень для найлегших α -емітерів ми дійшли до α -емітерів, що включають нейтронно-дефіцитні ізотопи від телуру (Te, tellurium, $Z = 52$) до цезія (cesium, $Z = 55$), що дуже швидко розпадаються. Такі α -емітери були предметом експериментальних [219, 220, 221] та теоретичних [222, 223] досліджень. Було виміряно напівперіоди α -розпаду ядер ^{110}Xe та ^{106}Te за допомогою мас-сепаратора у центрі GSI (GSI on-line mass separator) (отримано $T_{1/2} = 105_{-25}^{+35}$ мсек для ^{110}Xe та $T_{1/2} = 70_{-10}^{+20}$ μ сек для ^{106}Te [220]). Автори дослідження використали ту інформацію для оцінки Γ -ширин α -розпаду та аналізу амплітуд формування α -кластерів у емітерах вище, ніж ^{100}Sn . Q -Значення α -розпаду 4900(50) кеВ та період напіврозпаду $T_{1/2} = 0.70_{-0.17}^{+0.25}$ μ сек нейтронно-дефіцитного нукліда ^{105}Te було виміряно при використанні кореляційної техніки (*implantation-decay correlation technique*) у Аргонівській Національній Лаботорії (Argonne National Laboratory) [221]. Вонг (Wang), Гу (Gu) та Хоу (Hou) провели систематику досліджень та виміряних періодів напіврозпаду та Q_α -значень по різних каналам α -розпаду для ізотопів близ $N = Z = 50$ (починаючи від $Z = 52$ та доходячи до $Z = 55$), оцінили фактори формування (preformation factor) α -частинок для таких α -емітерів [222]. Місіцу (Misicu) та Різеа (Rizea) показали зростання ймовірності тунелювання для α -розпаду ^{106}Te під дією лазера (*ultra-intense laser field*) для різних інтенсивностей та частот [223].

З метою підтримати такі дослідження, оцінемо випромінювання фотонів при α -розпаді ядер ^{106}Te та ^{110}Te . Результати представлено на Рис. 7.2 (б).

Видно, що помітні зміни у спектрах випромінювання після включення нуклонної структури у модель та розрахунки дійсно відбуваються для ядра ^{106}Te ($Q_\alpha = 4.29$ MeV, $T_{1/2}=70$ мксек) навіть для енергій фотонів нижче ніж 1 MeV. Однак, для ядра ^{110}Te з меншим Q_α -значенням ($Q_\alpha = 2.73$ MeV) подібна суттєва роль нуклонної структури у спектрах вже втрачається. Можна запропонувати експериментаторам дослідження ролі нуклонної структури у спектрах випромінювання при α -розпаді у зовнішньому магнітному полі.

На Рис. 7.1 та 7.2 показано, що спектри випромінювання з багатонуклонною структурою знаходяться вище, ніж спектри без такої структури. Пояснюється це тим, що спектр змінюється за рахунок ефективного заряду $Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ [див. формули (7.9) та (7.10)]. Ефективний заряд у (7.9) є не постійним, а залежить від імпульсу \mathbf{k} фотона та форм-факторів $Z_\alpha(\mathbf{k})$ і $Z_A(\mathbf{k})$.

Якщо вважати α -частинку та ядро як точкові (тобто без багатонуклонної структури), то ми отримаємо постійні форм-фактори у формулах (7.10), що відповідають електричним зарядам α -частинки та ядра. Тобто у дипольному наближенні залежність ефективного заряду від імпульсу фотона втрачається [див. формулу (7.11)]. Такий випадок продемонстровано на Рис. 7.2 за допомогою нижньої кривої [див. суцільну синю лінію для ^{219}Ra на рисунку (а), суцільну синю лінію для ^{106}Te та штрихову коричневу лінію для ^{110}Te на рисунку (б)]. При неточкових α -частинці та ядрі форм-фактори вносять залежність від імпульсу фотонів у ефективний заряд. Такий випадок продемонстровано на Рис. 7.2 за допомогою верхньої кривої [див. штрихову червону лінію для ^{219}Ra на рисунку (а), штрих двічі-пунктирну червону лінію для ^{106}Te та штрих-пунктирну зелену лінію для ^{110}Te на рисунку (б)].

Ми визначаємо взаємодію між α -частинкою та ядром на основі α -ядерного потенціалу, що параметризований у роботах [112, 224, 225, 226] на основі аналізу експериментальної інформації великої кількості ядер. Тобто такий потенціал добре описує реалістичну взаємодію між α -частинками та

ядрами. На основі такого потенціалу чисельно розраховуються хвильові функції $\Phi_{\alpha\text{-nucl}}(\mathbf{r})$ [див. формулу (7.4)], та матричний елемент випромінювання (7.8). Тобто, ядро не розглядається як точкове у розрахунках хвильових функцій, але можна включити або виключити багатонуклонний опис ядра та α -частинки у ефективний заряд. Це змінює спектри випромінювання.

Спектр випромінювання з багатонуклонною структурою знаходиться вище спектра випромінювання без такої структури для всіх ядер. Це пояснюється тим, що ефективний заряд $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip})}$ при включенні багатонуклонної структури зростає [див. формули (7.20)]. Для ясного зрозуміння такого аспекту, на Рис. 7.3 показано відношення $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, micro})} / \tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, no-micro})}$ між ефективними зарядами, розрахованими з включенням багатонуклонної структури та без неї. Можна бачити, що роль багатонуклонної структури при визначенні ефе-

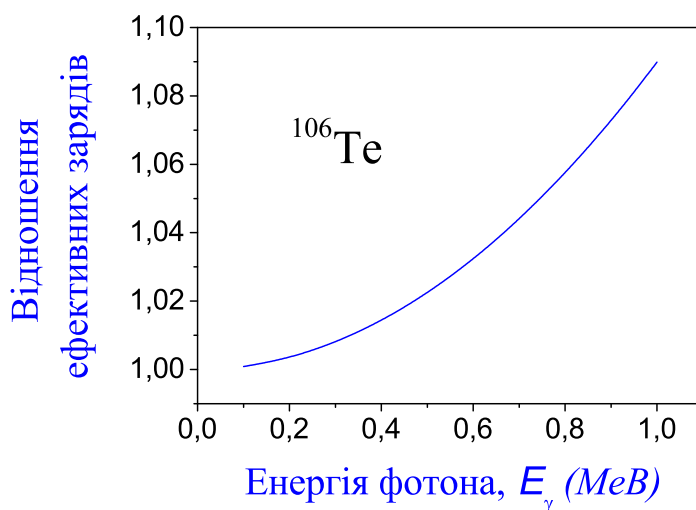


Рис.7.3 Відношення $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, micro})} / \tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, no-micro})}$ між ефективними зарядами, що розраховані з включенням багатонуклонної структури та без такої структури у залежності від енергії фотона [$\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, micro})}$ — ефективний заряд з включеною багатонуклонною структурою, яка визначається за формулою (7.20), $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, no-micro})}$ — ефективний заряд без такої структури, тобто для точкових α -частинки та ядра]. Можна бачити, що прояв нуклонної структури у розрахунках ефективного заряду $\tilde{Z}_{\text{eff}}^{(\text{dip, micro})}$ зростає з ростом енергії фотона. Це пояснює, що спектри випромінювання з включенням багатонуклонної структури у розрахунки виявляються вищим, ніж спектри випромінювання без такої структури на Рис. 7.2 (а,б). Різниця зростає з ростом енергії фотонів.

ктивного заряду зростає з ростом енергії фотона ⁴.

⁴Експонента $\exp[-(a^2k_x^2 + b^2k_y^2 + c^2k_z^2)/4]$ у матричному елементі p_{fi} у (7.20) подавляє спектр випромінювання (вона має протилежний вплив на спектр, ніж ефективний заряд). Але її роль практично дуже мала для енергій фотонів, що випромінюються при α -розпаді. Так, для α -частинки маємо $a, b, c \leq 1.5 = 1.5 \times 0.005^{-1} = 0.0075^{-1}$, $k_x, k_y, k_z \leq k = E_{\text{ph}} \leq 8 \text{ MeV}$ та отримуємо $ak_x \leq 0.06$ (у чисельних розрахунках ми записуємо усі змінні в одиницях MeV та MeV⁻¹).

7.4. Головні результати і висновки до Розділу 7

У Розділі проведено дослідження питання, чи можна побачити багатонуклонну структуру α -розпадаючого ядра у експериментальних спектрах гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує такий α -розпад. З метою отримати відповідь на таке питання, розроблено нову модель гальмівного випромінювання, яка враховує розподіл нуклонів у α -розпадаючій ядерній системі. Підхід, представлений у даному розділі, уперше був представлений у роботі [67], та він є подальшим розвитком теорії гальмівного випромінювання у ядерних реакціях, розвинутої у попередніх роботах [66, 65, 64, 65, 56, 57, 59, 58, 61, 62, 60, 63, 86]. Висновки з аналізу на основі такої моделі наступні:

1. Після включення формалізму нуклонної структури у модель, розрахункові спектри гальмівного випромінювання змінюється дуже слабо для більшості α -розпадних ядер [див. Рис. 7.2 (а) для α -розпаду ядра ^{219}Ra]. Однак, помітні зміни дійсно відбуваються для ядра ^{106}Te ($Q_\alpha = 4.29 \text{ MeV}$, $T_{1/2}=70 \text{ мксек}$) навіть для енергії випромінених фотонів до 1 MeV [див. Рис. 7.2 (б)].
2. Включення формалізму нуклонної структури у модель збільшує ймовірності гальмівного випромінювання фотонів.
3. Виявлено наступні тенденції для визначення ядер, для яких спектри гальмівного випромінювання будуть більш чутливими до внутрішньої нуклонної структури: (а) напрямок до ядер з меншим числом Z , (б) напрямок до ядер з більшим Q_α -значенням.

Підсумовуючи, відзначимо, що прояв багатонуклонних ефектів у спектрах гальмівного випромінювання при α -розпаді є достатньо слабким. Але у цьому розділі представлено новий підхід, за допомогою якого такі ефекти

можна виявити та їх вивчати, використовуючи аналіз гальмівних фотонів, що випромінюються у ядерних реакціях. Саме по цій причині можна полагати, що багатонуклонна структура ядер повинна більш ясно проявлятися у спектрах гальмівного випромінювання у кластерних розпадах, поділу, розсіянні протонів та легких ядер на ядрах (де енергії повинні бути суттєво вищими, ніж Q -значення α -розпадних ядер). Інша галузь фізики, де властивості багатонуклонної структури можна виявити за допомогою підходу, що представлений у цьому розділі, — це ядерні реакції у астрофізиці. На даний час, існують серйозні мотивації того, що у зірках створюються протонно збагачені ізотопи (proton rich isotopes) у процесах швидкого захоплення протонів ядрами (rapid proton capture process). Такі процеси супроводжуються випромінюванням гальмівних фотонів, та їх можна використати для досліджень властивостей багатонуклонної структури ядер. Враховуючи зростаючий інтерес до таких ядер та реакцій з ними, додається аналіз у Додатку Ж.2, тоді як більш ретельні результати планується отримати у наслідок нових більш інтенсивних та глибоких досліджень у цьому напрямку. Ці ідеї можна розглядати, як вказівку на перспективу подальших досліджень.

РОЗДІЛ 8

МОДЕЛЬ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ ПРИ РОЗСІЯННІ ЗАРЯДЖЕНИХ π^+ -МЕЗОНІВ НА ЯДРАХ

8.1. Вступ

Природа взаємодії між піонами та ядрами в області енергій від 0 до 1 Гев є предметом інтенсивних теоретичних і експериментальних досліджень [236]. Мотивацією таких досліджень є використання піонів в ядерних реакціях у якості зонда для здобуття більш глибокого розуміння структури ядра [237, 238, 239]. Особливої уваги приділено на розуміння дискретних і (низьколежачих) колективних станів ядер у пружному, непружному та квазіпружному розсіяннях, резонансному розсіянню (з поляризованими ядрами і без них), реакціях одно та двозарядного обміну, реакціях вибивання і поглинання. Крім того, багато зусиль було прикладено на зрозуміння піон-нуклонного резонансу $\Delta_{3,3}$ ($J = \frac{3}{2}$, $T = \frac{3}{2}$) та його ролі у піон-ядерній взаємодії.

Експериментальні вимірювання було виконано на Синхроциклотроні у ЦЕРН (CERN Synchro-cyclotron, див. [240]), на каналі піонів *M13* при використанні квадруполь-квадруполь-дипольного спектрометра піонів (*M13 pion channel using the quadrupole-quadrupole-dipole pion spectrometer*) у TRIUMF [Ванкувер (Vancouver), див. [241], також див. детальний опис каналу і спектрометра у роботах [242, 243]], на 7 Гев протонному синхротроні NIMROD (7 GeV proton synchrotron NIMROD) у Лабораторії Резерфорда (Rutherford Laboratory [244]), на піонному каналі і спектрометрі (EPICS) на фабриці мезонів Клінтона П. Андерсона LAMPF [pion channel and spectrometer (EPICS) at Clinton P. Anderson Meson Physics Facility (LAMPF), Лос-Аламос, [244, 247, 246, 245]], на установці спектрометра піонів у швейцарському Інсти-

туті ядерних досліджень [Swiss Institute for Nuclear Research (SIN), Швейцарія [249, 248]] Запропоновано експериментальну програму (для широкого спектру експериментів) для систематичного вивчення піон-ядерної взаємодії (див. [250]). Насьогодні ми маємо експериментальні дані перерізів для ${}^6,7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{28}\text{Si}$, ${}^{32,34}\text{S}$, ${}^{40,42,44,48}\text{Ca}$, ${}^{54}\text{Fe}$, ${}^{90}\text{Zr}$, ${}^{208}\text{Pb}$, т.д. для енергій налітаючих піонів T_π від 30 MeV до 860 MeV [244, 245, 241, 247, 240, 248, 249, 246, 251].

Для аналізу повних та диференціальних перерізів вимірювань (та отримання передбачень у деяких випадках) було застосовано оптичну модель [249, 245, 241, 252, 254, 253], α -кластерну модель [255], колективну модель DWIA [249, 247, 246, 251], мікроскопічну модель форм-факторів [246]. У таких моделях за допомогою фітінг-процедури було визначено параметри піон-ядерної взаємодії. Було визначено середньоквадратичні радіуси щільності нейтронів основного стану (для ${}^{40,42,44,48}\text{Ca}$ та ${}^{54}\text{Fe}$) [251]. Було також перевірено експериментально мультипольні матричні елементи нейтронів та протонів для збуджених станів (для ${}^{42,44,48}\text{Ca}$, див. роботи [246]). Довжини деформацій у непружному розсіянні було визначено з експериментальних даних [довжини для станів (2^+ ; 4.44 MeV) та (3^- ; 9.64 MeV) для ${}^{12}\text{C}$ [255], т.д.]. Такі характеристики підтверджують перспективи подальшого вивчення піон-ядерної взаємодії (у реакціях) у випадках, коли електромагнітні виміри не існують.

У теоретичному аспекті, на даний час, для опису взаємодії між піонами та ядрами сформувалося два лідируючих підходи. Перший підхід був запропонований Сатчлером (Satchler) у роботі [256], який був побудований у рамках оптичної моделі в основі нерелятивістського рівняння Шродінгера з використанням феноменологічного локального потенціалу Вудса-Саксонської форми (див. роботу [254]). Другий підхід, якого було уведено Джонсоном (Johnson) та Сатчлером у роботі [257] на основі рівняння Клейн-Гордона, використовує нелокальний потенціал типу Кісслінгера (Kisslinger-type potential)

при низьких енергіях та енергіях близ резонансу. Однак, через перетворення Крелл-Еріксона (Krell-Ericson transformation) останній формалізм можна звести до оптичної моделі з локальним потенціалом та перетвореними хвильовими функціями (див. роботи [252, 253]). Слід відзначити, що ключовим пунктом у ефективному описі піон-ядерної взаємодії є належне визначення ядерної частини взаємодії, яка інтенсивно досліджується та дискусується.

Гальмівне випромінювання фотонів, що супроводжує ядерні реакції, викликає великий інтерес. Однак, природа випромінювання жорстких фотонів у ядерно-ядерних зіткненнях остається відкритим питанням, за рахунок складних багатонуклонних процесів. Через це, перш ніж намагатися вирішити повністю багатонуклонну задачу ядерного розсіювання з випромінюванням фотонів, люди виконують більш прості розрахунки спектрів гальмівних фотонів, де у якості одного з об'єктів розсіяння обрано протон. Однак, навіть для протон-ядерного розсіювання яснє зрозуміння впливу ядерної взаємодії на спектр фотонів ще не отримано [31].

У цьому Розділі показано, що обчислені спектри гальмівного випромінювання виявляються достатньо чутливими до форми цього типу потенціалу. Тобто, випромінювання гальмівних фотонів може бути гарним інструментом для дослідження некулонівських взаємодій (тобто ядерних сил, кулонівських поправок і т. д.) при розсіянні позитивно заряджених піонів на ядрах. Однак, гальмівне випромінювання при розсіянні реальних (не віртуальних) піонів на ядрах ще ніколи не вивчалось теоретично і експериментально. Відзначимо, що випромінювання когерентних фотонів віртуальними піонами, які утворюються в ядерній матерії при розсіянні протонів на ядрах, було проаналізовано [258] в області енергій Δ -резонансів. Однак, у такому дослідженні при утворенні фотонів у цій реакції кулонівські сили за межами ядра-мішені (які дають найбільший внесок у когерентне і некогерентне гальмівне випроміню-

вання при піон-ядерному розсіянні) не були включені до аналізу¹. У цьому Розділі виконано аналіз вищевказаного питання. Тут показано, що ядерна взаємодія грає важливу роль у формуванні гальмівних спектрів, які можуть бути перевірені експериментально (в області високих енергій фотонів) за допомогою подальших вимірювань гальмівних фотонів.

8.2. Модель

У побудові формалізму випромінювання гальмівних фотонів (див. для протон-ядерного розсіяння та протонного розпаду [64, 65, 66], α -розпаду [56, 57, 59, 58, 60, 61, 62, 67], спонтанного поділу [63], потрійного поділу [87]) ми розвиваємо наступну логіку. Ми починаємо з формалізму, в основі якого полягає рівняння Дірака для одного нуклона. Потім, ми узагальнюємо це рівняння для опису системи нуклонів (тут ми беремо радіус-вектор центру мас повної системи як суму всіх радіус-векторів нуклонів). На наступному етапі, ми застосовуємо наближення (відоме у КЕД для одного нуклона), яке дозволяє отримати узагальнення рівняння Паулі для системи нуклонів, як перше наближення [тут ми отримуємо логіку, як визначити наступні наближення (стор. 33–35 у книзі [161]), зв'язок такого формалізму з релятивістською класичною механікою (стор. 35–36 у книзі [161]), т.д.]. На цьому етапі, ми вводимо векторний потенціал електромагнітного поля (стандартним шляхом КЕД через калібрування), що описує випромінювання фотонів від кожного нуклона. Ми перевіряємо такий формалізм через тест, щоб такий формалізм перетворювався до відомого рівняння Паулі після застосування відповідних наближень. Ми формулюємо гамільтоніан повної багатонуклонної системи у

¹Щоб досягти збіжності у розрахунках матричних елементів гальмівного випромінювання при розсіянні піонів на ядрах, при інтегруванні слід включити просторову область зі зовнішньою межею, досягаючи атомних оболонок ядра. Звідси стає зрозумілим суттєва роль кулонівських сил у отриманні спектрів випромінювання. У роботі [258] було розглянуто суттєво інший тип випромінювання фотонів, який не враховує такого суттєвого внеску кулонівських сил.

лабораторній системі відліку. Ми використовуємо просторові змінні для кожного нуклона. На такій основі, визначається повний оператор випромінювання ядерної системи в лабораторній системі відліку. Відносне прискорення між нуклонами утворює випромінювання гальмівних фотонів. Таким чином, нам потрібні відносні відстані між нуклонами для аналізу, та тому ми переписуємо повний гамільтоніан і повну хвильову функцію через такі відносні відстані. В результаті ми отримуємо член в операторі випромінювання, що відповідає руху повної ядерної системи в лабораторній системі (див., наприклад, перший член в рівнянні. (8) у роботі [66] для протон-ядерного розсіяння). При побудові хвильової функції повної ядерної системи ми відокремлюємо множник, що описує рух повної ядерної системи (наприклад, див. (10) у роботі [66] для протон-ядерного розсіяння). Також ми відокремлюємо інший множник відносного руху, так як ми оцінюємо, що відносний рух між двома ядерними фрагментами дає найбільший внесок у повний спектр гальмівного випромінювання (та тому нам потрібен цей множник для розрахунків).

У цьому Розділі ми узагальнюємо формалізм попередніх розділів на розсіяння піонів на ядрах. Для отримання перших оцінок гальмівних фотонів, що випромінюються при розсіянні піонів на ядрах, ми прикладаємо основні зусилля на те, що визначити лідируючий внесок випромінювання у повний спектр. Такий внесок заснований на відносному русі піонів відносно ядра. Ми не будемо аналізувати внутрішню структуру цих об'єктів, припускаючи, що вони дають менший вплив на спектр випромінювання².

Випромінювання гальмівних фотонів може бути уведено у формалізм π^\pm -ядерного розсіяння через кулонівське калібрування для кожного електри-

²Ми пояснюємо існування горбоподібного плато в експериментальних спектрах гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах у проміжній і високоенергетичній областях через існування суттєвого некогерентного випромінювання фотонів (що утворюється при взаємодії спінових властивостей окремих нуклонів з їх імпульсами) [66]. Такий вплив на спектр описується як додаток до лідируючого внеску випромінювання фотонів, що є когерентним. Тому, у даному Розділі, ми нехтуємо таким некогерентним ефектом (та також спіновими властивостями нуклонів).

чного заряду у системі як $\hat{\mathbf{p}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_i - \frac{z_i e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$, де $\hat{\mathbf{p}}_i = -i\hbar \nabla_i$ — імпульс піона або нуклона з номером i , $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$ — векторний потенціал електромагнітного поля, що формується від руху піона або нуклона з номером i , z_i — електричний заряд піона або нуклона з номером i . Модифікований гамільтоніан записується як $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\gamma$, де \hat{H}_γ — новий оператор, що описує випромінювання фотонів.

Лідируюча частина оператора випромінювання системи, що складається з π^\pm та ядра у лабораторній системі відліку (при нехтуванні доданками при \mathbf{A}_i^2 , $A_{i,0}$ та спірними доданками, див. Додаток 3.1, стор. 499) має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma = & -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k} \left[\mathbf{R} - \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \mathbf{r} \right]} \left\{ \frac{1}{m_A + m_\pi} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} z_\pi + \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} + \right. \\ & \left. + \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{z_\pi}{m_\pi} - \frac{1}{m_A} \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} - \frac{1}{m_A} \left[\sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right\}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

де $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\mathbf{R}$, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\mathbf{r}$, $\tilde{\mathbf{p}}_{Aj} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}_{Aj}$, \mathbf{R} — координати центру мас складної ядерної системи (ядра та піона), \mathbf{r} — відносна відстань між центром мас ядра та піона, $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ — відносна відстань між центром мас ядра та нуклона з номером j цього ядра, \mathbf{R} , \mathbf{r} та $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ визначені у (3.5) у Додатку 3.1, зірочка позначає комплексне спряження, m_i та z_i — маса та електричний заряд нуклона з номером i ($i=1 \dots A$) або маса та електричний заряд π^\pm -мезона ($i = A + 1$), m_π та m_A — маси π^\pm та ядра, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона, $(\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)})$, \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона, $w_{\text{ph}} = kc = |\mathbf{k}|c$.

Гамільтоніан системи ядра та π^\pm -мезона має вигляд $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_N(\mathbf{r}) + V_C(\mathbf{r})$, де V_C — кулонівський потенціал взаємодії між піоном та ядром, V_N — потенціал некулонівських взаємодій між піоном та ядром, m — зведена маса піона та ядра [252]. Компоненту V_N можна записати у вигляді локального типу Кісслінгера (local Kisslinger-type form, див. [252, 253]) відпо-

відно до формалізму Джонсона (Johnson) та Сатчлера (Satchler) [257] як (ми додаємо верхніх індексів “*JS*” та “*WS*” для позначення типу формалізму)

$$\begin{aligned}
 V_N^{(JS)}(\mathbf{r}) &= U_N(r) + \Delta U_C(r), \\
 U_N(r) &= \frac{(\hbar c)^2}{2w} \left\{ \frac{q(r)}{1 - \alpha(r)} - \frac{k^2 \alpha(r)}{1 - \alpha(r)} - \frac{\nabla^2 \alpha(r)}{2(1 - \alpha(r))} - \left[\frac{\nabla \alpha(r)}{2(1 - \alpha(r))} \right]^2 \right\}, \\
 \Delta U_C(r) &= \frac{\alpha(r) V_C(r) - V_C^2(r)/2w}{1 - \alpha(r)},
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

або у вигляді локальної Вудса-Саксонівської форми, відповідно до формалізму оптичної моделі [254] як³

$$\begin{aligned}
 V_N^{(WS)}(\mathbf{r}) &= -U f(r) - i W g(r), \\
 f(r) &= [1 + \exp((r - R_u)/a_u)]^{-1}, \\
 g(r) &= [1 + \exp((r - R_w)/a_w)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Тут w — повна енергія піона у системі центру мас, $q(r)$ та $\alpha(r)$ відповідають s -хвильовій частині та p -хвильовій частині піон-ядерної взаємодії (див. роботи [252, 257]). U та W — дійсна та уявна частини сили потенціала (8.3), R_u та R_w — радіус-параметри потенціала (8.3), a_u та a_w — параметри дифузності (див. Табл. 2 у роботі [254]).

Лідуючий матричний елемент випромінювання має вигляд (див. (3.17), Додаток 3.2 на стор. 501, стор. 503–506 для розрахунків та визначення

³У даному Розділі ми обмежуємося тільки реальною частиною потенціалу у розрахунках спектрів гальмівного випромінювання. Мотиви таких розрахунків наступні. Уявна частина потенціалу пов’язана з внутрішніми (непружними) механізмами всередині ядра, які істотно ускладнюють аналіз. Включення пружних механізмів дасть додаткові нові питання у цій задачі (наприклад, роль таких механізмів в розсіянні в залежності від енергії випромінювання фотонів; такі механізми можуть бути пов’язані з утворенням некогерентного випромінювання та ін). Таким чином, ми хочемо спочатку побудувати коректний базис для опису гальмівного випромінювання у пружному розсіянні. На наступному етапі доцільно буде оцінити пружні механізми, використовуючи вже побудований базис гальмівного випромінювання у пружному розсіянні (що можна бути виконати як продовження дослідження у цьому Розділі).

хвильової функції піон-ядерної системи)

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\ &\times \left\langle \Phi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \right| \Phi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (8.4)$$

де ми вводимо *ефективний заряд* π^\pm -ядерної системи як

$$Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \left\{ \frac{m_A z_\pi}{m_A + m_\pi} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_\pi} \right\}, \quad (8.5)$$

зарядовий форм-фактор ядра як

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \dots \boldsymbol{\rho}_{AA}) \left| \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \dots \boldsymbol{\rho}_{AA}) \right\rangle. \quad (8.6)$$

Тут Ψ_s — хвильова функція повної піон-ядерної системи, $s = i$ або f (індекси i та f означають стан перед випромінювання фотона та стан після такого випромінювання), $\Phi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ — функція, що описує відносний рух (з тунелюванням) π^\pm відносно до ядра (без опису внутрішніх відносних зміщень нуклонів у ядрі), $\psi_{\text{nucl},s}(\beta)$ — багатонуклонна функція, що описує внутрішні стани нуклонів у ядрі (вона визначає просторові стани на основі відносних відстаней $\boldsymbol{\rho}_1 \dots \boldsymbol{\rho}_A$ нуклонів ядра відносно його центру мас, та спін-ізоспінні стани також), β_A — номери $1 \dots A$ нуклонів ядра.

Найпростіше визначення матричного елемента можна отримати, якщо (1) застосувати дипольне наближення для опису ефективного заряду повної системи, та (2) знехтувати відносними зміщеннями нуклонів у ядрі у розрахунках форм-фактора (див. Додаток 3.3, стор. 503 для розрахунків матричних елементів). У таких наближеннях ми визначаємо переріз випромінювання гальмівних фотонів у лабораторній системі відліку у рамках формалізму роботи [65] та ми не повторюємо його у цьому Розділі:

$$\frac{d^2 \sigma(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = \frac{e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{\text{ph}} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p_{\text{el}} \frac{dp_{\text{el}}^*(\theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c.c.} \right\}, \quad (8.7)$$

де с.с. означає комплексне спряження. Ми розраховуємо радіальні хвильові функції чисельно відносно до обраного потенціалу взаємодії між π^\pm та сферично симетричним ядром [див. (8.2) для ядерної частини потенціалу та корекцій відповідно до формалізму Джонсона та Сатчлера, див. (8.3) для ядерної частини потенціалу відповідно до формалізму оптичної моделі].

8.3. Аналіз

Ми застосуємо представлений вище підхід для оцінки спектрів гальмівних фотонів, що випромінюються при розсіянні π^+ -мезонів на ядрах. Почнемо з розрахунків перерізів випромінювання, коли взаємодія між π^+ -мезонами і ядрами визначається у формалізмі оптичної моделі з ядерним потенціалом Вудса-Саксона. Оцінимо вплив ядерної частини потенціалу на спектр випромінювання. Такі розрахунки перерізів випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні π^+ -мезонів на ядрах ^{44}Ca при енергії налітаючого мезона $E_{\pi^+} = 116$ МеВ представлено на Рис. 8.1 (а). На рисунку ясно видна відмінність між спектрами в області високих енергій фотонів, визвана варіаціями сили U ядерної частини потенціалу (8.3). Це є підтвердженням прояву ролі ядерної взаємодії у формуванні випромінювання фотонів. Таке явище проявляється більш сильно у області високих енергій фотонів.

Проаналізуємо, наскільки сильно змінюється спектр гальмівного випромінювання, якщо взаємодію між піонами та ядрами визначити у формалізмі Джонсона-Сэтчлера. Такі розрахунки для ядра ^{44}Ca при енергії налітаючих піонів $E_{\pi^\pm} = 116$ МеВ представлено на Рис. 8.1 (б) у порівнянні з попередніми результатами, наведеними на Рис. 8.1 (а). Можна бачити принципову різницю у поведінці спектрів.

Насьогодні немає ніякої інформації про гальмівні фотони, що можуть випромінюватися при розсіянні піонів на ядрах (ми навіть не знайшли жо-

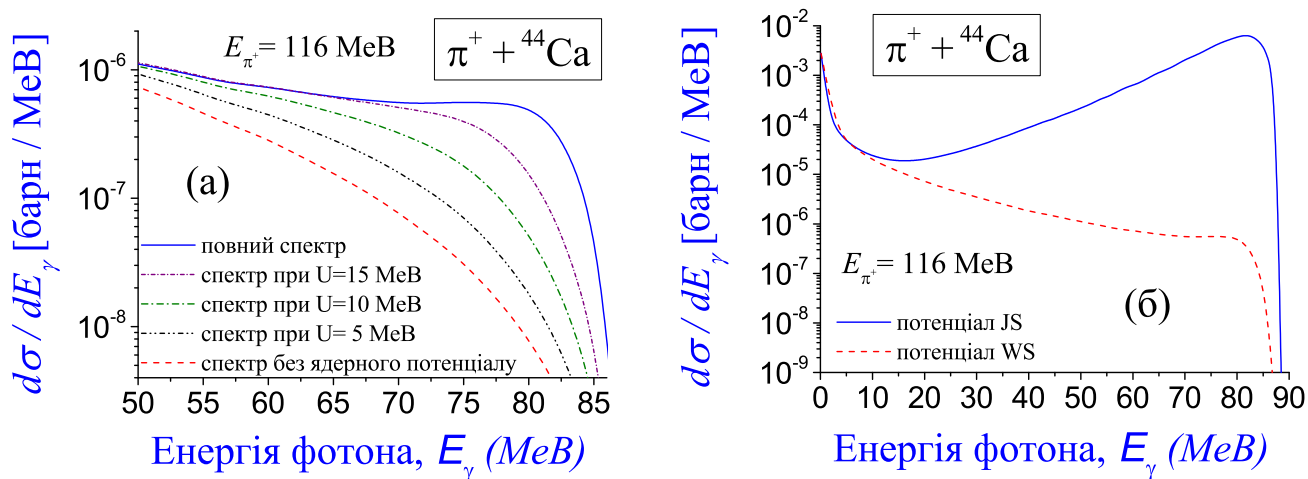


Рис.8.1 Перерізи гальмівних фотонів, що випромінюються при розсіянні π^+ -мезонів на ядрах ${}^{44}\text{Ca}$ при енергії піонів 116 MeV [параметри розрахунків: потенціали $V_N^{(WS)}$ і $V_N^{(JS)}$ визначено за формулами (8.3) і (8.2), параметри потенціалів взято з роботи [254] і Таблиці 1 у роботі [257], кут θ_γ між напрямками випромінювання фотона і руху π -мезона дорівнює 90°]. [Панель а]: Спектри гальмівного випромінювання, в яких взаємодія між π^\pm -мезонами та ядрами описується оптичною моделлю з потенціалом Вудса-Саксона. Показано, як саме змінюється спектр у залежності від сили U ядерної компоненти потенціалу (8.3). Можна бачити стабільність розрахунків. [Панель б]: Спектри гальмівного випромінювання, в яких взаємодія між π^\pm -мезонами та ядрами визначається у формалізмі Джонсона-Сатчлера (див. синю суцільну лінію, позначено як «потенціал JS») і формалізмі оптичної моделі з потенціалом Вудса-Саксона (див. червону пунктирну лінію, позначено як «потенціал WS»). Можна бачити принципово різну поведінку між спектрами. Ця відмінність пояснюється тим, що дві теорії, що покладено в основу розрахунків спектрів випромінювання, істотно відрізняються (тут доданки від кулонівської взаємодії однакові): формалізм Джонсона-Сатчлера базується на релятивістському рівнянні Клейна-Гордона, тоді як формалізм оптичної моделі заснований на нерелятивістському рівнянні Шредінгера. Відзначимо, що обидва спектри, отримані у формалізмі Джонсона-Сатчлера і формалізмі оптичної моделі з потенціалом Вудса-Саксона, збігаються при низьких енергіях фотонів (розрахунки не пронормовані ні на одну точку даних).

дної ідеї про організацію таких досліджень у літературі). Таким чином, немає експериментальної основи для висновків про реалістичні значення параметрів ядерної частини піон-ядерного потенціалу за допомогою аналізу гальмівного випромінювання. В той же час, такі фотони повинні випромінюватися у такій реакції. Ми показуємо чутливість спектрів гальмівного випромінювання від параметра U . У завершенні, робиться висновок про перспективність аналізу гальмівного випромінювання для отримання оцінок цього параметра з експериментальних досліджень.

Без аналізу гальмівних фотонів, дослідження потенціалу взаємодії у рамках оптичної моделі було представлено у роботі [254]. Ми використовуємо результати роботи тих людей. Тут вказано наступні параметри для реакції $\pi^+ + {}^{44}\text{Ca}$ при енергії пучка піонів 116 MeV, використовуваних (див. Таблицю 2, стор. 760 у роботі [254])

$$U = 24.15, \quad R_u = 1.50, \quad a_u = 0.20. \quad (8.8)$$

У розрахунках на Рис. 8.1 (а) ми фіксуємо ці параметри R_u, a_u та змінюємо U , отримуючи різні спектри. Випадок $U = 24.15$ MeV представлений верхнім спектром (див. суцільну синю лінію на цьому рисунку). Такий же спектр для розрахунків по оптичній моделі представлений на Рис. 8.1 (б) [див. червону пунктирну лінію на цьому рисунку, параметри визначені у (8.8)].

Як було вказано раніше, для гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах не було отримано ясної картини про вплив ядерної взаємодії на спектр фотонів [31]. Провідний внесок у повний спектр у цій реакції можна оцінити за допомогою розрахунків оптичної моделі (де ми отримуємо когерентні фотони). Виявлено схожість у розрахунках матричних елементів випромінювання, заснованих на оптичній моделі між розсіюванням протонів і розсіюванням піонів. Таким чином, було б корисним виявити, чи існує аналогічна чутливість спектра випромінювання (при високих енергіях фотонів) від ядерної частини потенціалу для розсіювання протонів на ядрах. Ми спосте-

рігаємо стійку залежність спектрів гальмівного випромінювання від сили V_R ядерної частини протон-ядерного потенціалу в області високих енергій (див. Рис. 8.2). Відзначимо, що чіткої залежності спектрів від ядерних параметрів протон-ядерного потенціалу раніше не було знайдено ніколи.

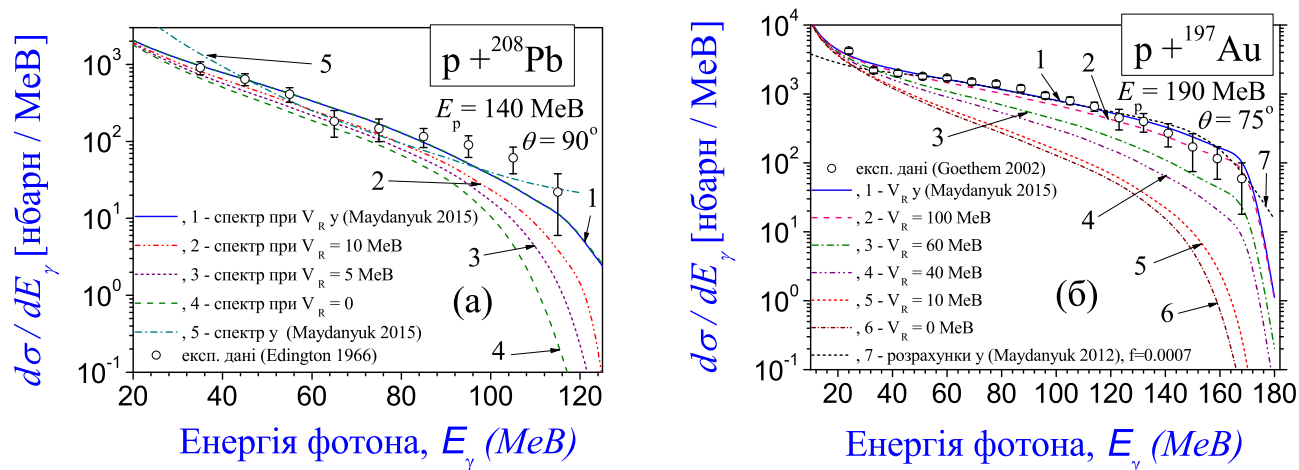


Рис.8.2 Ймовірності гальмівного випромінювання фотонів при розсіянні $p + {}^{208}\text{Pb}$ при енергії пучка протонів $E_p = 140$ MeV (а) та $p + {}^{197}\text{Au}$ при енергії пучка протонів $E_p = 190$ MeV (б) у порівнянні з експериментальними даними (Edgington 1966: [1]) і (Goethem 2002: [6]) (кругові точки) [розрахунки виконано відповідно до формалізму (Maydanyuk 2012: [65]) з електричним компонентом p_{el} , що визначений у (36) у тій роботі (без магнітних доданків $p_{mag,1}$ і $p_{mag,2}$ у (36) у роботі [65], без некогерентного гальмівного випромінювання, якого було досліджено у роботі [66]), параметри протон-ядерного потенціалу узяті з (46)–(47) роботи (Maydanyuk 2015: [66]) при наближенні $r_c = r_R = 0.95$ фм]. Можна бачити прояв зміни спектрів при великих енергіях у залежності від сили V_R ядерної частини протон-ядерного потенціалу.

Для опису розсіяння протонів на ядрах ми визначаємо параметри потенціалу, відповідно до формалізму [66] (див. формули (46)–(47) у цій роботі, тут ми дотримуємося детального дослідження [148], яке зараз високо цитується та було відтестовано багатьма людьми). У розрахунках спектрів гальмівного випромінювання на Рис. 8.2 (а,б), ми змінюємо сили V ядерної частини потенціалу. Найкраще згода між розрахунками і експериментальними даними відповідає значенням параметра V_R , вказаним у [66] (для обох реакцій).

У даному Розділі ми зосередимося на з'ясуванні питання, чи можуть

спектри змінюватися суттєво при варіюванні V_R (чому це виникає, якщо воно є). Ясне розуміння залежності спектрів від параметра ядерної частини взаємодії можна отримати, якщо опустити некогерентне гальмівне випромінювання. Таким чином, ми не будемо використовувати такі доданки у розрахунках. Ми знаходимо, що цього вже достатньо, щоб встановити не слабку залежність спектрів від параметра V_R . Але, цього ще недостатньо, щоб зробити висновок про реалістичність значення цього параметра, тому що було б краще включити в аналіз ще доданки від некогерентного випромінювання (які могли б змінити спектри при малих енергіях фотонів). Існує також спін-орбітальний член у потенціалі протон-ядерної взаємодії (див. $v_{so}(r)$ у (46) у роботі [66]; на відміну від піон-ядерного розсіювання). Але, ми оцінюємо невелике гальмівне випромінювання за рахунок цього доданку.

8.4. Перспективи вивчення некогерентних фотонів

У формулу (8.1) не включені спини нуклонів ядра. Ми вивчали роль спінів окремих нуклонів повної ядерної системи у формуванні гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах [65, 66], а також при α -розпаді [67]. Для розсіювання протонів на ядрах повне гальмівне випромінювання можна розділити на некогерентне випромінювання (тобто випромінювання, що виникає від взаємодії розсіяного протона з ядром в цілому), та когерентне випромінювання (тобто випромінювання, що виникає за рахунок взаємодії протона розсіяння з окремими нуклонами у ядрі).

У попередніх дослідженнях [65, 66, 67] ми врахували обидва аспекти. Повний матричний елемент випромінювання має доданок, що відповідає некогерентному випромінюванню, і доданки, що відповідають різним аспектам когерентного випромінювання. Це дозволяє оцінити внесок від кожного компонента у повний спектр гальмівного випромінювання. Це було реалізовано

для розсіювання протонів на ядрах та α -розпаду (частково), але не для розсіювання піонів на ядрах. Однак, у цьому Розділі ми хотіли б обмежитися вивченням когерентного випромінювання з наступних причин.

1. Вивчення некогерентного гальмівного випромінювання є більш складною задачею з математичної та чисельної точок зору. У літературі ми не знайшли будь-якої інформації про випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні піонів на ядрах. Таким чином, не можливо порівняти наші розрахунки з результатами інших людей (ми вперше вивчаємо гальмівне випромінювання у піон-ядерному розсіянні). За нашими оцінками, некогерентне випромінювання (його внесок у повний спектр) при розсіянні піонів на ядрах є істотно чутливим до розрахунків когерентного випромінювання. По цій причині, поперш ми хочемо побудувати надійний базис для опису (і оцінки) когерентного гальмівного випромінювання при розсіянні піонів на ядрах. Таким чином, основної уваги у цьому Розділі буде приділено побудові моделі когерентного гальмівного випромінювання у піон-ядерному розсіянні.
2. Вивчення ролі спінів та інших характеристик окремих нуклонів ядра входить до наших інтересів дослідження по цій темі. Ми плануємо зробити це, як природний наступний крок. Тут ми плануємо почати з формалізму [66] [див. Розділи E, F, формули (33)–(37), (41), (43)–(45) у статті, де включено спінові доданки] з необхідним узагальненням.
3. Якщо повернутися до нашого попереднього дослідження ролі окремих нуклонів ядра і спіна розсіяного протона, то можна виявити наступне. Експериментальні спектри гальмівного випромінювання [6, 4, 184] у розсіянні протонів на ядрах мають горбоподібне плато усередині досліджуємої області енергій фотонів (що відповідає середнім енергіям фотонів). Вони зменшуються до кінематичної межі для фотонів високих енергій

(це є дані для розсіювання $p + {}^{208}\text{Pb}$ при енергії пучка протонів 140 і 145 MeV, розсіювання $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{58}\text{Ni}$, $p + {}^{107}\text{Ag}$ і $p + {}^{197}\text{Au}$ при енергії пучка протонів 190 MeV). Однак експериментальні гальмівні спектри [21, 187, 59, 58] при α -розпаді ядер ${}^{210,214}\text{Po}$, ${}^{226}\text{Ra}$ мають форму логарифмічного типу без існування горбоподібного плато. Побудувавши власний об'єднаний формалізм [65, 66, 67], ми пояснили цю різницю між спектрами гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ядрах і α -розпаді. У розсіянні протонів на ядрах, ненульовий спін розсіяного протона дає новий тип взаємодії, що заснований на його співвідношенні з імпульсами окремих нуклонів ядра [див. p_4 у (43) і (44) у роботі [66]]. Це призводить до виникнення нового типу некогерентного гальмівного випромінювання, яке відсутнє в α -розпаді. Включення матричного елемента некогерентного типу p_4 для розсіювання протонів на ядрах у розрахунки змінює спектри випромінювання (в спектрах з'являється горбо-подібне плато) і дозволяє добре описати експериментальні дані.

Згідно до результатів роботи [67], при більш високих енергіях фотонів внутрішня структура α -частинки при α -розпаді грає більш важливу роль у її взаємодії з ядром. Це могло б дати неврахований раніше некогерентний внесок у повний спектр випромінювання.

Таким чином, якщо врахувати логіку вище і взяти нульовий спін піонів до уваги, то можна встановити мале некогерентне гальмівне випромінювання у піон-ядерному розсіянні. Однак, цей тип випромінювання збільшується при більш високих енергіях фотонів і піонів. Ця задача є більш складною, та більш доцільно зосередитися на неї у подальших дослідженнях (після отримання розуміння когерентної випромінювання у піон-ядерному розсіянні).

8.5. Порівняння нашої моделі з підходом [258]

Як було вказано (див. Розділ 8.1), у роботі [258] було досліджено випромінювання когерентних фотонів віртуальними піонами, які самі народжуються в ядерній матерії при розсіянні протонів. Ми виявляємо, що цей тип випромінювання істотно відрізняється від фотонів, вивчених в цьому Розділі. При народженні фотонів в процесі реакції, досліджуємої у роботі [258], не враховано кулонівські сили поза межами ядра-мішені. Але, найбільший внесок у повні когерентний та некогерентний спектри дає член гальмівних фотонів, випромінюваних такими кулонівськими силами на просторовій області поза межами ядра при розсіянні реальних піонів (в пучках) на ядрах. Якщо включити такий внесок у розрахунки повного спектру гальмівного випромінювання, то роль ядерних сил буде істотно знижена (тобто оцінити роль ядерної взаємодії за допомогою аналізу гальмівного випромінювання виявляється істотно складніше). Але у цьому Розділі ми показуємо, як це реалізувати.

Порівнюючи наш формалізм з роботою [258], ми знаходимо наступне:

- В основу наших розрахунків матричних елементів покладено хвильові функції піон-ядерної системи, відповідно до основних положень квантової механіки. Ці хвильові функції є комплексними, безперервними по всій просторовій області їх визначення. Вони визначаються відповідно до належних граничних умов, яких обрано для досліджуваної реакції. На такій основі, у розрахунках гальмівних перерізів враховано інтерференційні ефекти (на відміну від підходу [258]). Це стане важливим, якщо ми вивчимо окремі внески різних типів випромінювання фотонів у повний спектр гальмівного випромінювання, і оцінюємо ядерну взаємодію з аналізу експериментальних даних гальмівного випромінювання (що є однією з головних задач тематики гальмівного випромінювання).
- Ми отримуємо пряму відповідність між взаємодією між різними ядра-

ми та хвильовими функціями. У деяких випадках ці хвильові функції можуть істотно відрізнятись для (1) різних ядер або різних ізотопів у розсіянні, (2) однакових ядер у розсіянні (у залежності від обраних внутрішніх механізмів всередині складеної ядерної системи) [тобто, опис ядерної матерії може істотно відрізнятись як для зв'язаних станів ядер без аналізу розсіювання, так і для незв'язаних станів ядер, що приймають участь у розсіянні].

- У роботах [75, 76] показано, що більш точний стаціонарний розгляд формування складеної ядерної системи при розсіянні (навіть без уключення непружних механізмів) може істотно змінювати оцінки перерізів реакцій (наприклад, до 4 разів, тобто більше 100 відсотків, для реакцій $\alpha + {}^{40,44,48}\text{Ca}$), навіть для однакових повних хвильових функцій з однаковими граничними умовами. Причина полягає у більш акуратному описі внутрішніх механізмів усередині повної ядерної системи, які можуть бути оцінені через різні проникності (для одних і тих-же хвильових функцій), які саме і використовуються при визначеннях перерізів реакцій. Такі квантові ефекти існують також при розсіянні протонів та піонів на ядрах. Підхід [258] повністю не враховує існування такого невеликого ефекту (а наш формалізм дозволяє повністю включити його у формалізм та розрахунки).
- Наш формалізм базується на наближенні Хартрі при визначенні повної хвильової функції (для системи ядро-піон). При побудові хвильової функції ядра використовується антисиметризація однонуклонних хвильових функцій (що відповідає врахуванню принципу Паулі). Цей аспект можна досліджувати та розвивати у нашому формалізмі випромінювання фотонів (тоді як принцип Паулі у підході [258] повністю відсутній).

Таким чином, наша модель використовує більш повний квантовий ба-

зис в описі розсіювання у порівнянні з формалізмом [258]. Це дозволяє нам більш акуратно описати розсіяння на основі відомої експериментальної інформації. Якщо ми хочемо отримати інформацію про взаємодію між ядрами та піонами (або протонами) з вимірювань гальмівного випромінювання, то цей аспект стає принципово важливим. Але у дослідженнях цього Розділу не аналізуються резонанси, враховані у роботі [258]. Це питання є предметом перспективного включення у подальші дослідження.

8.6. Головні результати і висновки до Розділу 8

У даному Розділі проведено перші дослідження випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні піонів (у пучках) на ядрах. Підхід, представлений у даному розділі, уперше був представлений у роботі [68], та він є подальшим розвитком теорії гальмівного випромінювання у ядерних реакціях (викладеної у попередніх розділах). Мотивацією даного дослідження є припущення, що такі фотони можуть бути використані в якості нового незалежного тесту не кулонівської (ядерної) частини піон-ядерної взаємодії. У Розділі побудовано нову модель гальмівних фотонів, що випромінюються у цій реакції. Для опису взаємодії між піонами і ядрами використовуються два ядерних потенціалу: (1) потенціал типу Кісслінгера відповідно до формалізму Джонсона-Сетчлера, отриманий за допомогою перетворення Крелла-Еріксона з рівняння Клейна-Гордона для розсіювання піонів на ядрах [257], та (2) потенціал Вудса-Саксона, який використовується Аклером *та ін.* у розрахунках на основі оптичної моделі [254].

Встановлено, що випромінювання фотонів, сформоване за рахунок ядерної частини потенціалу Джонона-Сэтчлера, вносить істотний внесок у повний спектр. Таким чином, згідно до формалізму [257], ядерна взаємодія відіграє важливу роль у формуванні випромінювання гальмівних фотонів. Крім того, таку взаємодію можна вивчати експериментально за допомогою вимірювань гальмівних фотонів.

Важливість такого результату посилюється, якщо нагадати, що, за винятком роботи [67], ще ніколи не вдавалося витягти будь-яку інформацію про ядерні параметри оптичної моделі в ядерних реакціях з аналізу існуючих експериментальних даних супутнього гальмівного випромінювання. Це пояснюється тим, що кулонівська взаємодія відіграє більш велику роль у формуванні гальмівного випромінювання, ніж ядерна. Наші результати для

піон-ядерного розсіяння показують, що спектри гальмівного випромінювання є дійсно чутливими до параметрів кулонівської і ядерної взаємодій в області високих енергій фотонів. Вперше ми спостерігаємо аналогічну залежність спектрів випромінювання від сили ядерної частини оптичного потенціалу для протон-ядерного розсіяння (див. Рис. 8.2). Таким чином, можливі вимірювання гальмівного випромінювання фотонів були б хорошим інструментом для отримання нової інформації про кулонівську і ядерну взаємодії між піонами та ядрами.

РОЗДІЛ 9

ПРОБЛЕМА ПРОНИКНОСТІ БАР'ЄРІВ У ЗАДАЧІ ПРОТОННОГО РОЗПАДУ: КВАНТОВИЙ ПІДХІД ТА ПОЧАТКОВІ УМОВИ РОЗПАДУ

9.1. Вступ

Ядра, що розташовані далеко від протонної лінії стабільності, є протонними емітерами з основного стану, тобто ядрами, які є нестабільними відносно вильоту протона з основного стану. Відповідні періоди напіврозпаду, що знаходяться у діапазоні від 10^{-6} секунд до декількох секунд, є достатньо великими, щоб отримати багату спектроскопічну інформацію. Експериментально протонні емітери були відкриті в області мас $A \approx 110, 150$ і 160 (див. роботи [259, 260, 261, 262] і літературу у цих роботах). Передбачається, що в найближчому майбутньому будуть відкриті нові області протонно нестабільних ядер за допомогою техніки радіоактивних пучків.

На початку материнське ядро емітера знаходиться у квазістаціонарному стані і розпад розглядається як процес, при якому протон тунелює через потенціальний бар'єр. На сьогоднішній день найбільш поширені три підходи [117]: *підхід у Борнівському наближенні (distorted wave Born approximation, DWBA)*, *двохпотенціальний підхід (two-potential approach, TPA)* та *ВКБ-підхід*, що заснований на описі проникнення протона через бар'єр та базується на формулі проникності Вентцеля-Крамерса-Бріллюена (ВКБ; *Wentzel-Kramers-Brillouin, WKBA*) у термінах квазікласичної теорії у наближенні першого порядку. У якості основної характеристики для критерію, наскільки успішно описано протонний розпад, використовується період напіврозпаду, який визначається на основі гамма ширини, що обчислюється за допомогою

одного з підходів вище. У систематичному вивченні ці підходи корелюють між собою, тоді як при визначенні гамма ширин розрахунок проникності бар'єру є ключовим пунктом. Тоді як третій підхід вирішує це питання безпосередньо, у першому і другому підходах проникність бар'єру не розглядається. Але в цих підходах розрахунки гамма ширин засновані на узгодженості між хвильовими функціями в початковому стані (коли протон займає зв'язаний стан перед розпадом) і кінцевому стані [коли цей протон після тунелювання через бар'єр рухається назовні, без врахування можливих осциляцій пакету (що описує еволюцію цього протона) у внутрішньої області і в області бар'єру]. Проте, більш точну інформацію про взаємозв'язок між амплітудами і фазами цих хвильових функцій можна отримати з єдиного розгляду проникнення протона через бар'єр, яке розглядається у ВКБ підході. Тобто, ми повертаємося до задачі проникності бар'єра з визначенням хвилі, що падає на бар'єр, і хвилі, що пройшла крізь нього у зовнішню область.

Метою дослідження у Розділі є перехід від ВКБ-опису тунелювання протона через бар'єр до повністю квантового підходу без квазікласичних та інших наближень. Формалізм будується у напрямку розвитку методу багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ, див. роботи [263, 264, 265, 54]; раніше цей метод було побудовано для найпростіших одномірних бар'єрів прямокутної форми), узагальнюючи його до опису радіальних бар'єрів довільної форми. З метою виконати таке удосконалення, ми обмежимося розглядом сферично симетричних протонних емітерів із вильотом протонів з основного стану, та передбачається, що включення ядерних деформацій можна підключити потім стандартним чином. Ця перспектива методу, раніше не досліджена, дозволяє описати динамічно проникнення протона через бар'єр довільної форми у повністю квантовому розгляді, обчислювати проникність і відбиття відносно бар'єру без квазікласичних обмежень, аналізувати можливості квазікласичного та інших підходів, використовувати тести квантової механіки.

9.2. Теоретичний підхід

9.2.1. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів: проблеми та досягнення

Підхід до опису одновимірного руху частинки над бар'єром на основі багаторазових внутрішніх відбиттів стаціонарних плоских хвиль відносно границь давно відомий (див. [266, 267, 268], також [270] та посилання у цих роботах; також метод фазових функцій [269]). Тунелювання частинки під бар'єром було також описано успішно на основі багаторазових внутрішніх відбиттів пакетів відносно границь (цей підхід було названо *методом багаторазових внутрішніх відбиттів* або *методом БВВ*, див. [263, 264, 265, 54]). У такому підході вдалося об'єднати: 1) неперервний зв'язок між рішеннями для надбар'єрного руху та підбар'єрного тунелювання для пакетів на кожному етапі (згідно з формалізмом методу БВВ) і повних пакетів; 2) збіг амплітуд від стаціонарної хвильової функції (ВФ), що пройшла, та відбитої на кожній області, отриманих у підході БВВ, з відповідними амплітудами, отриманими стандартними методами квантової механіки; 3) всі нестаціонарні потоки на кожному етапі не дорівнюють нулю, що підтверджує проходження пакетів під бар'єром (тобто їх "тунелювання"). В рамках такого методу нестаціонарне тунелювання отримало власну інтерпретацію, а сам метод дозволив вивчати цей процес в довільних момент часу і координаті простору. У розрахунку фазових часів метод виявився ефективним [71]. Його було адаптовано до рішення задач розсіяння частинок на ядрах та α -розпаду у сферично симетричному наближенні з простими радіальними бар'єрами [263, 264, 54] та тунелювання фотонів [264, 71]. Проте, при розвитку підходу БВВ виникали наступні три проблеми.

1) *Проблема ефективності методу*. Підхід багаторазових відбиттів було доведено для руху частинки над прямокутним бар'єром і для її тунелюва-

ння під ним [268, 264]. Проте, після найпростішого ускладнення бар'єру через додавання другої прямокутної сходинки вже стає складним зрозуміти, як при розрахунку амплітуд виділяти необхідні відбиття хвиль зі всієї їх різноманітності. Хоча такі точні рішення для стаціонарних амплітуд і були отримані для двох прямокутних бар'єрів довільної форми [54, 263], проте залишалося неясним, як узагальнити такий підхід на бар'єри довільної форми. У роботі [271] були розглянуті багаторазові відбиття хвиль при описі тунелювання через безліч однакових прямокутних сходинок, що розділені на однакові відстані. Проте, в цій роботі розв'язки для амплітуд були представлені лише для двох сходинок у наближенні, коли вони розділені на достатньо велику відстань. Крім того, рішення в підході багаторазових відбиттів базувалося на амплітудах хвильової функції, що отримана до цього стандартним способом [див. (7), (18), (19) у цій роботі]. Таким чином, *існувала серйозна невирішена проблема реалізації підходу багаторазових внутрішніх відбиттів для опису реальних квантових систем з бар'єрами складної форми* і існувала необхідність розробити чіткі алгоритми розрахунку амплітуд.

2) *Проблема коректності методу.* Чи існує інтерференція між пакетами, що формуються при відбитті від різних границь? Чи приводить це до принципово іншого результату у порівнянні із стандартним способом квантової механіки? Відзначимо, що така інтерференція не може виявитися при тунелюванні через один прямокутний бар'єр та, тому, вона не могла бути дослідженою у попередніх роботах.

3) *Проблема невизначеності у радіальній задачі.* На сьогодні, оцінки періодів напіврозпаду у ВКБ-підході для різних розпадів найбільш поширені. Наведемо декілька прикладів, де практично всі результати отримані лише за таким підходом. У роботі [119] продемонстровано досить непогану згоду між теоретичними розрахунками періодів напіврозпаду та їх експериментальними даними для α -розпаду у широкому діапазоні ядер від ^{106}Te до ядра з

$A = 266$ і $Z = 109$, де A та Z — це атомне та зарядове числа дочірнього ядра (деякі більш вдосконалені підходи див., наприклад, у роботі [112]). Методологія розрахунку періодів напіврозпаду для ядер, що спонтанно діляться, представлена в огляді [126] (див. (21)–(24), стор. 321). Розглянемо протонну радіоактивність, де протон проникає з внутрішньої області ядра назовні з його тунелюванням через бар'єр. Зазвичай, падаюча і відбита хвилі знаходяться з невизначеністю за однакової граничної умови. Як їх визначити? Квазікласична теорія (у першому наближенні) дає таку відповідь на це питання: *при отриманні добре відомої ВКБ-формули проникності повністю нехтується другий (зростаючий) доданок від хвильової функції в області тунелювання* (див. [43], (50.2), стор. 221). В наслідок цього, рівність $T^2 + R^2 = 1$ втрачає сенс (де T і R — коефіцієнти проникності і відбиття). Вимога неперервності хвильової функції і повного потоку порушується в точці повороту. Таким чином, коефіцієнт відбиття R не визначається. Не передбачається можлива ненульова інтерференція між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею від нього (що істотно виникає для потенціалів непостійної форми перед бар'єром, що існують у реальних системах). Проникність визначається виключно формою бар'єру в області тунелювання, тоді як внутрішня яма і зовнішній хвіст не впливають на її абсолютно. Проникність не залежить від глибини внутрішньої ями (тоді як вже найпростіший прямокутний бар'єр з прямокутною яма дають інший точний розв'язок). Але, квазікласичний підхід є настільки розповсюдженим, що слід було б передбачити, що він має досить хороше наближення в розрахунку проникності. Проте, виявляється, що якщо шукати проникність бар'єру у повністю квантовому підході, то можна отримати відповідь “ні”. Відзначимо, що вказані проблеми вище нехтуються іншими теоретиками в розрахунках періодів розпаду в ядерній фізиці. Але аналіз доводить, що квантова проникність є функцією від нових додаткових незалежних параметрів, і вона може суттєво відрізнитися від ВКБ-значення

(за однакової граничної умови, що накладається на хвильову функцію).

9.2.2. Розпад при радіальному бар'єрі, що складається з довільного числа прямокутних сходинок

Будемо вважати, що починаючи з деякого моменту часу перед розпадом ядро можна розглянути як систему, що складається з дочірнього ядра і фрагмента (протона), що вилітає. Розпад описується за допомогою частинки з наведеною масою m , яка рухається в радіальному напрямку у полі радіального потенціалу з бар'єром. Щоб побудувати формалізм методу БВВ до опису складних реалістичних бар'єрів, розглянемо бар'єр довільної форми, який можна вдало апроксимувати достатньо великим числом N прямокутних сходинок:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 & \text{(область 1),} \\ V_2 & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & \text{(область N),} \end{cases} \quad (9.1)$$

де V_j — сталі ($j = 1 \dots N$). Визначимо першу область, починаючи від точки r_{\min} , та будемо вважати, що саме в цій області протон починає свій рух назовні. Для енергій, більших ніж висота бар'єру, загальний розв'язок для хвильової функції (з точністю до її нормування) можна записати так:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.2)$$

$$\chi(r) = \begin{cases} e^{ik_1 r} + A_R e^{-ik_1 r}, & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 & \text{(область 1),} \\ \alpha_2 e^{ik_2 r} + \beta_2 e^{-ik_2 r}, & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} r} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} r}, & \text{при } r_{N-2} \leq r \leq r_{N-1} & \text{(область } N-1), \\ A_T e^{ik_N r}, & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & \text{(область } N), \end{cases} \quad (9.3)$$

де α_j і β_j — невідомі амплітуди, A_T і A_R — невідомі амплітуди проходження і відбиття, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферична функція, $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_j)}$ — хвильове число. Рішення задачі ми будемо шукати у підході багаторазових внутрішніх відбиттів (також обмежимося випадком з орбітальним моментом $l = 0$, тоді як його ненульове значення можна врахувати, додавши відцентрову компоненту до потенціалу $V(r)$, що не вплине на ідею та формалізм методу БВВ).

Відповідно до методу БВВ, розсіювання частинки на потенціальному бар'єрі описується послідовно по етапам поширення хвильового пакета відповідно до кожної границі бар'єру (найбільш просто і ясно ідею цього підходу можна зрозуміти в задачі тунелювання через найпростіший прямокутний бар'єр; див. [264, 54, 71] та Додаток К.1, стор. 507–514, де представлено доказ такого повністю квантового, точно розв'язуваного методу, виконано аналіз властивостей). Кожен етап у такому розгляді поширення пакету є подібним до одного з перших $2N - 1$ етапів, незалежних між собою. З аналізу цих етапів ми знаходимо рекурентні співвідношення для знаходження невідомих амплітуд $A_T^{(n)}$, $A_R^{(n)}$, $\alpha_j^{(n)}$ і $\beta_j^{(n)}$ для довільного етапу з номером n (тут нижній індекс j означає номер довільної області V_j , логіку уведення амплітуд по етапам можна знайти у Додатку К.1). При складанні цих співвідношень на кожному етапі ми виконуємо умову неперервності на повну хвильову функцію (складену зі всіх пакетів) та її похідну відносно відповідної границі.

За результатами аналізу хвиль, що поширюються в області з довільним номером j на довільному етапі, кожну хвилю можна представити як добуток експоненціального множника $e^{\pm i k_j r}$ на постійний коефіцієнт (амплітуду). При практичних розрахунках трудність полягає у визначенні таких невідомих амплітуд. Але, щоб зробити такі розрахунки найбільш легкими для довільного етапу, можна виразити амплітуду хвилі, що пройшла через границю з номером j , як добуток амплітуди відповідної хвилі, що падає на цю границю, на новий фактор T_j^\pm (тобто, амплітуду проходження через границю з номером

j). Нижній індекс вказує на номер границі, а верхній знак “+” або “-” — на напрямок падаючої хвилі вправо або вліво, відповідно. Аналогічно, ми пов’язуємо амплітуду відбитої хвилі від границі з номером j з амплітудою хвилі, що падає на цю границю, через новий коефіцієнт R_j^\pm . Коефіцієнти T_1^\pm , T_2^\pm , T_3^\pm ... та R_1^\pm , R_2^\pm , R_3^\pm ... можна знайти з рекурентних співвідношень, вказаних вище [див. (К.10), Додаток К.1, стор. 511, також [73]]. Ми знаходимо T_1^\pm , T_2^\pm ... T_{N-1}^\pm і R_1^\pm , R_2^\pm ... R_{N-1}^\pm як

$$\begin{aligned} T_j^+ &= \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, & T_j^- &= \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \\ R_j^+ &= \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j r_j}, & R_j^- &= \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} r_j}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Будемо розглядати хвилю, що поширюється в області з номером $j - 1$ та падає зліва на частину потенціального бар’єру з лівою границею в точці r_{j-1} (та правою границею в точці r_{N-1}). Знайдемо хвилю, що відбивається від такого бар’єру. Така хвиля повинна включати всі хвилі, що формуються в наслідок багаторазових внутрішніх відбиттів та поширень відносно границь $r_1 \dots r_{j-1}$ та покидають бар’єр. Ми визначимо амплітуду відбиття \tilde{R}_{j-1}^+ такої сумарної хвилі таким чином:

$$\tilde{R}_{j-1}^+ = R_{j-1}^+ + T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-)^m \right) = R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - \tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-}. \quad (9.5)$$

Аналогічно ми визначаємо також:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{j+1}^- &= R_{j+1}^- + T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}, \\ \tilde{T}_{j+1}^+ &= \tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}, \\ \tilde{T}_{j-1}^- &= \tilde{T}_j^- T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^- T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

При знаходженні цих сум ми використовуємо рекурентні співвідноше-

ння, що пов'язують амплітуди між собою. Ми виберемо наступні значення

$$\tilde{R}_{N-1}^+ = R_{N-1}^+, \quad \tilde{R}_1^- = R_1^-, \quad \tilde{T}_1^+ = T_1^+, \quad \tilde{T}_{N-1}^- = T_{N-1}^-, \quad (9.7)$$

як умову для старту розрахунків та послідовно обчислимо усі амплітуди \tilde{R}_{N-2}^+ ... \tilde{R}_1^+ , \tilde{R}_2^- ... \tilde{R}_{N-1}^- та \tilde{T}_2^+ ... \tilde{T}_{N-1}^+ . Ми знаходимо коефіцієнти α_j та β_j :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_j^{(n)} = \tilde{T}_{j-1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) = \frac{\tilde{T}_{j-1}^+}{1 - R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+}{T_j^+}, \\ \beta_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_j^{(n)} = \tilde{T}_{j-1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) R_j^+ = \\ &= \frac{\tilde{T}_{j-1}^+ R_j^+}{1 - R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+ R_j^+}{T_j^+} = \alpha_j \cdot R_j^+, \end{aligned} \quad (9.8)$$

і амплітуди проходження та відбиття відносно бар'єра в цілому:

$$A_T = \tilde{T}_{N-1}^+, \quad A_R = \tilde{R}_1^+ \quad (9.9)$$

та відповідні коефіцієнти проникності T_{MIR}^1 і відбиття R_{MIR} :

$$T_{MIR} = \frac{k_n}{k_1} |A_T|^2, \quad R_{MIR} = |A_R|^2. \quad (9.10)$$

Ми перевіряємо умову:

$$T_{MIR} + R_{MIR} = 1, \quad (9.11)$$

у якості тесту, чи дає метод БВВ достовірні розв'язки для амплітуд хвильової функції. Якщо енергія частинки нижче ніж висота однієї сходинки з номером m , то для опису проникнення цієї частинки через бар'єр з її тунелюванням необхідно виконати наступну заміну:

$$k_m \rightarrow i \xi_m, \quad (9.12)$$

¹Далі ми будемо аналізувати та порівнювати коефіцієнти проникності та періоди напіврозпаду, отримані з застосуванням метода багаторазових внутрішніх відбиттів або квазікласичного метода. Тому, щоб відрізнити такі коефіцієнти та періоди, ми будемо додавати аббревіатуру "MIR" від назви метода "multiple internal reflections", якщо було використано метод багаторазових внутрішніх відбиттів, або позначення *WKV* при використанні квазікласичного підходу.

де $\xi_m = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_m - E)}$. Як виявилось з аналізу та чисельних розрахунків, для бар'єру у вигляді двох прямокутних сходинок довільних розмірів отримується збіг між амплітудами хвильової функції, отриманими за допомогою метода БВВ, та відповідними амплітудами, отриманими у стандартному підході квантової механіки (з точністю до перших 15 цифр). При збільшенні числа сходинок до декілька тисяч така точність у збігу між розрахунками у підході БВВ та стандартному підході квантової механіки зберігається, та виконується умова (9.11) (див. Додаток К.3, стор. 517, де представлено алгоритми стандартного підходу квантової механіки). Це важливий тест, що підтверджує працездатність методу БВВ. Отже, досягається повна відповідність між рішеннями для амплітуд, отриманими методом БВВ та стандартним підходом квантової механіки, і таким чином, узагальнюється метод БВВ на опис тунелювання частинки через потенціал, що складається з довільного кінцевого числа прямокутних сходинок і ям довільної форми. Порівняльний аналіз точності визначення коефіцієнтів проникності і відбиття на основі хвильових функцій, отриманих за допомогою методу БВВ і шляхом прямого інтегрування радіального рівняння Шредінгера з високою точністю (тут ми узагальнюємо метод Нумерова), представлено у Додатку К.7 (див. стор. 527–530).

9.2.3. Ширина Γ та період напіврозпаду

Визначимо ширину Γ розпаду квантової системи на основі процедури, запропонованої у роботі [140, 274]:

$$\Gamma = S_p F \frac{\hbar^2}{4m} T, \quad (9.13)$$

де S_p — спектроскопічний фактор і F — фактор нормування, T — коефіцієнт проникності для проникнення частинки з внутрішньої області назовні з її тунелюванням крізь бар'єр, який ми будемо обчислювати у підході БВВ та у

підході ВКБ. У ВКБ-підході визначаємо проникність так:

$$T_{WKB} = \exp \left\{ -2 \int_{R_{tp,2}}^{R_{tp,3}} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (Q_p - V(r))} dr \right\} \quad (9.14)$$

де $R_{tp,2}$ і $R_{tp,3}$ — внутрішня (друга) і зовнішня (третя) точки повороту (тобто точки перетину потенціалу з Q -значенням, див. Рис. 9.1), Q_p — Q -значення протонного розпаду [117].

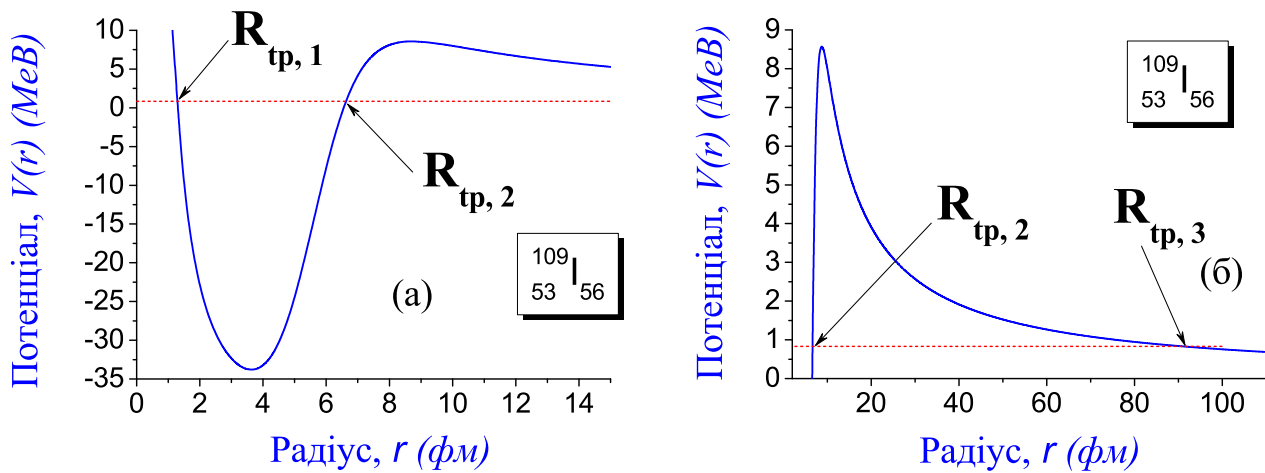


Рис.9.1 Положення точок повороту відносно форми потенціалу та Q -значення (обрано ядро $^{109}_{53}\text{I}$, що має $Q_p = 0.829$ MeV, див. Табл. 9.1, також [117]).

Фактор нормування F визначимо у спрощеному варіанті [119]

$$F_1 = \left\{ \int_{R_{tp,1}}^{R_{tp,2}} \frac{dr}{2k(r)} \right\}^{-1} \quad (9.15)$$

та в уточненому варіанті

$$F_2 = \left\{ \int_{R_{tp,1}}^{R_{tp,2}} \frac{1}{k(r)} \cos^2 \left[\int_{R_{tp,1}}^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4} \right] dr \right\}^{-1}, \quad (9.16)$$

де $R_{tp,1}$ — перша точка повороту (див. Рис. 9.1). Період напіврозпаду τ пов'язаний з шириною Γ добре відомою формулою:

$$\tau = \hbar \ln 2 / \Gamma. \quad (9.17)$$

9.2.4. Протон–ядерний потенціал

Для опису взаємодії між протоном і ядром скористаємося сферично симетричним протон–ядерним потенціалом із [148]² наступного вигляду:

$$V(r, l, Q_p) = v_C(r) + v_N(r, Q_p) + v_l(r), \quad (9.18)$$

де $v_C(r)$, $v_N(r, Q_p)$ та $v_l(r)$ — кулонівська, ядерна і відцентрова компоненти

$$v_N(r, Q_p) = \frac{V_R(A, Z, Q_p)}{1 + \exp\left\{\frac{r - r_m}{d}\right\}}, \quad v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2},$$

$$v_C(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{r}, & \text{при } r \geq r_m, \\ \frac{Ze^2}{2r_m} \left\{3 - \frac{r^2}{r_m^2}\right\}, & \text{при } r < r_m, \end{cases} \quad (9.19)$$

Тут A і Z — числа нуклонів і протонів дочірнього ядра, V_R — сила (strength) ядерної компоненти, R — радіус дочірнього ядра, r_m — ефективний радіус ядерної компоненти, d — параметр дифузності. Всі параметри визначені у [148]. При $l \neq 0$ спіно-орбітальну поправку до потенціалу враховуємо, відповідно до [148] [див. (5) у цій роботі]. За мету дослідження візьмемо принципову побудову квантового базису до визначення проникності і подальшого розрахунку періоду напіврозпаду протонного розпаду. Щоб отримати ясне розуміння до рішення задачі, ефективним є використання сферично симетри-

²Огляд потенціалів взаємодії протону з ядром ми почали з більш новітніх робіт. Серед них нами було проаналізовано роботу [117] 1997 року. Але в цій роботі у якості базису для визначення параметрів протонного розпаду було використано результати [148]. Значна частина у [117] присвячена пошуку корекцій параметрів. Але ці результати базуються на найбільш вдалому співпадінню між розрахованими періодами напіврозпаду з їх експериментальними значеннями. Там було використано ВКБ-підхід, двухпотенціальний підхід та підхід у Борнівському наближенні. Якщо врахувати результати, отримані методом БВВ, які показують, що розраховані періоди напіврозпаду можуть змінитися до 200 разів при врахуванні умов старту пакету (які також застосовуються при стаціонарному розгляді протонного розпаду, що не враховано у [117]), то сенс пошуку корекцій параметрів у [148] становиться сумнівним. Також нами було проаналізовано всі наступні роботи авторів робіт [259, 117, 140, 273, 274, 144] по темі, але це не дало суттєвих вдосконалень основних ідей отримання параметрів потенціалу та чисельних результатів (необхідних для матеріалу нашої роботи).

чного протон–ядерного потенціалу з реалістичним бар’єром, тоді як врахування деформації ядра передбачається включити потім стандартним чином.

9.3. Аналіз

На сьогоднішній день розроблено багато моделей, які визначають період напіврозпаду протонних емітерів і добре узгоджуються з експериментальними даними. Отже, ми маємо досить багатий теоретичний і експериментальний матеріал для аналізу. Виберемо такі ядра: $^{157}_{73}\text{Ta}$, $^{161}_{75}\text{Re}$ і $^{167}_{77}\text{Ir}$ при $l = 0$ та $^{109}_{53}\text{I}$, $^{112}_{55}\text{Cs}$ і $^{147}_{69}\text{Tm}$ при $l = 1$. Такий вибір можна пояснити тим, що ці ядра мають надзвичайно малий коефіцієнт квадрупольної деформації β_2 та в хорошому наближенні їх можна вважати сферичними. Ми будемо вивчати протонний розпад з основного стану як виліт пакету (що описує частинку з наведеною масою, далі ми будемо просто називати еволюцію пакету як виліт протона) з внутрішньої області назовні з його тунелюванням через бар’єр розпаду. З метою оцінити проникність бар’єру, вибір реалістичної форми бар’єру і внутрішньої ями вимагає визначитися, де пакет починає свою еволюцію у внутрішній області (тобто увести початкову умову старту розпаду). Ми мінімізуємо область $r_{\min} \leq r \leq r_1$, з якої починається рух частинки назовні з її тунелюванням та зі всіма можливими відбиттями. Використовуючи техніку (9.5)–(9.7) для коефіцієнтів T_j^\pm і R_j^\pm , ми поступово знаходимо повні амплітуди проходження A_T і відбиття A_R на основі (9.9), коефіцієнт проникності T_{MIR} на основі (9.10). Ми тестуємо знайдені амплітуди, коефіцієнти T_{MIR} і R_{MIR} , порівнюючи їх з відповідними амплітудами і коефіцієнтами, отриманими стандартним способом квантової механіки, який коротко представлено у Додатку К.3. При визначенні F_1 ми обмежимося формулою (9.15), ширину Γ знаходимо через (9.13), період напіврозпаду τ_{MIR} — через (9.17). У ВКБ-підході ми знаходимо проникність T_{WKB} через (9.14), ширину Γ і період

напіврозпаду τ_{WKB} — через (9.13) і (9.17).

Апроксимацію протон-ядерного потенціалу виконуємо прямокутними сходишками наступним чином. Зовнішню область від координати максимуму бар'єра r_{barrier} до границі 250 фм розіб'ємо на інтервали з однаковою шириною. Внутрішню область від $r = 0$ до координати максимуму бар'єра r_{barrier} розіб'ємо на інтервали також з однаковою шириною, яка відрізняється від ширини інтервалів зовнішньої області³. Потім, на внутрішній області виберемо положення границі r_{min} , а на зовнішній області — положення границі r_{max} та проведемо розрахунки. При дослідженні впливу границь r_{min} та r_{max} на значення амплітуд, проникності та відбиття, періоду напіврозпаду потрібно змінювати положення цих границь: в такому аналізі на області від r_{min} до r_{max} ширини інтервалів ми не будемо змінювати, але будемо змінювати їх кількість. Як виявилось, при такій розбивці області від $r = 0$ до 250 фм на декілька тисяч інтервалів вдається досягти збіжності у розрахунках та отримати стабільними перші 14 цифр результатів для будь-яких обраних параметрів потенціалу та умов старту пакету [що дає впевненості у отриманих результатах]. Але варіація не тільки параметрів потенціалу, але також умов старту пакету змінює такі стабільні результати (при однаковій фіксованій енергії вильоту протона). Звідси виникає нове істотне питання: які зміни виявляються суттєвими, а які — незначними.

9.3.1. Залежність періоду напіврозпаду від точки старту

Першим результатом є *сильна залежність періоду напіврозпаду від області локалізації* $r_{\text{min}} \leq r \leq r_1$, де пакет стартує. Зафіксуємо r_{min} достатньо близько до нуля, та довільно оберемо область $r_{\text{start}} \leq r \leq r_{\text{start}+1}$ у межах від r_{min} до r_{barrier} для старту вильоту протона з внутрішньої області. Враховую-

³Це пояснюється тим, що форма внутрішньої ями потенціалу значно сильніше впливає на розрахунки амплітуд, проникності та відбиття. Тому необхідно мати можливість вивчати її більш акуратно.

чи, що ширина інтервалів у внутрішній області до максимуму бар'єра складає біля 0.001 фм, межу r_{start} будемо розглядати як *точку старту*, звідки протон починає свій рух назовні. Виникає запитання: на скільки сильно впливає положення r_{start} на період напіврозпаду. На Рис. 9.2 [ліва панель] видно, що період напіврозпаду для ядра $^{157}_{73}\text{Ta}$ змінюється досить сильно у залежності від r_{start} . На такій підставі ми встановлюємо *сильну залежність періоду напіврозпаду від точки старту r_{start}* . Зокрема, при виборі $r_{\text{start}} = 7.2127$ фм

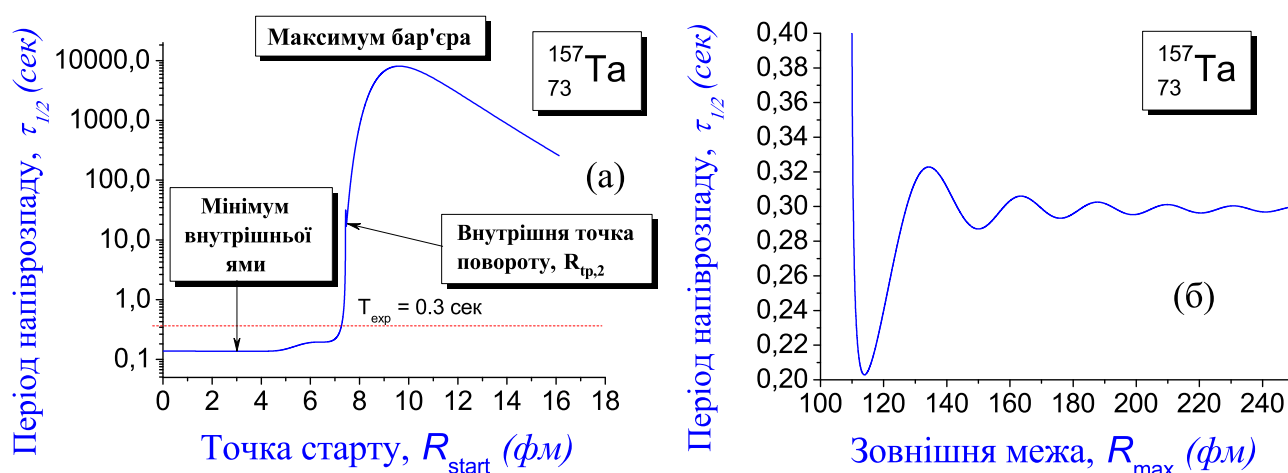


Рис.9.2 Протонний розпад ядра $^{157}_{73}\text{Ta}$: на лівій панелі показана залежність періоду напіврозпаду τ_{MIR} від точки старту r_{start} (при $r_{\text{max}} = 250$ фм), на правій панелі показана залежність періоду напіврозпаду τ_{MIR} від зовнішньої границі r_{max} (при r_{start} у мінімумі внутрішньої ями потенціалу). При $r_{\text{start}} = 7.2127$ фм значення τ_{MIR} , отримане при $r_{\text{max}} = 250$ фм, збігається з експериментальним τ_{exp} . У розрахунках використовується така розбивка: число інтервалів у області від $r = 0$ до координати максимуму бар'єра дорівнює 10000 та у області від координати максимуму бар'єра до границі 250 фм — також 10000. У всіх розрахунках фактор F обрано однаковим. Енергія вильоту протона фіксована (не змінюється) у всіх розрахунках.

досягається точне співпадіння між періодом напіврозпаду, обчисленим у підході БВВ, та його експериментальним значенням. Іншими словами, проблема опису експериментальних значень періодів напіврозпадів вирішується повністю при використанні методу БВВ, на відміну до інших відомих підходів⁴.

⁴Така ситуація суттєво змінює сучасні уявлення до опису розпадів ядер. Враховуючи кількість опублікованих робіт та існування сучасних баз даних по розпадам ядер, пов'язаних з широко поширеними ВКБ та двупотенціальним підходами, отримання розуміння про такі залежності було складною проблемою.

9.3.2. Вплив зовнішньої області на період напіврозпаду

Тільки область бар'єру між двома точками повороту $R_{\text{tp},2}$ і $R_{\text{tp},3}$ використовується при визначенні проникності у ВКБ-підході, тоді як внутрішня область (до $R_{\text{tp},2}$) і зовнішня область (від $R_{\text{tp},3}$ до r_{max}) потенціалу не враховуються. Проаналізуємо, чи дає метод БВВ збіжні значення періоду при зростанні r_{max} . Фіксуємо ширину інтервалів постійною, ми будемо збільшувати r_{max} від зовнішньої точки повороту $R_{\text{tp},3}$ і рахувати період τ_{MIR} . На Рис. 9.2 [права панель] видно, що значення періоду для $^{157}_{73}\text{Ta}$ методом БВВ збігаються. Видно, що *врахування зовнішньої області змінює період до 1.5 разів* ($\tau_{\text{min}} = 0.20$ сек — мінімальне значення періоду при $R_{\text{tp},3} \leq r_{\text{max}} \leq 250$ фм, $\tau_{\text{as}} = 0.30$ сек — період при $r_{\text{max}} = 250$ фм, помилка $\text{error} = \tau_{\text{as}}/\tau_{\text{min}} \approx 1.5$ або 50 відсотків). Тобто *помилка у визначенні проникності у ВКБ-підході внаслідок нехтування зовнішньою областю як мінімум така ж.*

9.3.3. Чим відрізняються періоди напіврозпаду, отримані методом БВВ і ВКБ-підходом?

Отже, на відміну до ВКБ-підходу, метод БВВ дає сильну залежність проникності від точки старту. Щоб додати методу БВВ силу передбачень, необхідно знайти рецепт до визначення точки старту у розрахунках періодів. Введемо гіпотезу: *виліт пакету (протона) назовні при розпаді ядра починається в мінімумі ями*. Аналіз показує, що ця умова визначає період напіврозпаду з мінімальним значенням. З виконанням цієї умови, порівняємо періоди у підході БВВ і ВКБ-підході з експериментальними даними. Період напіврозпаду у такому підході відповідає протону, що займає основний стан, тому слід врахувати ще ймовірність, коли такий стан є вільним у ядрі. Щоб отримати значення періоду напіврозпаду, слід розділити отриманий вище період на спектроскопічний фактор S (візьмемо його з [117]). У Таблиці 9.1 видно різницю між двома підходами. Слід прийняти до уваги, що параметри ядерних

Табл. 9.1. Розраховані періоди напіврозпаду та їх експериментальні значення для деяких протонних емітерів. S_p^{th} — теоретичний спектроскопічний фактор, τ_{WKB} — період напіврозпаду, отриманий у ВКБ-підході, τ_{MIR} — період напіврозпаду, отриманий у підході БВВ, $\tilde{\tau}_{WKB} = \tau_{WKB}/S_p^{\text{th}}$, $\tilde{\tau}_{MIR} = \tau_{MIR}/S_p^{\text{th}}$, τ_{exp} — експериментальне значення періоду напіврозпаду, r_{min} — точка старту у внутрішній області, де протон починає свій рух назовні на першій стадії протонного розпаду (значення для S_p^{th} , τ_{exp} з Табл. IV в [117], стор. 1770; у розрахунках для кожного ядра використано: r_{min} — координата мінімуму ями для досліджуваного ядра, $r_{\text{max}} = 250$ фм; число інтервалів у області від $r = 0$ до координати максимуму бар'єра дорівнює 10000 та у області від координати максимуму бар'єра до r_{max} — також 10000)

Материнське ядро				Періоди напіврозпаду, сек				
Ядро	Q_p , MeV	Orbit	S_p^{th}	τ_{WKB}	τ_{MIR}	$\tilde{\tau}_{WKB}$	$\tilde{\tau}_{MIR}$	τ_{exp}
$^{157}_{73}\text{Ta}_{84}$	0.947	$2s_{1/2}$	0.66	$1.856 \cdot 10^{-1}$	$1.840 \cdot 10^{-1}$	$2.813 \cdot 10^{-1}$	$2.789 \cdot 10^{-1}$	$3.0 \cdot 10^{-1}$
$^{161}_{75}\text{Re}_{84}$	1.214	$2s_{1/2}$	0.59	$1.605 \cdot 10^{-4}$	$1.577 \cdot 10^{-4}$	$2.720 \cdot 10^{-4}$	$2.673 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$
$^{167}_{77}\text{Ir}_{90}$	1.086	$2s_{1/2}$	0.51	$2.981 \cdot 10^{-2}$	$2.979 \cdot 10^{-2}$	$5.85 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
$^{109}_{53}\text{I}_{56}$	0.829	$1d_{5/2}$	0.76	$2.992 \cdot 10^{-6}$	$3.034 \cdot 10^{-6}$	$3.937 \cdot 10^{-6}$	$3.992 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
$^{112}_{55}\text{Cs}_{57}$	0.823	$1d_{5/2}$	0.59	$2.080 \cdot 10^{-5}$	$2.088 \cdot 10^{-5}$	$3.526 \cdot 10^{-5}$	$3.539 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$
$^{147}_{69}\text{Tm}_{78}$	1.132	$1d_{3/2}$	0.79	$6.250 \cdot 10^{-5}$	$6.159 \cdot 10^{-5}$	$7.911 \cdot 10^{-5}$	$7.796 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$

потенціалів у роботі [148] знайдені з аналізу даних розсіяння, а не розраду.

9.4. Головні результати і висновки до Розділу 9

У Розділі представлено новий повністю квантовий метод (названий методом багаторазових внутрішніх відбиттів, або методом БВВ) для визначення ширин для розпаду ядра з вильотом протона у сферично симетричному наближенні та з реалістичним радіальним бар'єром. Відзначимо наступне:

- За допомогою методу БВВ знайдено розв'язки для амплітуд хвильової функції (що описує проникнення протона з внутрішньої області назовні з її тунелюванням через бар'єр), проникності T_{MIR} та відбиття R_{MIR} відносно радіального бар'єру, що складається з довільного числа N прямокутних сходинок. Ці рішення є *точними*, що отримані у *повністю квантовому підході* вперше. У межі $N \rightarrow \infty$ ці рішення можуть бути розглянуті як точні для реалістичного протон-ядерного потенціалу з необхідним бар'єром і внутрішньою ямою довільної форми. Помилка отриманих результатів складає $|T_{MIR} + R_{MIR} - 1| < 1.5 \cdot 10^{-15}$.
- На відміну від ВКБ-підходу і двухпотенціального підходу, метод БВВ дає сильну залежність проникності від точки старту r_{\min} у внутрішній ямі, звідки протон починає рух назовні на першій стадії протонного розпаду. Наприклад, проникність бар'єру, отримана методом БВВ для ядра ${}^{157}_{73}\text{Ta}$, змінюється до 200 разів залежно від положення r_{\min} (див. Рис. 9.2, ліва панель). З порівняння амплітуд, отриманих методом БВВ, з відповідними амплітудами, знайденими (для такого ж потенціалу) за допомогою стандартного підходу квантової механіки, представленого у Додатку К.3, отримано збіг як мінімум перших 15 цифр для всіх даних амплітуд. Цей важливий тест доводить, що *сильна залежність проникності від точки старту r_{\min} присутня незалежно від вибору повністю квантового методу, який використовується для розрахунків*. Такий результат викликає необхідність увести початкову умову, яка має

бути введеною як у нестационарну, так і в стаціонарну картину протонного розпаду у повністю квантовому її розгляді. Порівняння з підходами ВКБ та двошпентіальним показує, що ці підходи не мають такої перспективи (що має фізичний сенс та відкриває можливість отримати нову інформацію про протонний розпад), яку дає повністю квантовий підхід.

- З метою вирішити невизначеність у розрахунку періоду напіврозпаду, викликану вказаною вище залежністю, уведено наступну гіпотезу: *на першій стадії протонного розпаду рух протона назовні починається у координаті мінімуму внутрішньої ями*. Така умова забезпечує мінімальне значення для періоду напіврозпаду і дає стабільну основу для передбачень на основі методу БВВ. Проте, періоди напіврозпаду, отримані методом БВВ, виявляються лише трохи ближче розташованими до експериментальних даних у порівнянні з їх ВКБ-значеннями (див. Табл. 1).
- Після врахування зовнішньої області потенціалу за бар'єром період протонного розпаду, отриманий методом БВВ, змінюється до 1.5 разів (див. Рис. 9.2, права панель).

Основним досягненням методу багаторазових внутрішніх відбиттів є не нова спроба краще описати експериментальні періоди напіврозпаду протонних емітерів у порівнянні з тим, як інші методи роблять це, а скоріше те, що цей метод виявляється потужним засобом для визначення проникності бар'єрів довільної форми, побудованим в повністю квантовому підході вперше, та може бути використаний для систематичного вивчення розпадів ядер. Результати досліджень, представлених у цьому Розділі, опубліковано у роботах [72, 73]. Деякі нові властивості методу багаторазових внутрішніх відбиттів проаналізовано у роботі [71].

РОЗДІЛ 10
МЕТОД БАГАТОРАЗОВИХ ВНУТРІШНІХ ВІДБИТТІВ У
ВИВЧЕННІ ПРОЦЕСІВ ЗЛИТТЯ У ЗАХОПЛЕННІ
АЛЬФА-ЧАСТИНОК ЯДРАМИ

10.1. Вступ

Розуміння механізмів злиття та синтезу є актуальною проблемою фізики [275]. Галузь фізики, де такі процеси мають суттєве значення, — синтез надважких ядер [276, 126]. Саме синтез тут має вирішальну роль, але його опис є надскладною задачею. Легшим чином, непогане розуміння про злиття можна отримати з вивчення захоплення α -частинок ядрами (α -захоплення).

Інформація про злиття у захопленні α -частинок ядрами формує наше розуміння про взаємодію між α -частинками та ядрами на відстанях, де важлива роль відводиться формуванню єдиного ядра з двох ядерних фрагментів, що налітають. α -Ядерну взаємодію вже глибоко досліджено у контексті α -розпаду ядер (див. експериментальні дослідження [277, 278, 119, 279, 280, 281, 282, 129, 283, 284, 285, 286, 287], мікроскопічні моделі [217, 211, 288, 289, 212, 290, 291, 214, 292, 293, 294, 215], макроскопічні кластерні моделі [295, 296, 297, 298, 299, 112, 224, 225, 226, 213, 300, 301, 302, 303], моделі поділу [305, 126]), розсіяння α -частинок на ядрах [306, 307, 308, 309, 310], резонанси у α -ядерній взаємодії [311]). Фізику процесів злиття при α -захопленні вивчено менш глибоко [112, 224, 225, 226]. Оцінки швидкостей проходження захоплення α -частинок показують, що ці процеси відіграють важливу роль у ядерних реакціях у зірках [304, 309, 312].

Найбільш поширеним є підхід до визначення перерізів захоплення α -частинок ядрами, що базується на розрахунках проникностей потенціальних

бар'єрів, де інформацію про механізми злиття не включено. Хоча вже розроблено багато підходів до отримання проникності, ще не існувало загальноприйнятого квантового методу оцінки злиття. Експериментально, ці реакції не вивчено досить глибоко: перерізи захоплення α -частинок виміряно для ядер ^{40}Ca , ^{44}Ca [313], ^{59}Co [314], ^{208}Pb [315], та ^{209}Bi [315].

Тому нас буде цікаві, як саме можна отримати інформацію про злиття з існуючих експериментальних даних. Метою дослідження у даному розділі є побудова нового квантового підходу для здобуття такої інформації. Ідея такого підходу схожа на теорію оберненої задачі для розсіювання [53], коли потенціал взаємодії та хвильова функція знаходяться з аналізу експериментальних даних¹. Еберхард (Eberhard), Аппель (Ch. Appel), Бангерт (R. Bangert), Кліманн (L. Cleemann), Еберс (J. Eberth) та Зобел (V. Zobel) запропонували співвідношення до опису злиття у α -захопленні та порівняли перерізи, отримані на основі такого співвідношення, з експериментальними даними при обраних енергіях [313]. З аналізу експериментальних даних виявляється незвичайна різниця між перерізами α -захоплення ядрами ^{40}Ca та ^{44}Ca , тоді як включення інших ядер в аналіз не дає принципово нових питань.

Ключовий момент у вирішенні задачі — визначення коефіцієнту проникності бар'єру. Виявляється, що навіть незначні удосконалення ВКБ-формули проникності вимагають ретельного перегляду зв'язку між граничними умовами і навіть уключення початкових (або кінцевих) умов у стаціонарну картину процесу. Після такої модифікації проникність стає суттєво більш чутливою до форми бар'єру, вона вже залежить від форми потенціалу на внутрішній та зовнішній областях (за межами області тунелювання). Реалізація повністю квантового підходу приводить до додаткового суттєвого впливу нових незалежних параметрів на проникність (див. [73]). Виявляється, що роль таких додаткових параметрів у визначенні проникності може

¹Методами оберненої задачі не досліджено злиття при розсіянні у ядерній фізиці.

бути більшою ніж у декілька порядків у порівнянні зі зміною проникності у результаті відхилень ядерних деформацій та параметрів потенціалів взаємодії, якщо проникність не визначена у повністю квантовому підході. Тому ми обмежимося сферично симетричною формою α -ядерного потенціалу. Однак, вплив ядерної деформації на отримані значення коефіцієнту проникності ймовірностей злиття у α -захопленні проаналізовано у Додатку К.8.

У Розділі розвивається узагальнення методу багаторазових внутрішніх відбиттів (метод БВВ, див. попередній Розділ 9) до опису захоплення α -частинок ядрами. Виконано аналіз *підходу різкого обрізання кутового моменту (sharp angular momentum cutoff approach)*, який був раніше застосований Гласом (Glas) та Моселом (Mosel) у роботах [317, 316]², що широко використовується на даний час (наприклад, див. [321, 322]). Проаналізовано підхід ВКБ, формулу Вонга (Wong) [319] та підхід Хілла та Уілера (Hill-Wheeler approach) [318] у отриманні перерізів. Увагу приділено зрозумінню різниці між перерізами реакцій $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ та $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Як виявилось, уключення механізмів злиття у α -захоплення істотно поліпшує згоду між розрахунками і експериментальними даними перерізів, що дає більш глибокого зрозуміння α -захоплення, ніж це дає підхід різкого обрізання кутового моменту. Показано, що підхід БВВ, на відміну від інших підходів, задовольняє тестам квантової механіки, вирішує проблему невизначеності додаткових параметрів, вказаних вище та виявляється найбільш ефективним і точним методом опису злиття. Виведено нову формулу ймовірності злиття, на основі якої знаходяться перерізи α -захоплення для ядра ${}^{46}\text{Ca}$ з новим нейтронним магічним числом $N = 26$ [320].

²Таке співвідношення не було вперше уведено цими авторами, так як воно ще раніше застосовувалося у квантовій механіці розсіяння, наприклад, див. (123.13) у [43], стор. 613.

10.2. Метод

10.2.1. Перерізи α -захоплення та підхід різкого обрізання кутового моменту

Переріз захоплення, що включає злиття α -частинки з ядром, визначається так [313]:

$$\sigma_{\text{capture}}(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2m\tilde{E}} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) T_l P_l, \quad (10.1)$$

де E — кінетична енергія α -частинки у лабораторній системі, \tilde{E} — кінетична енергія відносного руху α -частинки і ядра у системі центра мас (будемо використовувати наближення $E \simeq \tilde{E}$), m — наведена маса α -частинки і ядра, P_l — ймовірність злиття α -частинки і ядра, T_l — проникність бар'єру. У наближенні ВКБ цей коефіцієнт визначається як

$$T_{WKB}(\tilde{E}) = \exp \left\{ -2 \int_{R_2}^{R_3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (\tilde{E} - V(r))} dr \right\}, \quad (10.2)$$

де R_2 і R_3 — друга і третя точки повороту, що визначають область тунелювання.³

Будемо вважати, що захоплення відбувається, коли фрагмент вже з'явився у внутрішній потенціальній ямі після тунелювання через бар'єр. На основі рішення класичних рівнянь руху можна знайти критичний момент імпульсу l_{cr} , коли всі траєкторії при умові $l < l_{\text{cr}}$ ведуть до захоплення. Тут, Глас і Мосел застосували підхід різкого обрізання кутового моменту таким чином [316, 317]:

$$P_l = \begin{cases} 1 & \text{при } l \leq l_{\text{cr}}, \\ 0 & \text{при } l > l_{\text{cr}}. \end{cases} \quad (10.3)$$

У деяких роботах (наприклад, див. [313]) використовується припущення $T_l =$

³Перша точка повороту визначається, як перетин потенціалу та енергії близ нуля, де основний внесок дає відцентрова енергія.

1 при $l < l_{\text{gr}}$ (де $l_{\text{gr}} > l_{\text{cr}}$), що перетворює формулу (10.2) до наступної:

$$\sigma_{\text{capture}}(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2 m \tilde{E}} (2l_{\text{cr}} + 1)^2. \quad (10.4)$$

Критичний момент l_{cr} знаходиться після порівняння перерізів, отриманих за цією формулою, з експериментальними даними. Так, автори роботи (Еберхард та ін.) [313] отримали значення $l_{\text{cr}} = 9.9$ для $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $l_{\text{cr}} = 10.9$ для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Ми будемо вивчати ці процеси у квантовому розгляді та будемо використовувати формулу (10.1) для розрахунків перерізу.

10.2.2. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів у визначенні проникності бар'єру загальної форми

Ми будемо вивчати захоплення α -частинки ядром у сферично симетричному розгляді (роль ядерної деформацій при визначенні ймовірності злиття у α -захопленні аналізується у Додатку К.8). Щоб застосувати ідею багаторазових внутрішніх відбиттів до вивчення тунелювання пакету через бар'єр складної реалістичної форми, ми розглянемо радіальний бар'єр довільної форми, який вдало вдається апроксимувати достатньо великим числом N прямокутних сходинок:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 & \text{при } r_{\text{min}} < r \leq r_1 & \text{(область 1),} \\ V_2 & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\text{max}} & \text{(область } N), \end{cases} \quad (10.5)$$

де V_j — сталі ($j = 1 \dots N$). Позначимо першу область з лівою межею у точці r_{min} (також будемо використовувати позначення r_{capture}) і будемо вважати, що захоплення α -частинки ядром виникає саме у цій області після її тунелювання через бар'єр. Ми будемо шукати рішення для енергій вище ніж висота бар'єру, тоді як рішення для енергій тунелювання можна отримати шляхом

заміни $i \xi_i \rightarrow k_i$. Загальний розв'язок для хвильової функції (з точністю до її нормування) має наступний вигляд:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (10.6)$$

$$\chi(r) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 & \text{(область 1),} \\ \alpha_2 e^{ik_2 r} + \beta_2 e^{-ik_2 r}, & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} r} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} r}, & \text{при } r_{N-2} \leq r \leq r_{N-1} & \text{(область } N-1), \\ e^{-ik_N r} + A_R e^{ik_N r}, & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & \text{(область } N), \end{cases} \quad (10.7)$$

де α_j і β_j — невідомі амплітуди, A_T та A_R — невідомі амплітуди проходження і відбиття, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферична функція, та $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\tilde{E} - V_j)}$ — комплексні хвильові числа. Ми зафіксували нормування таким чином, що модуль амплітуди хвилі $e^{-ik_N r}$, що стартує на першому етапі, дорівнює одиниці. Ми будемо шукати рішення цієї задачі за допомогою методу багаторазових внутрішніх відбиттів.

Для знаходження невідомих амплітуд ми використовуємо метод БВВ, викладений у Розділі 9 [див. формули (9.5)–(9.12), стор. 217]. Але, при визначенні амплітуд проходження та відбиття відносно бар'єра уцілому замість формул (9.9) [див. стор. 218] використовуємо такі:

$$A_T = \sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)} = \tilde{T}_1^-, \quad A_R = \sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)} = \tilde{R}_{N-1}^-, \quad (10.8)$$

а відповідні коефіцієнти проникності T_{MIR} та відбиття R_{MIR} визначаємо так

$$T_{MIR} \equiv \frac{k_1}{k_N} |A_T|^2, \quad R_{MIR} \equiv |A_R|^2. \quad (10.9)$$

10.2.3. α -ядерний потенціал та метод мінімізації

Ми визначимо взаємодію між α -частиною та ядром на основі потенціалу

$$V(r, l, Q) = v_C(r) + v_N(r, Q) + v_l(r), \quad (10.10)$$

де $v_C(r)$, $v_N(r, Q)$ та $v_l(r)$ — кулонівська, ядерна та відцентрова компоненти. У сферично симетричному розгляді α -захоплення ми маємо

$$v_C(r) = \begin{cases} \frac{2Ze^2}{r} & \text{при } r \geq r_m, \\ \frac{Ze^2}{r_m} \left\{ 3 - \frac{r^2}{r_m^2} \right\} & \text{при } r < r_m, \end{cases} \quad v_N(r, Q) = \frac{V(A, Z, Q)}{1 + \exp\left\{ \frac{r - r_m}{d} \right\}} \quad (10.11)$$

та

$$r_m = 1.5268 + R. \quad (10.12)$$

Ми використаємо параметризацію, запропоновану у роботі [112], з орієнтацією на опис α -захоплення. $V(A, Z, Q)$ — глибина ядерної компоненти, A та Z — числа нуклонів та протонів ядра, Q — Q -значення α -захоплення, r_m — ефективний радіус ядерної компоненти, R — радіус ядра та d — дифузність (R , r_m , d визначаються у фермі). Ми вводимо наступні функції похибок:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|\sigma^{(\text{theor})}(E_k) - \sigma^{(\text{exp})}(E_k)|}{\sigma^{(\text{exp})}(E_N)}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|\sigma^{(\text{theor})}(E_k) - \sigma^{(\text{exp})}(E_k)|}{\sigma^{(\text{exp})}(E_k)}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|\ln(\sigma^{(\text{theor})}(E_k)) - \ln(\sigma^{(\text{exp})}(E_k))|}{\ln(\sigma^{(\text{exp})}(E_k))}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

де $\sigma^{(\text{theor})}(E_k)$ та $\sigma^{(\text{exp})}(E_k)$ — теоретичне та експериментальне значення перерізу захоплення при енергії E_k , та сумування виконується за всіма точками експериментальних даних. Будемо шукати ймовірності злиття $p_0 \dots p_{\text{max}}$, що відповідають мінімальним значенням характеристик (10.13). Будем називати такий підхід *методом мінімізації*.

10.3. Аналіз

10.3.1. Залежність проникності від просторової локалізації захоплення та кутових моментів

Для аналізу α -захоплення оберемо ядро ^{44}Ca . З'ясуємо, як саме впливає положення точки r_{capture} на проникність бар'єру (ми припускаємо, що захоплення відбувається, коли максимум хвильового пакета, що описує рух α -частинки з можливим її тунелюванням, знаходиться в області M). Результати таких розрахунків для різних значень енергії α -частинки представлено на Рис. 10.1. Можна бачити, що невеликі зміни положення точки r_{capture} ведуть до істотної зміни коефіцієнта проникності (наприклад, вплив положення r_{capture} на значення проникності істотно більше, ніж врахування деформації ядра при знаходженні проникності без врахування положення r_{capture} ; отже, немає сенсу у вивченні ролі ядерної деформації без попереднього зрозуміння впливу положення точки r_{capture}). Важливість правильного вибору цього параметра для коректних розрахунків перерізів тепер стає більш ясною. Ця залежність має осцилюючу поведінку, що пов'язано з проявом хвильової природи тунелювання (див. Розділ 9, роботи [73, 72, 96] для протонного та α -розпадів).

Для вирішення цієї невизначеності (що є суттєвою, але не існує у ВКБ-підході та саме тому не була знайдена раніше), введемо умову:

В якості можливого значення r_{capture} оберемо координату, що відповідає мінімальній зміні амплітуди осциляцій коефіцієнта проникності, яка відповідає найбільш високій стабільності проникності при можливих збуреннях (ми не будемо аналізувати таку поведінку проникності при $r \rightarrow 0$).

Аналіз показує, що за виконання цієї умови для різних енергій α -частинки така точка відповідає мінімуму внутрішньої потенціальної ями (розрахунки дають значення $r_{\text{capture}} = 0.44$ фм для обраної параметризації при $l = 0$).

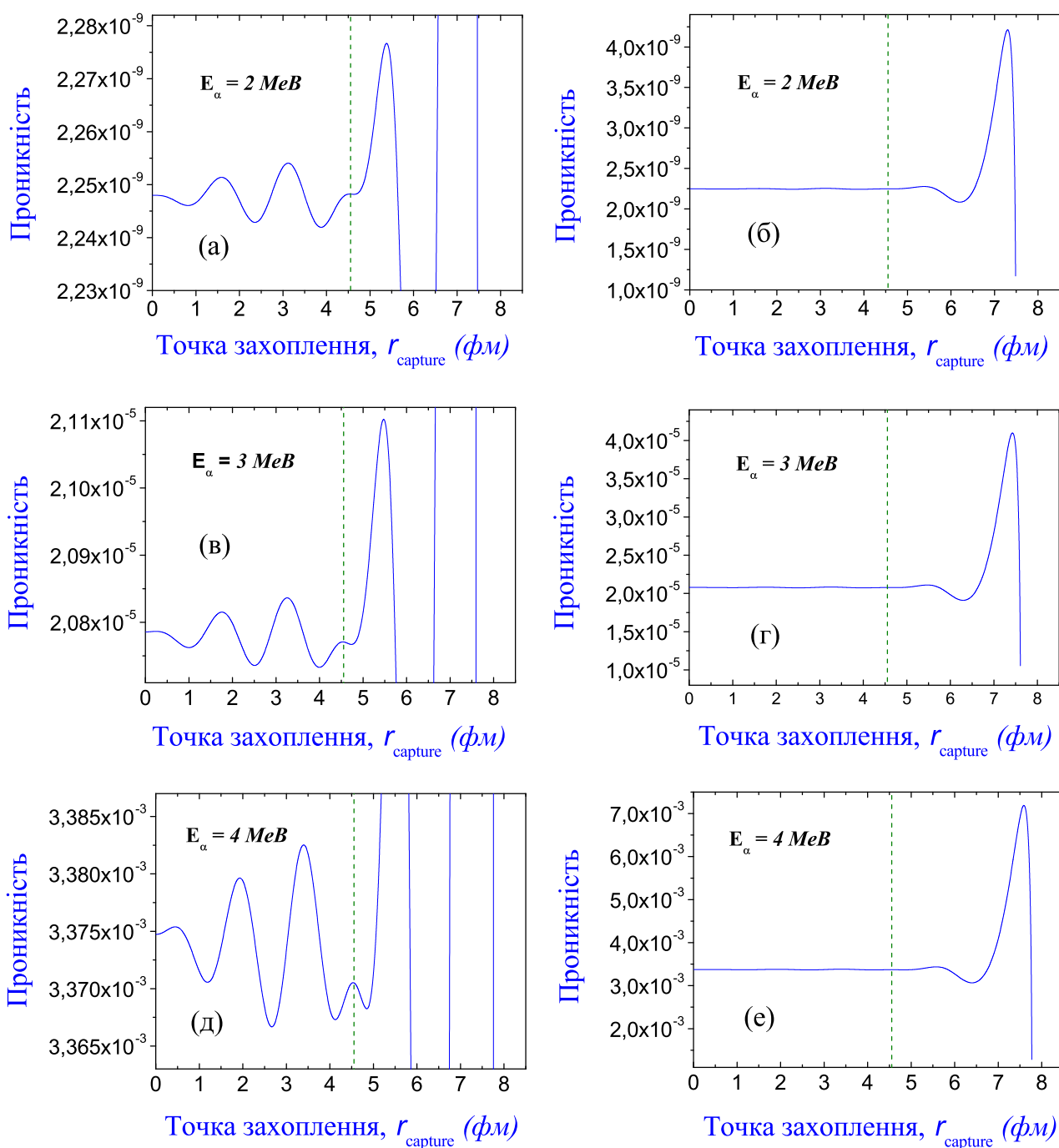


Рис.10.1 Коефіцієнт проникності бар'єра залежить від положення локалізації r_{capture} захоплення α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ і енергії α -частинки $E_\alpha = 2 \text{ MeV}$ (а, б), $E_\alpha = 3 \text{ MeV}$ (в, г) та $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$ (д, е) (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризація взята з роботи [112]).

Тому оберемо таке визначення r_{capture} для розрахунків перерізів.

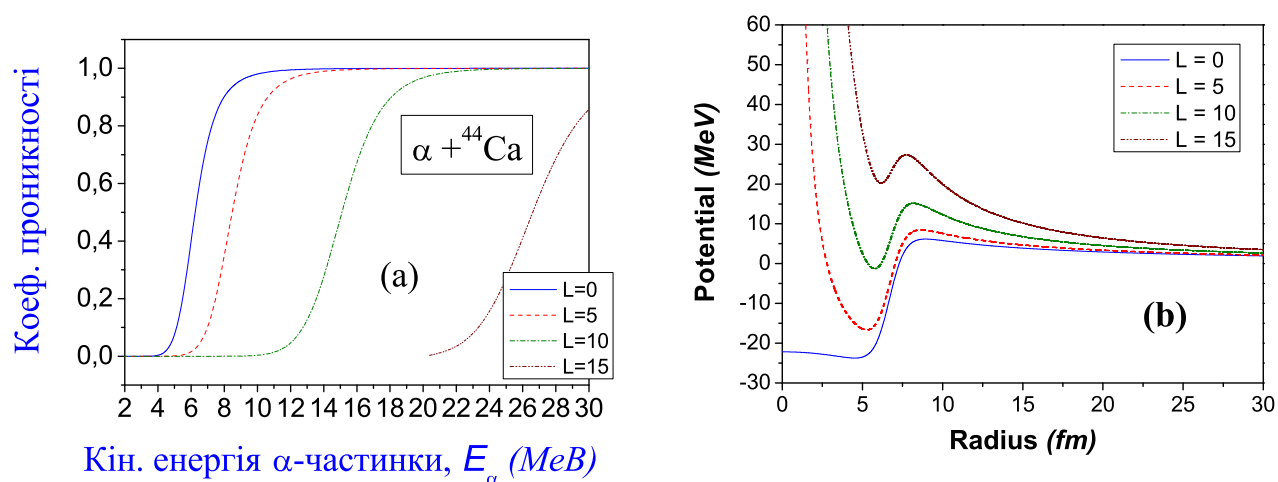


Рис.10.2 Коефіцієнти проникності бар'єру (а) та відповідні потенціальні бар'єри (б) для різних орбітальних моментів l для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризація взята з роботи [112], положення r_{capture} визначається окремо для кожного орбітального моменту на основі умови, сформульованої вище).

З Рис. 10.2 (а) можна бачити, що лінія проникності зміщується вправо при зростанні орбітального моменту l . Ця зміна пояснюється через зростання внутрішньої потенціальної ями перед бар'єром, в наслідок більшої відцентрової компоненти потенціалу при великих l [див. Рис. 10.2 (б)]. Кожна наступна парціальна компонента перерізу α -захоплення, таким чином, дає свій власний внесок у повний спектр, починаючи з деякої своєї мінімальної енергії E_α . Тому повний переріз α -захоплення при достатньо малих енергіях E_α описується лише парціальними перерізами при малих l .

10.3.2. Метод БВВ та ВКБ-підхід у розрахунках перерізів

Тепер ми розглянемо, як переріз захоплення визначається у методі БВВ та ВКБ-підході. Результати таких розрахунків за допомогою метода БВВ для різних значень L_{max} представлені на Рис. 10.3 (тут L_{max} — верхня межа сумування у формулі (10.1), що ми обираємо замість нескінченності). Представлення перерізів у лінійному масштабі явно показує їх повільний спад після

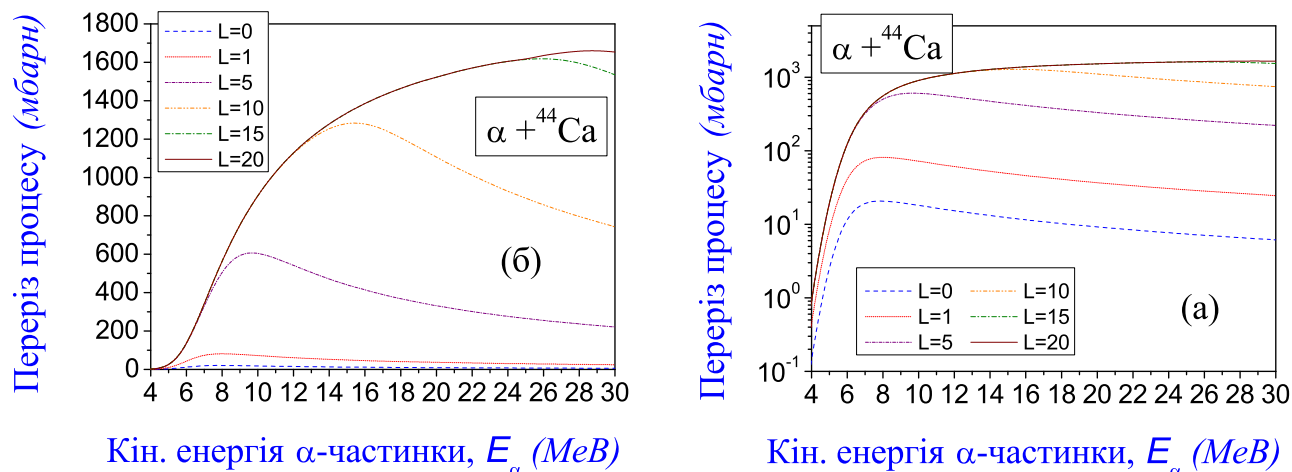


Рис.10.3 Перерізи захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca , отримані за допомогою метода БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, r_{capture} визначається у координаті мінімуму потенціальної ями, що змінюється у залежності від орбітального моменту l , параметризація вибрана з роботи [112]). (а) Спектри у логарифмічному масштабі: роль внесків при малих значеннях l більш помітна. (б) Спектри у лінійному масштабі: поведінка сумарного спектру після включення внесків при великих l більш помітна. Можна бачити, що кожний парціальний переріз має свій максимум. Включення наступних внесків (при великих l) згладжує повний спектр, поступово перетворюючи його у монотонно зростаючу лінію усередині всього діапазону енергій.

максимуму. Крім того, представлення їх у логарифмічному масштабі показує чітко монотонне збільшення у перерізі до вершини (особливо при малих l), який наочно демонструє поведінку парціальних перерізів при малих l у порівнянні з перерізами при великих l . ВКБ-підхід дає інший результат, що показано на Рис. 10.4. Слід відзначити наступні два аспекти (які проявляються у лінійному масштабі, але зникають у логарифмічному): (1) з'являються гострі піки після включення внесків при великих l ; (2) сумарний переріз істотно вище у порівнянні з повністю квантовими розрахунками, що показано на Рис. 10.3.

10.3.3. Знаходження ймовірностей злиття

Перерізи для реакції $\alpha + ^{44}\text{Ca}$, отримані за допомогою методу БВВ і підходу ВКБ, та експериментальні дані [313] включені у Рис. 10.5. До цього рисунка додано розрахунки на основі методу БВВ з включенням ймовірностей злит-

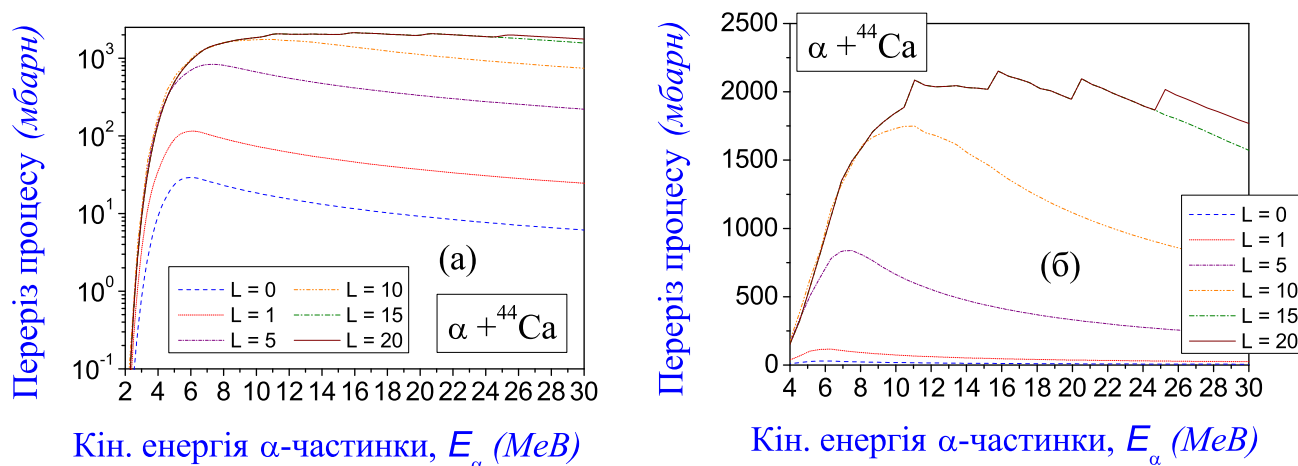


Рис. 10.4 Перерізи захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca , отримані у ВКБ-підході (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризація взята з роботи [112]). На малюнку (б) можна побачити, що у спектрі існують гострі піки, що зникає у логарифмічному масштабі [див. Рис. (а)]. Така властивість спектру є характерною для розрахунків ВКБ.

тя, знайдених методом мінімізації. Можна бачити, що наближення ВКБ дає більш високі значення перерізу у порівнянні з розрахунками у підході БВВ при $L_{\text{max}} = 10 - 15$. Таким чином, ми приходимо до наступних висновків: (1) *підхід ВКБ дає знижені оцінки ймовірностей злиття у порівнянні з методом БВВ*, та (2) *переріз, отриманий у підході ВКБ, має розриви при більш високих енергіях, тоді як метод БВВ дає неперервну форму спектру*.

У роботі [313] обговорювався *ефект аномального розсіяння при великих кутах [effect of anomalous large-angle scattering (ALAS)]*, якому було дано пояснення на основі *підходу різкого обрізання кутових моментів (sharp angular momentum cut-off approach)* при деяких критичних значеннях орбітального моменту L_{max} [див. рівняння (1)–(2) у тій роботі]. Цей випадок відповідає розрахункам на основі методу БВВ при різних значеннях L_{max} (де всі ймовірності злиття прирівнюються до одиниці при $l \leq L_{\text{max}}$). Тут, лінія 5 для $L_{\text{max}} = 10$ на Рис. 10.5 (та лінія 6 для $L_{\text{max}} = 12$) явно краще описує експериментальні дані, ніж лінія 7 для $L_{\text{max}} = 15$ (яка майже збігається з подальшими розрахунками для більш високих значень L_{max}). Однак, всі ці лінії подальш розташовані від експериментальних даних у порівнянні

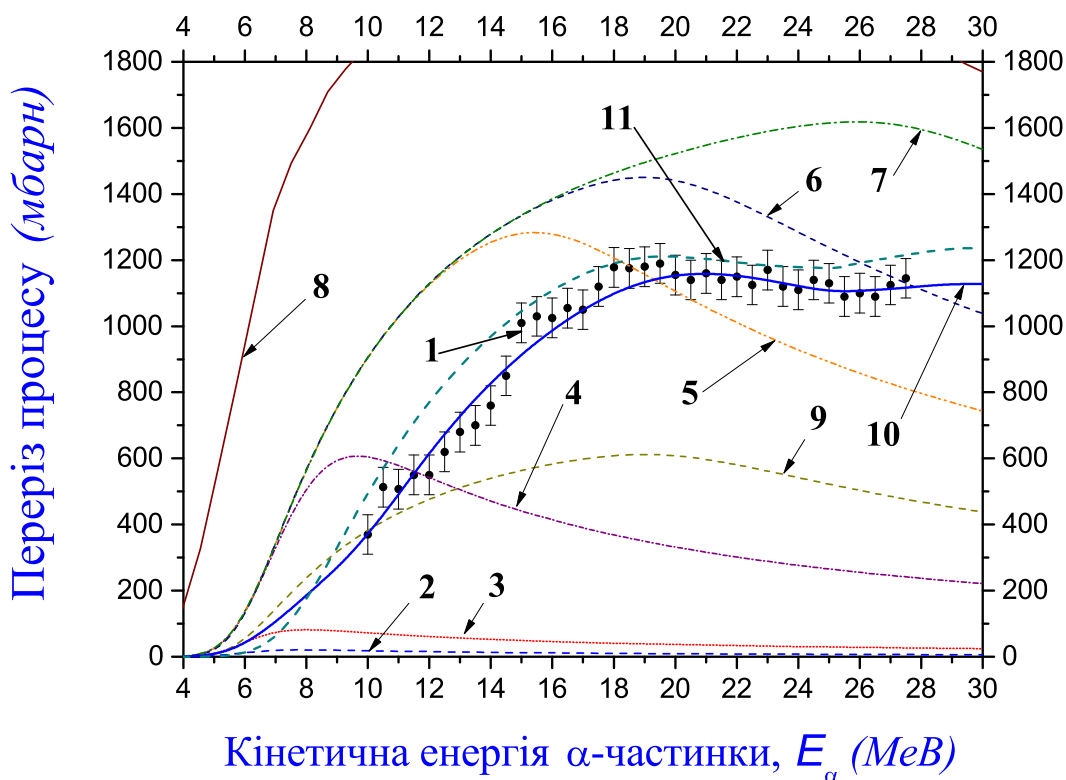


Рис.10.5 Перерізи захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca , отримані за допомогою методу БВВ і підходу ВКБ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризацію обрано з роботи [112]). Тут, дані, позначені числом 1, — експериментальні дані з роботи [313], пунктирна синя лінія 2 — переріз при $l_{\text{max}} = 0$, коротка пунктирна червона лінія 3 — переріз при $l_{\text{max}} = 1$, коротка штрих-пунктирна фіолетова лінія 4 — переріз при $l_{\text{max}} = 5$, подвійна штрих-пунктирна оранжева лінія 5 — переріз при $l_{\text{max}} = 10$, пунктирна темно синя лінія 6 — переріз при $l_{\text{max}} = 12$, штрих-пунктирна зелена лінія 7 — переріз при $l_{\text{max}} = 15$, суцільна коричнева лінія 8 — переріз при $l_{\text{max}} = 20$, пунктирна темно-жовта лінія 9 — нормований переріз при $l_{\text{max}} = 17$, суцільна синя лінія 10 — переріз при $l_{\text{max}} = 17$, і пунктирна темно-бірюзова лінія 11 — переріз при $l_{\text{max}} = 17$ (перерізи визначаються по формулі (10.1), де l_{max} — це верхня межа підсумовування). Коефіцієнти проникності розраховуються за допомогою методу БВВ для ліній 2–7 і 9–11, та методом ВКБ для лінії 8. Лінії 10–11 знаходяться при включенні ймовірностей злиття, та лінії 2–9 отримуються без врахування таких ймовірностей злиття. Можна бачити, що лінія 10, отримана після включення ймовірностей злиття, описує експериментальні дані з хорошою точністю (що не можливо без включення таких коефіцієнтів, але при використанні будь-якої вільної підгонки параметрів α -ядерного потенціалу, див. Розд. 10.3.4, стор. 243). Для лінії 11 ймовірності злиття отримані за формулами (10.14)–(10.20) [див. стор. 246].

з лінією 10, яка включає в собі ймовірності злиття, отримані методом мінімізації. Таким чином, підхід різкого обрізання кутових моментів не описує вдало експериментальні дані для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з лінією 10. Цей результат показує, що залежність ймовірностей злиття від орбітального моменту виявляється більш складною, та вона вимагає більш ретельного вивчення. Ймовірності злиття, які були використані при розрахунках лінії 10, представлені у Табл. К.1 у Додатку К.4. Можна бачити, що значення ймовірностей $p_0 \dots p_4$ виявляються вкрай малими (на відміну від таких значень, отриманих за допомогою підходу різкого обрізання кутових моментів [313]). Крім того, p_{15} та p_{16} близькі до одиниці (при малих p_{13}), що дозволяє описати малі коливання спектру при високих енергіях (при $E = 23 - 28$ MeV). Іншими словами, наявність осциляторної поведінки експериментальних даних свідчить про досить високі значення ймовірностей злиття при максимальних орбітальних моментах (на відміну від підходу різкого обрізання кутових моментів [313]).

Еберхард та співавтори у роботі [313] вивчали злиття (поглинання) α -частинки ядрами ${}^{40}\text{Ca}$ і ${}^{44}\text{Ca}$ та порівняли залежності перерізів захоплення від величини орбітального моменту l . Ці залежності були отримані відносно одного вдало обраного значення енергії (на Рис. 2 у цій роботі дані представлені для $E = 25$ MeV). Тому ми будемо порівнювати ймовірності злиття для цих двох ядер як функції орбітального моменту. Такі розрахунки представлені на Рис. 10.6. Ці дані були отримані шляхом аналізу експериментальних даних по всьому діапазону енергій, що вказує на більш акуратний аналіз у нашому підході. На Рис. 10.6 показано, що обидві лінії мають подібну поведінку при низьких значеннях l , але вони суттєво відрізняються при великих l . Ймовірність злиття для ядра ${}^{40}\text{Ca}$ виявляється меншою, ніж для ядра ${}^{44}\text{Ca}$ при великих l . Це відповідає меншому перерізу захоплення для ядра ${}^{40}\text{Ca}$, ніж для ${}^{44}\text{Ca}$ у експериментальних даних [313]. Таким чином, зменшення пе-

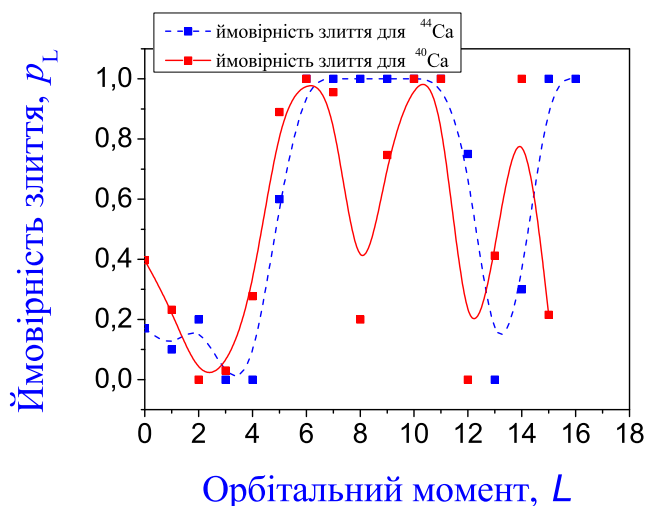


Рис.10.6 Ймовірності злиття для захоплення α -частинки ядром ^{40}Ca (суцільна червона лінія) та ^{44}Ca (синя пунктирна лінія), отримані за допомогою методу БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризацію взято з роботи [112]).

рерізу захоплення для ядра ^{40}Ca при високих енергіях можна пояснити через меншу ймовірність злиття при великих l (ці два ядра мають різні бар'єри, які дають $L_{\text{max}} = 15$ для ядра ^{40}Ca і $L_{\text{max}} = 16$ для ядра ^{44}Ca , формуючи додатковий внесок у повний спектр для ядра ^{44}Ca). Нормування розрахованих спектрів на експериментальні дані (без урахування ймовірностей злиття) не гірше описує експериментальні дані (див. лінію 9 на Рис. 10.7), ніж лінія 10.

10.3.4. Оптимальні параметри для ядерної компоненти потенціалу

Знаходження потенціалу взаємодії є стандартною задачею теорії оптимізації. Аналіз показує наявність тільки одного стабільного мінімуму у залежності функцій помилок від параметрів r_m і d (див. Рис. 10.7), що підтверджує працездатність методів оптимізації для рішення цієї задачі. Визначення цих параметрів за допомогою такого методу більш докладно описано у Додатку К.5.

У Табл. 10.1 представлено розрахунки за допомогою методу БВВ з включенням ймовірностей злиття та нових параметрів потенціалу, знайдених методом оптимізації, для $\alpha + ^{40}\text{Ca}$ та $\alpha + ^{44}\text{Ca}$ та для підходу ВКБ без включення ймовірностей злиття при параметризації [112]. Видно, що при однаковій

Параметризація	$\alpha + {}^{40}\text{Ca}$			$\alpha + {}^{44}\text{Ca}$		
	власна	робота [112]		власна	робота [112]	
Ймовірності злиття	включено	викл.	включено	включено	викл.	включено
Метод розрахунку	БВВ	ВКБ	ВКБ	БВВ	ВКБ	ВКБ
V_0 , МеВ	28.6444	28.8374		36.1	35.2657	
r_m , фм	6.5164	6.6338		7.3	6.68670	
d , фм	0.5107	0.49290		0.4349	0.49290	
ε_1	0.02141	0.9233	0.5154	0.0246	0.8401	0.3881
ε_2	0.02716	0.5251	0.3873	0.0344	0.4936	0.3238
ε_3	0.00409	0.1030	0.0687	0.0051	0.0957	0.0561

Табл. 10.1. Параметри α -ядерного потенціалу і функції помилок для захоплення $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Нові параметри потенціалу, отримані методом оптимізації, та відповідні значення функцій помилок, коли в розрахунках коефіцієнти проникності знаходяться за допомогою метода БВВ та включаються ймовірності злиття (які наведені у Табл. 10.2), представлені у колонках 2 і 5. Коефіцієнти проникності, отримані методом БВВ для параметризації, обраної з роботи [112] без включеного ймовірності злиття наведені у колонках 4 і 7 та розрахунки коефіцієнтів проникності при використанні ВКБ-наближення при параметризації [112] без включення ймовірностей злиття наведені у колонках 3 та 6. ε_1 , ε_2 і ε_3 — функції помилок, які визначаються за формулами (10.13) [див. стор. 235].

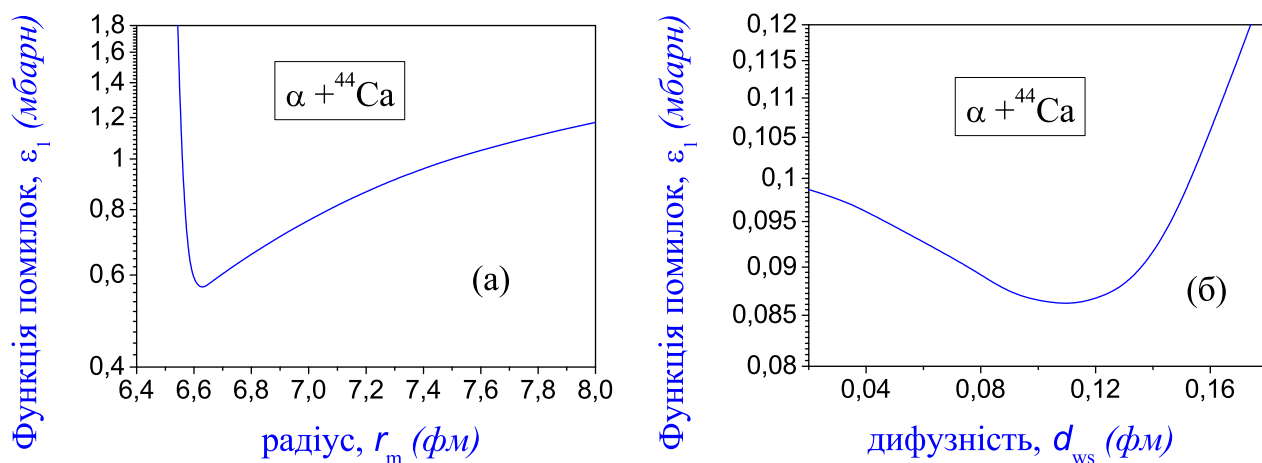


Рис.10.7 Залежності функції помилок ε_1 , що визначається за формулою (10.13) від радіуса r_m (а) і дифузності d (б) для захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, використано метод БВВ без включення ймовірностей злиття, параметризація взята з роботи [112]).

параметризації [112] метод БВВ зменшує похибку ε_1 у 1.79 разів для $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і у 2.16 разів для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з ВКБ-розрахунками. Для нової параметризації, що отримана після включення ймовірностей злиття, розрахунки за допомогою методу БВВ зменшують похибку ε_1 у 41.72 разів для $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і у 34.06 разів для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з ВКБ-розрахунками при параметризації [112]. Аналіз підходу Хілла-Уілера та формули Вонга показує, що вони побудовані при суттєво сильних обмеженнях потенціального бар'єру, де наближення ВКБ навіть більш коректно враховує форму бар'єру при визначенні коефіцієнту проникності (див. Додаток К.6). Цей момент має ключове значення, коли ми шукаємо шлях до отримання найбільш акуратної інформації про процеси злиття з аналізу експериментальних даних. Оновлені значення ймовірностей злиття при новій параметризації наведено у Табл. 10.2. Ці результати підтверджують, що метод БВВ (1) є найбільш точним для опису процесів тунелювання через оригінальний бар'єр і для знаходження ймовірностей злиття у реакціях α -захоплення, та (2) дозволяє описати існуючі експериментальні дані з найкращою згодою.

Ядро	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
^{40}Ca	0.05	0.01	0.01	0.29	0.89	0.94	0.60	0.43	0.83	0.60
^{44}Ca	0.04	0.03	0.01	0.01	0.43	0.31	0.62	0.31	0.71	1.00

Ядро	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}
^{40}Ca	1.00	1.00	0.01	0.49	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
^{44}Ca	1.00	1.00	1.00	0.67	0.09	0.01	0.91	1.00	0.01

Табл. 10.2. Ймовірності злиття для захоплення $\alpha + ^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + ^{44}\text{Ca}$, отримані методом БВВ при параметризації у Табл. 10.1 (див. колонки 2 та 5 у таблиці).

10.3.5. Ймовірності злиття

З Рис. 10.6 можна бачити два аспекти, що подавляють злиття у α -захопленні.

1) Перший аспект спостерігається при найменших кутових моментах. Він проявляється у суттєвому зниженні злиття після тунелювання α -частинки через бар'єр. Це явище можна пов'язати з проявом ядерних сил між нуклонами, які формують основний внесок в енергію зв'язку новоформованого ядра. Але це явище може бути пов'язано з проявом невідомих сил дисипативної природи з сильним впливом на динамічні характеристики нуклонів при малих моментах. Такі сили мають однаковий загальний прояв для різних ядер. З Рис. 10.6 визначимо залежність опису аспекту:

$$p_1(L) = \frac{c_1}{1 + e^{(L-c_2)/c_3}}, \quad (10.14)$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 4.2, \quad c_3 = 0.5. \quad (10.15)$$

2) Другий аспект проявляється при найвищих кутових моментах. З порівняння спектрів для ^{40}Ca та ^{44}Ca на Рис. 10.6 видно, що цей аспект проявляється іншим чином: він по різному впливає на ці ядра. Отже, цей аспект пов'язаний зі структурою ядра, що може бути пояснена на основі закриття ядерних оболонок. Саме цей аспект може бути причиною різниці між спектрами ядер ^{40}Ca і ^{44}Ca (тоді як перший аспект має однаковий вплив на ці

ядра). З Рис. 10.6 ми припускаємо опис такого аспекту:

$$p_2(L) = f_2(L) \cdot \sum_{n=1} e^{-\frac{(L - n \cdot \Delta)^2}{c_4}}. \quad (10.16)$$

Тут функція $f_2(L)$ подавляє осцилюючу залежність з пониженням L , та вона може бути описана як

$$f_2(L) = 1 - e^{-c_5 \cdot (L - c_6)}. \quad (10.17)$$

Для виконання перших оцінок оберемо $c_4 = 1$, $c_5 = 0.25$, $c_6 = 2.5$. Δ визначає вплив нейтронних оболонок на ймовірності злиття, що опишемо як

$$\Delta = a \cdot (N - N_{\text{magic}}) + b. \quad (10.18)$$

Тут N — число нейтронів ядра, та N_{magic} — магічне число найближчої нейтронної оболонки, де $N_{\text{magic}} \leq N$ (тобто $N_{\text{magic}} = 20$ для ^{40}Ca та ^{44}Ca). Уведемо лінійну інтерполяцію (10.18) на основі ймовірностей злиття, що приведені на Рис. 10.6. З Рис. 10.6 можна знайти періоди осциляцій:

$$a = 2.31, \quad b = 4.05. \quad (10.19)$$

Ймовірність повного злиття визначається як

$$p_{\text{full}}(L) = 1 - p_1(L) - p_2(L). \quad (10.20)$$

Ці формули можна рекомендувати для опису ядер близ протонних оболонок.

Ймовірності злиття для ^{40}Ca та ^{44}Ca за цими формулами показано на Рис. 10.8. Перерізи з включеними ймовірностями злиття для захоплення $\alpha + ^{44}\text{Ca}$ додаються на Рис. 10.5 у вигляді фіолетової пунктирної лінії 11. Можна побачити, що розрахункові перерізи з ймовірностями злиття описують експериментальні дані краще, ніж інші розрахунки без злиття у захопленні.

Ядро ^{40}Ca — двічі магічне, а ^{44}Ca має магічне число протонів $Z = 20$. Енергія зв'язку для ^{40}Ca більше, ніж для ^{44}Ca . Тобто, ядро ^{40}Ca є більш стабільним, та тому через розсіяння α -частинки на цьому ядрі синтезувати нове

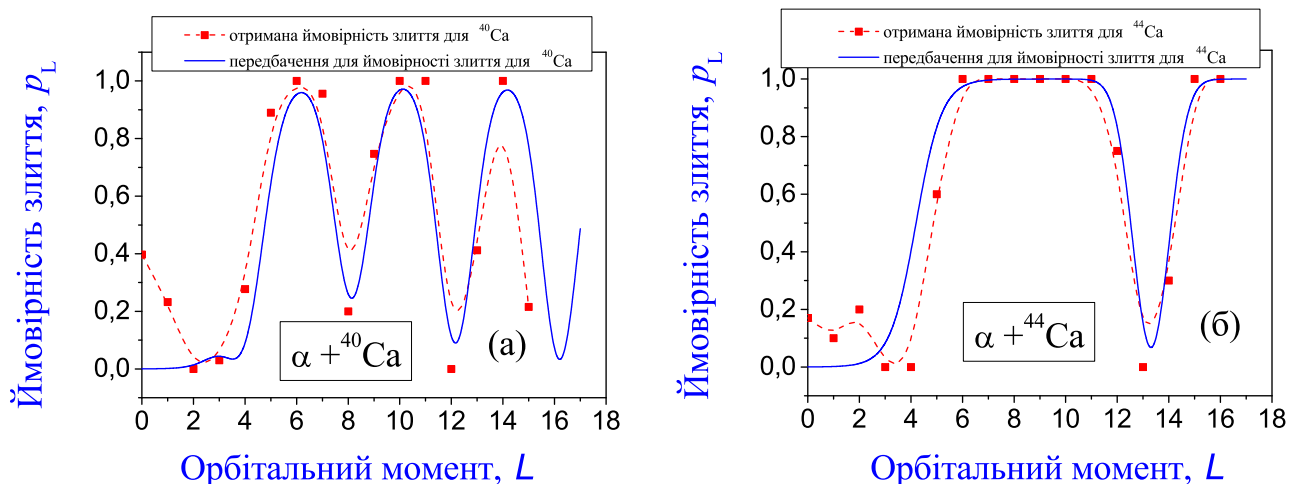


Рис.10.8 Ймовірності злиття для реакцій захоплення $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ (а) і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ (б). Тут суцільні сині лінії — це розрахунки ймовірностей злиття, що визначені за формулами (10.14)–(10.20) [див. стор. 246], і пунктирні червоні лінії — дані ймовірностей злиття, представлені на Рис. 10.6.

ядро вже важче. Зокрема, злиття α -частинки і ядра при такому розсіюванні повинно бути максимально ослабленим, а в деяких випадках навіть відсутнім. Ця ситуація демонструється на Рис. 10.6. Можна бачити меншу ймовірність злиття з ядром ${}^{40}\text{Ca}$, ніж ядром ${}^{44}\text{Ca}$ при високих кутових моментах. Це підтверджено експериментально для $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$.

У 1975 році Тібо (Thibault) та співавтори [323] спостерігали одночасне співіснування двох форм магічного ядра ${}^{31}\text{Na}$, тобто сферичної та деформованої у основному стані. Наявність існування деформованої форми в основному стані пояснена через сильний взаємозв'язок між $2p$ – $2n$ збудженими станами для sd і pf -оболонки, що призводить до збільшення енергії зв'язку і підсилення стабільності для ядер близ оболонки при $N = 20$. Встановлено співіснування двох форм для більшості ядер близ $N = 20$ і $N = 28$ [320].

Припустимо, що *кожна форма визначає свій найбільш стабільний стан ядра, тому вона пов'язана з погашенням злиття*. Обидві форми повинні проявлятися у ядрах з замкнутою нейтронною оболонкою при $N = 20$, що видно з даних α -захоплення. ${}^{40}\text{Ca}$ — це ядро, для якого ми бачимо найбільш сильне друге погашення злиття при високих енергіях α -частинки (див.

Рис. 10.6). Цей процес призводить до більш суттєвого послаблення перерізу α -захоплення для такого ядра при високих енергіях.

Кожна форма пов'язана зі своїм типом погашення злиття у α -захопленні ^{40}Ca і ^{44}Ca . Сферична форма ядра не пов'язана з високими кутовими моментами, тому їй відповідає перший аспект (при малих кутових моментах). Деформована форма пов'язана з високими кутовими моментами (що відповідає високій енергії у перерізі), що пов'язано з другим аспектом погашення злиття. Співіснування таких особливостей показано на Рис. 10.6.

Підтвердження співіснування двох форм для ядер близ оболонок з числами $N = 20$ та $N = 28$ призводить до відкриття нових магічних чисел [320]. Огляд по цій темі [320] вказує на нові нейтронні магічні числа $N = 16$ і $N = 26$ (стандартна теорія дає тільки сім експериментально відомих нейтронних магічних чисел, це 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126). Тому запропонуємо експериментаторам дослідити злиття у захопленні α -частинки ядром ^{46}Ca . Додамо передбачення ймовірностей злиття та перерізів такого ядра на Рис. 10.9.

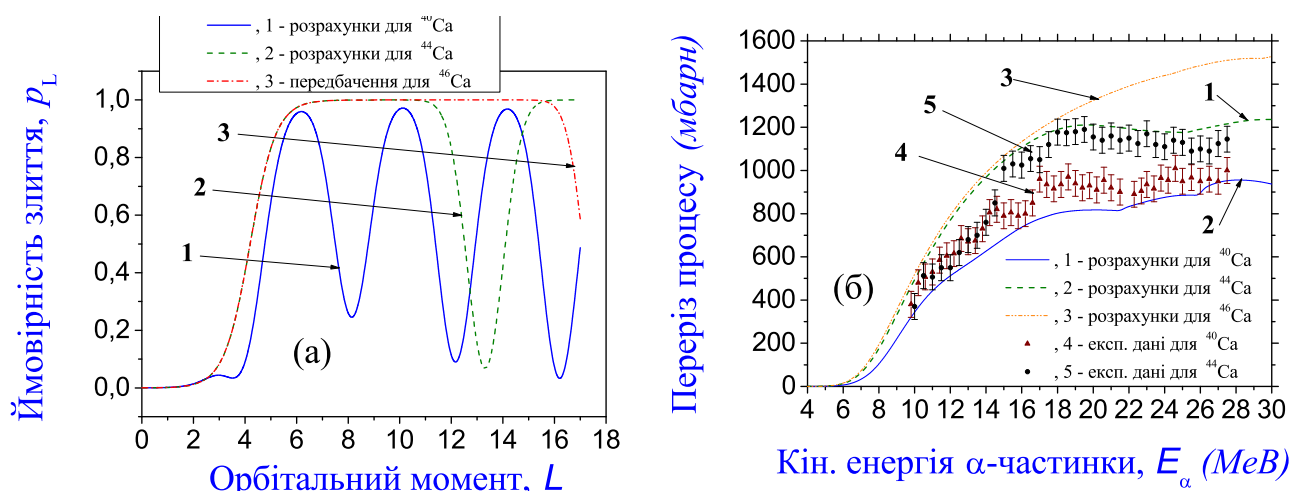


Рис.10.9 Ймовірності злиття (а), розраховані за формулами (10.14)–(10.20), та перерізи (б) для захоплення α -частинки ядрами ^{40}Ca , ^{44}Ca та ^{46}Ca , отримані методом БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм).

10.4. Головні результати і висновки до Розділу 10

У Розділі викладено узагальнення методу багаторазових внутрішніх відбиттів для опису захоплення α -частинок ядрами, на його основі проаналізовано захоплення α -частинок ядрами ^{40}Ca , ^{44}Ca та ^{46}Ca . Відзначимо наступне:

1. Порівнюючи перерізи захоплення, отримані за допомогою методу БВВ, з експериментальними даними [313], ми знаходимо:

(а) нові ймовірності злиття α -частинки з ядрами ^{40}Ca і ^{44}Ca (див. табл. 10.2),

(б) нові параметри α -ядерного потенціалу (див. табл. 10.1).

Включення процесів злиття у формалізм суттєво покращує узгодження розрахунків перерізів захоплення з експериментальними даними (див. табл. 10.1). Метод БВВ дає нову параметризацію з включеними ймовірностями злиття і знижує помилку ε_1 у 41.72 разів в опісі експериментальних даних для $\alpha + ^{40}\text{Ca}$ і у 34.06 разів для $\alpha + ^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з ВКБ-розрахунками при параметризації [112] без ймовірностей злиття.

2. Знайдені ймовірності злиття вказують, що підхід різкого обрізання кутових моментів, запропонований Гласом і Моселом у роботах [317, 316], є достатньо грубим наближенням (див. лінію 6 на Рис. 10.7), що виключає можливість вивчення процесів злиття у реакціях α -захоплення (див. Додаток К.4 для пояснення). Більш реалістичну картину наведено у Таблиці **К.1** (що відповідає лінії 10 на Рис. 10.7). Зокрема, ймовірності злиття при малих кутових моментах близькі до нуля, що суперечить ідеї підходу різкого обрізання кутових моментів (див. Табл. 10.2).

3. Показано, що (1) ВКБ-наближення дає занижені ймовірності злиття ніж метод БВВ, (2) перерізи захоплення за ВКБ-підходом мають розриви при високих енергіях (метод БВВ дає неперервну форму спектра).

4. Показано, що формула Вонга та підхід Хілла-Уілера у визначенні проникності: (а) використовують суттєво обмежену частину бар'єра за рахунок уведення оберненої параболічної апроксимації, (б) не враховують форму реалістичного бар'єру, (в) не відповідають визначенню проникності у квантовій механіці. Тому ВКБ-наближення більш вдало враховує бар'єр.
5. Знайдено нову формулу ймовірностей злиття на основі (10.15)–(10.20). За допомогою цієї формули пояснюється відмінність між перерізами $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ (та пояснюється співіснування сферичної та деформованої форм ядер в основному стані). Для ядер з новим магічним нейтронним числом $N = 26$, запропоновано нові перерізи $\alpha + {}^{46}\text{Ca}$ для експериментального підтвердження.
6. На основі аналізу реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$, виявлено наступну різницю у ефективності у визначенні коефіцієнтів проникності і відбиття між методом БВВ та методом, що визначає хвильові функції через пряме інтегрування радіального рівняння Шродінгера з високою точністю (використовуючи своє узагальнення метода Нумерова) (див. Додаток К.7):
 - (а) Для оцінки точності визначення проникності T і відбиття R ми використовуємо тест квантової механіки: оцінюємо похибку $\varepsilon_1 = ||T + R| - 1|$ кожного методу. Узагальнений метод Нумерова має точність $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, а точність методу БВВ обмежена потужністю комп'ютера (див. Таблиці **К.5** і **К.6** з розрахунками при $\varepsilon_1 \leq 10^{-16}$).
 - (б) Метод БВВ більш точно визначає проникність і відбиття при варіації r_{\max} і N , ніж узагальнений метод Нумерова. Точність за методом Нумерова — до 10^{-3} . Точність за методом БВВ нескінченно зростає при збільшенні кількості інтервалів N : ми досягаємо перших 8 стабільних цифр при $N \rightarrow 50000$ (див. Таблиці **К.5** і **К.6**).

Приведемо висновок, що метод БВВ є найбільш точним, але він вимагає

подібного часу на розрахунки, як метод Нумерова. Цей результат можна пояснити так. Метод БВВ дає точні аналітичні розв'язки для хвильової функції для потенціалу з будь-яким скінченим числом прямокутних сходинок. Точність апроксимації оригінального потенціалу прямокутними сходишками залежить тільки від кількості сходинок, де збільшення їх числа обмежено лише потужністю комп'ютера.

Точність методу Нумерова має наступні обмеження:

- (a) Підхід Нумерова визначає хвильову функцію у наступній радіальній координаті на основі значення хвильової функції у двох попередніх координатах з похибкою.
- (b) Похибка у визначенні хвильової функції на області дії ядерних сил за методом Нумерова зростає зі збільшенням числа інтервалів N .
- (c) Кулонівські функції у ближній асимптотичній області розраховуються за теорією асимптотичних рядів, що розходяться.

7. З'ясована роль ядерних деформацій у визначенні ймовірностей злиття у α -захопленні для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Відзначимо наступне (див. Додаток К.8):

- (a) Ясне зрозуміння такого питання забезпечує аналіз зміни коефіцієнта проникності потенціальних бар'єрів після включення деформації ядра при $l = 0$. Найбільший вплив ядерної деформації існує для кутів деформації $\theta = 0^\circ$ та $\theta = 90^\circ$ для найнижчої енергії α -частинки, тоді як при $\theta = 55^\circ$ такий вплив відсутній (див. Рис. К.4).
- (b) Метод БВВ визначає ймовірності злиття для деформованих ядер і описує експериментальні дані α -захоплення з високою точністю (див. Табл. К.7, та лінії 2 і 3 на Рис. К.5). Спостерігаються осциляції у спектрі після уключення ядерної деформації.

Інший аспект — визначення межі, відносно якої треба знайти потік, що

пройшов. Виявляється, що малі варіації положення межі суттєво змінюють коефіцієнти проникності та відбиття. Так, для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ та $E_\alpha = 2$ MeV роль межі можна оцінити через характеристику $f_1 = T(r_{\text{capture}} = 7.42 \text{ fm})/T(r_{\text{capture}} = 4.5 \text{ fm}) = 4.09869 \cdot 10^{-5}/2.07705 \cdot 10^{-5} = 1.9733$ (див. Рис. 1). Роль деформації ядра можна оцінити через відношення проникностей сферичного та деформованого ядра у реакції. Отримаємо $(T_{\text{def}} - T_{\text{spher}})/T_{\text{spher}} = 0.58015$ при $E_\alpha = 2.1$ MeV при $l = 0$ [див. Рис. F.12 (б)]. Отримаємо $f_2 = T_{\text{def}}/T_{\text{spher}} = (T_{\text{def}} - T_{\text{spher}})/T_{\text{spher}} + 1 = 0.58015 + 1 = 1.58015$. Видно, що коефіцієнт f_2 менше ніж f_1 . Виходить, що у квантових розрахунках положення межі r_{capture} при визначенні проникності (і перерізів) більш важливе, ніж деформація ядра без врахування межі r_{capture} . Метод БВВ розв'язує таку проблему.

Відзначимо, що на сьогодні не існує інших підходів, що досягають такої згоди в описі експериментів α -захоплення, як це дає метод БВВ. Результати цих досліджень викладено у роботах [74, 75].

РОЗДІЛ 11

НОВІ КВАЗІЗВ'ЯЗАНІ СТАНИ СКЛАДЕНОЇ СИСТЕМИ У ЗАХОПЛЕННІ α -ЧАСТИНОК ЯДРАМИ

11.1. Вступ

Традиційний напрямок до зрозуміння захоплення α -частинок ядрами базується на ідеї тунелювання через потенціальний бар'єр [226] (див. також [325]). Оцінки швидкостей захоплення α -частинок ядрами вказують на важливу роль таких реакцій у зірках [304, 309, 312]. Насьогодні вже досягнуто суттєвого прогресу по дослідженням таких реакцій [112, 224, 225, 226], згідно до якого ми маємо потенціал взаємодії між α -частинками та ядрами, який найбільш вдало описує існуючу експериментальну інформацію про α -розпад та α -захоплення. Не дивлячись на те, що підходи до визначення проникностей бар'єрів розроблено достатньо добре, на даний час не існує загально прийнятого підходу до опису злиття у такій реакції. На зрозуміння механізмів злиття суттєвої уваги було приділено у дослідженнях зіткнень важких іонів та розсіяння з ядерними фрагментами, більш важкими ніж α -частинка, (див. сучасний статус експериментальних та теоретичних досліджень по цій темі в огляді [326], також у роботах [327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 275, 337, 338, 339, 340]). Але, на даний час, у випадку α -захоплення, модельний опис злиття α -частинки ядром у внутрішній ядерній області є дуже спрощеним. Так, у роботі [317, 316] Гласом та Моселом було запропоновано підхід різкого обрізання кутових моментів. Еберхард та ін. запропонували звязок що дає інформацію про злиття у реакціях α -захоплення ядрами ^{40}Ca , ^{44}Ca . Вони порівняли обчислені перерізи з експериментальними даними при обраних енергіях [313]. Недавно, більш точний шлях до вивчення проблеми

α -захоплення було запропоновано у роботі [75]. У цьому розділі ми подальш розвиваємо метод надвисокої точності (який раніше був названий *Методом багаторазових внутрішніх відбиттів, МБВ*) для опису злиття у захопленні α -частинок ядрами. За допомогою цього методу ми знаходимо нові параметри для α -ядерного потенціалу та ймовірності злиття (див. Рис. 6, Табл. 2 та В.3 у роботі [75]). Похибка у описі експериментальних даних зменшується у 41.72 разів для $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ та 34.06 разів для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з попередньо існуючими результатами (див. Рис. 5 та Табл. 1 у роботі [75]). На сьогоднішній день, такий підхід є найбільш точним та вдалим у описі існуючих експериментальних даних для α -захоплення. На основі нашої нової формули про ймовірності злиття (див. (21)–(27) та Рис. 8–9 у роботі [75]), ми даємо власні передбачення перерізів для α -захоплення ядрами ${}^{46}\text{Ca}$ для можливих перевірок у майбутніх експериментальних дослідженнях¹.

У рамках існуючих сучасних моделей α -захоплення вважається, що повне злиття α -частинки з ядром повністю відбувається після тунелювання (після чого аналіз завершується). Перерізи злиття визначаються на основі коефіцієнтів проникності. Залежність проникності від енергії налітаючої α -частинки є монотонною (без будь-яких мінімумів або максимумів) для кожного фіксованого орбітального моменту (див. Рис. 2–3 у роботі [75] для захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$). Це пояснює відсутність піків у обчислених перерізах α -захоплення, та це підтверджується експериментальною інформацією (ми маємо перерізи для захоплення α -частинок ядрами ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{44}\text{Ca}$ [313], ${}^{59}\text{Co}$ [314], ${}^{208}\text{Pb}$ [315], та ${}^{209}\text{Bi}$ [315]). Саме тому наразі існує та широко застосовується припущення, що не існує ніякого стану можливого утворення складеної ядер-

¹Таке ядро ${}^{46}\text{Ca}$ наразі є об'єктом інтенсивних досліджень, що пов'язані з відкриттям нових нейтронних магічних чисел $N = 16$ та $N = 26$ (див. огляд [320] по цій темі, тут стандартна теорія дає нам лише сім експериментально відомих нейтронних чисел, а саме це — 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126). У зв'язку з цим, було б цікавим запропонувати експериментаторам дослідити процес злиття при захопленні α -частинки цим ядром, на основі наших передбачень.

ної системи, в якому нуклони α -частинки та ядра-мішені формують найбільш стабільну зв'язану повну ядерну систему при деяких значеннях енергії.

Насьогодні, широко використовуються два підходи у визначенні коефіцієнтів проникності: (1) наближення ВКБ (Wentzel-Kramers-Brillouin approximation, WKB) та (2) заміна оригінального бар'єру на потенціал у вигляді перевернутої параболи, який має аналітичні розв'язки для хвильової функції [див. підхід Хілла-Уілера (Hill-Wheeler approach) [318] та формулу Вонга (Wong's formula) [319] при розрахунках перерізів]. Такі підходи покладено у основу методу зв'язаних каналів, який зараз широко використовується у сучасних розрахунках (та він вважається як найбільш точний серед усіх відомих квантових підходів; наприклад, таку тверду точку зору має редакція відомого профільного журналу Phys. Rev. C, та часто навіть не розглядає інших методів) при вивченні злиття [275, 326]. Але відзначимо, що область застосування обох підходів визначена тільки у безпосередній близькості до максимуму бар'єра. Обидва підходи повністю ігнорують форму внутрішньої ями (у ядрі) та зовнішнього хвоста потенціалу. Наближення ВКБ не може бути застосованим для великої області підбар'єрних енергій, та потенціал перевернутого осцилятора, що використовується у другому підході, суцільно відрізняється від оригінального бар'єру. Відповідно до основних положень квантової механіки, метод ВКБ не дає визначення коефіцієнта відбиття від бар'єра, та тому ми не можемо застосувати тести квантової механіки, щоб перевірити отримані розрахунки. Як наслідок, суттєва частина підбар'єрних та надбар'єрних областей енергії для оригінального бар'єру виглядає як чорний ящик, та квантові процеси при таких енергіях не можуть бути досліджені коректно за допомогою двох вказаних вище методів. Як наслідок цього факту, отримані значення для коефіцієнтів проникності не можуть бути відтестовані.

На основі такої мотивації, ми апроксимуємо оригінальний потенціаль-

ний бар'єр через скінчене число прямокутних сходинок, для яких існує точний аналітичний розв'язок для хвильової функції при довільній енергії [75, 74]. Виявляється, що наближення цього підходу можна зменшити до нуля за рахунок підвищення числа сходинок, та всі розв'язки для хвильової функції є збіжними та повністю задовольняють всім відомим тестам квантової механіки (з точністю до перших 15 цифр). Ми вивчаємо квантові процеси як для енергій глибоко під бар'єром, так і для енергій суттєво вище максимуму бар'єра (що є проблемою для двох підходів, що вказано було вище). Такий підхід вже успішно застосовується для розв'язку різних задач квантової фізики [79] з бар'єрами специфічної форми (відзначимо, що два наближених підходи, що було вказано вище, не можуть навіть бути застосовані для визначення коефіцієнта проникності для таких бар'єрів). Він дозволяє вивчати вплив форми зовнішньої частини потенціалу за межами області тунелювання на значення отриманого коефіцієнта проникності. Аналіз у роботах [75, 74] показує, що такий вплив виявляється не малим, та навіть у деяких випадках він може змінити коефіцієнт проникності більш ніж на 100 відсотків². У рамках такого підходу, ми знаходимо, що коефіцієнт проникності залежить від деяких нових параметрів. Як виявляється, при описі квантових процесів вони можуть бути дійсно більш важливими, ніж навіть деформації ядер. Однак, такі параметри повністю зникають у двох наближених підходах, вказаних вище.

Відповідно до положень квантової механіки, розгляд еволюції системи до моменту проходження α -частинки через бар'єр не є повним (це було проаналізовано в деталях у роботах [75, 74]). Збереження потоку від хвильової функції вимагає врахувати подальшу еволюцію такої системи. Дослідження у цьому Розділі починається з аналізу такої еволюції складеної

²На Рис. 1 у роботі [75] (та на Рис. 1 у роботі [74]) було показано, що відбуваються варіації коефіцієнта проникності більш ніж до 4 разів у залежності від просторової локалізації захоплення (це внутрішня межа потенціальної області з бар'єром, відносно якої ми обчислюємо коефіцієнт проникності) при однаковій енергії 2 МеВ налітаючої α -частинки для захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$.

системи на тій стадії. Виявляється, що такий саме розгляд веде до появи осциляцій цієї системи та її подальшого розпаду (та він дозволяє включити механізми злиття у формалізм). У рамках об'єднаного формалізму, ми поєднуємо опис тунелювання та опис внутрішніх осциляцій у внутрішній ядерній області вперше. Відзначимо ідею, запропоновану Гамовим для опису α -розпаду [341], де ці два процеси було використано відокремлено (та на сьогодні не існує підходу, що поєднує ці два процеси) для визначення періоду напіврозпаду. Насьогодні, періоди напіврозпаду α -розпаду ядер визначаються на такій основі з уключенням спектроскопічних факторів (наприклад, див. роботи [119, 282, 279, 280, 215, 217, 126, 289, 213, 292, 214, 342, 343]).

Інша перевага нашого методу, викладеного у цьому Розділі, — це поява максимально стабільних станів складеного ядра при деяких певних значеннях енергії налітаючої α -частинки (при монотонних коефіцієнтах проникності бар'єра). Існування таких максимально стабільних станів [ми назовемо їх квазізв'язаними (quasi-bound)] характеризує квантову природу розсіяння ядер, однак, воно не може бути пояснено за допомогою традиційних методів (наприклад, див. методи, що основані на роботі [313] для порівняння). У зв'язку з цим виникають нові питання. А саме, наскільки осциляції є важливими насправді, наскільки швидко відбувається злиття, у якій просторовій області ядра воно є домінуючим? З метою з'ясувати такі питання, у цьому Розділі викладено удосконалення метода, попередньо представленого у роботі [75], через уключення нового формалізму еволюції складеного ядра (після тунелювання) з можливістю опису злиттям.

11.2. Метод

Найбільш ясне розуміння, саме чому виникають квазізв'язані стани складеної ядерної системи при монотонних проникностях бар'єра, можна отримати

з найпростішої картини розсіяння α -частинки на ядрі у сферично симетричному розгляді. Як виявляється, найпростіша форма потенціалу та відповідний загальний розв'язок хвильової функції (з точністю до її нормування), що задовольняють опису такого розсіяння, мають наступний вигляд:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 \quad (\text{область 1}), \\ 0 & \text{при } r_1 \leq r \leq r_{\max} \quad (\text{область 2}), \end{cases}$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \chi(r) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r} & (\text{область 1}), \\ e^{-ik_2 r} + A_R e^{ik_2 r} & (\text{область 2}), \end{cases} \quad (11.1)$$

де $V_1 < 0$, $r_{\min} \geq 0$, α_1 , β_1 та A_R — невідомі амплітуди, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферичні гармоніки та $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_j)}$ — комплексні хвильові числа ($j = 1, 2$, $V_2 = 0$). Ми фіксуємо нормування хвильової функції таким чином, щоб модуль амплітуди хвилі $e^{-ik_2 r}$, що падає на межу потенціалу, дорівнював одиниці.

Відповідно до логіки методу Багаторазових Внутрішніх Відбиттів (БВВ), розсіяння частинки на потенціалі відбувається послідовно по етапам поступового проходження хвильового пакета відносно до кожної межі. На першому етапі ми розглядуємо хвилю $e^{-ik_2 r}$ у області 2, яка падає на межу у точці r_1 . Така хвиля перетворюється на нову хвилю $\beta_1^{(1)} e^{-ik_1 r}$, що прямує до центру у області 1, та нову хвилю $\alpha_2^{(1)} e^{ik_2 r}$, що описує відбиття відносно межі та поширюється у області 2. Ми маємо наступну хвильову функцію для опису такого процесу:

$$\chi^{(1)}(r) = \begin{cases} \beta_1^{(1)} e^{-ik_1 r} & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1, \\ e^{-ik_2 r} + \alpha_2^{(1)} e^{ik_2 r} & \text{при } r_1 \leq r \leq r_{\max}. \end{cases} \quad (11.2)$$

Хвиля, що пройшла через межу, поширюється у внутрішній області ядра. Таким чином, вона описує формування складеного ядра та його подальшу еволюцію. Відбита хвиля описує відбиття частинки кулонівським потенціалом ядра. Таким чином, у рамках цієї надмірно простої схеми, ми розділили розсіяння частинки ядром на два принципово різні фізичні процеси, (1) фор-

мування складеного ядра та його можливий розпад (резонансне розсіяння) та (2) потенціальне розсіяння без формування складеного ядра.

На другому етапі ми розглянемо хвилю $\beta_1^{(1)} e^{-ik_1 r}$ у області 1, що була сформована на попередньому етапі. Ця хвиля поширюється у напрямку до центра ядра та вона перетворюється у нову хвилю $\alpha_1^{(2)} e^{ik_1 r}$. На третьому етапі, ми розглянемо хвилю $\alpha_1^{(2)} e^{ik_1 r}$, що падає на межу у точці r_1 та перетворюється у нову хвилю у області 2 (що описує проходження через межу), що поширюється назовні, та іншу нову хвилю у області 1 (що описує відбиття від межі), що поширюється у напрямку до центра знов. Такі процеси можна описати за допомогою наступних хвильових функцій:

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(r) &= \beta_1^{(1)} e^{-ik_1 r} + \alpha_1^{(2)} e^{ik_1 r} \quad \text{при } r_{\min} < r \leq r_1; \\ \chi^{(3)}(r) &= \begin{cases} \alpha_1^{(2)} e^{ik_1 r} + \beta_1^{(3)} e^{-ik_1 r} & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1, \\ \alpha_2^{(3)} e^{ik_2 r} & \text{при } r_1 \leq r \leq r_{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Тут, $\alpha_j^{(i)}$ та $\beta_j^{(i)}$ — невідомі амплітуди (ми додамо верхній індекс i для позначення номеру етапу, та нижній індекс j для позначення номеру області). Ми знаходимо наступні рекурентні співвідношення з умов неперервності повної хвильової функції та її похідної:

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(1)} &= R_1^-, & \beta_1^{(1)} &= T_1^-, & \alpha_1^{(2)} &= R_0 \beta_1^{(1)}, \\ \alpha_2^{(3)} &= \alpha_1^{(2)} T_1^+, & \beta_1^{(3)} &= \alpha_1^{(2)} R_1^+, \\ R_1^- &= \frac{k - k_1}{k + k_1} e^{-2ikr_1}, & T_1^- &= \frac{2k}{k + k_1} e^{-i(k-k_1)r_1}, & R_0 &= -e^{-2ik_1 r_{\min}}, \\ T_1^+ &= \frac{2k_1}{k + k_1} e^{i(k_1-k)r_1}, & R_1^+ &= \frac{k_1 - k}{k + k_1} e^{2ik_1 r_1}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Тут, ми ввели нові амплітуди T_1^- та R_1^+ , що описують проходження та відбиття відносно межі (нижній індекс “1” або “0” вказує на номер межі, верхній знак “-” або “+” вказує на негативний або позитивний напрямок поширення падаючої хвилі у визначенні амплітуд, відповідно). Кожний наступний етап при такому розгляді поширення хвиль виявляється подібним до одного з перших трьох етапів, описаних вище. За допомогою аналізу, приведеного вище,

ми знаходимо рекурентні співвідношення для визначення нових невідомих амплітуд, та обчислюємо наступні суми по всім хвилям:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1} \beta_1^{(i)} &= T_1^- \left(1 + R_0 R_1^+ + (R_0 R_1^+)^2 + \dots \right) = T_1^- \left(1 + \sum_{i=1} (R_0 R_1^+)^i \right) = A_{\text{osc}} T_1^-, \\
\sum_{i=1} \alpha_1^{(i)} &= R_0 \sum_{i=1} \beta_1^{(i)}, \\
\sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} &= T_1^- R_0 \left(1 + R_0 R_1^+ + (R_0 R_1^+)^2 + \dots \right) T_1^+ = \\
&= T_1^- R_0 \left(1 + \sum_{i=1} (R_0 R_1^+)^i \right) T_1^+ = A_{\text{osc}} T_1^- R_0 T_1^+, \\
A_{\text{osc}} &= \left(1 + \sum_{i=1} (R_0 R_1^+)^i \right) = \frac{1}{1 - R_0 R_1^+}.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Множник A_{osc} описує осциляції хвиль у внутрішній просторовій області 1 (тому, ми назвемо його *амплітудою осциляцій*). При $R_0 = -1$ ми отримаємо

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1} \beta_1^{(i)} &= - \sum_{i=1} \alpha_1^{(i)} = A_{\text{osc}} \frac{2k e^{-i(k-k_1)r_1}}{k + k_1}, \\
\sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} &= -A_{\text{osc}} \frac{4kk_1 e^{2i(k_1-k)r_1}}{(k + k_1)^2}, \\
A_{\text{osc}} &= \frac{k + k_1}{(k + k_1) + (k_1 - k) e^{i2k_1 r_1}}.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Відзначимо, що повний потік по всім хвилям, що виходять з просторової області 1 назовні, дорівнює потоку від падаючої хвилі (k та k_1 є дійсними):

$$\left| \alpha_2^{(1)} + \sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} \right|^2 = 1. \tag{11.7}$$

Знайдемо інтеграл від квадрата модуля хвильової функції по просторовій області 1 (при $R_0 = -1$):

$$\begin{aligned}
P_{\text{cn}} &= \int_0^{r_1} |\varphi(r)|^2 dr = P_{\text{osc}} T_{\text{bar}} P_{\text{loc}}, \quad P_{\text{osc}} = |A_{\text{osc}}|^2, \\
T_{\text{bar}} &\equiv \frac{k_1}{k_2} |T_1^-|^2, \quad P_{\text{loc}} = 2 \frac{k_2}{k_1} \left(r_1 - \frac{\sin(2k_1 r_1)}{2k_1} \right).
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Цей інтеграл можна інтерпрувати, як ймовірність існування складеного ядра, що формується (у просторовій області зі зовньошньою межею у точці r_1) під час розсіяння. З Рис. 11.1 можна бачити, що така ймовірність залежить від енергії α -частинки та вона має максимуми та мінімуми (при однаковому фіксованому нормуванні падаючої хвилі). Це виникає саме тому, що P_{cn} є точним аналітичним множенням коефіцієнтів проникності T_{bar} , осциляцій P_{osc} та одного нового додаткового множника P_{loc} . Таким чином, ми отримали узагальнення ідеї Гамова у визначенні періоду напіврозпаду ядер, що базується на основі проникності бар'єра та осциляцій у внутрішній просторовій області. Але, тут ми отримуємо також новий множник P_{loc} , який характеризує просторовий розподіл α -частинки у внутрішній просторовій області ядра (для кожної однієї осциляції), що визначається через хвильову функцію. Ми назвали його *коефіцієнтом локалізації*.

Більш того, існує інтерференція між хвилею, відбитою від межі r_1 на першому етапі (що описує потенціальне розсіяння без формування складеного ядра), та сумою усіх інших хвиль, що поширюються у області 2 назовні (що утворюються під час формування складеного ядра та його подальший розпад). Ми маємо ($R_0 = -1$):

$$\begin{aligned}
 P_{\text{interf}} &\equiv 2 |\alpha_2^{(1)*} \cdot \sum_{i=2} \alpha_2^{(i)}| = \\
 &= \frac{4\sqrt{2} k k_1 |k - k_1|}{(k + k_1)^2} \frac{1}{\sqrt{k^2(1 - \cos(2k_1 r_1)) + k_1^2(1 + \cos(2k_1 r_1))}}.
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

Наприклад, на Рис. 11.1 показано обчислені нами коефіцієнти для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$.

Повне злиття можна описати за допомогою уведення наступної умови: *потік від кожної хвилі, що поширюється у внутрішній ядерній області, повинен бути подавлений до нуля*. Математично таку умову можна реалізувати як

$$R_0 \rightarrow 0, \tag{11.10}$$

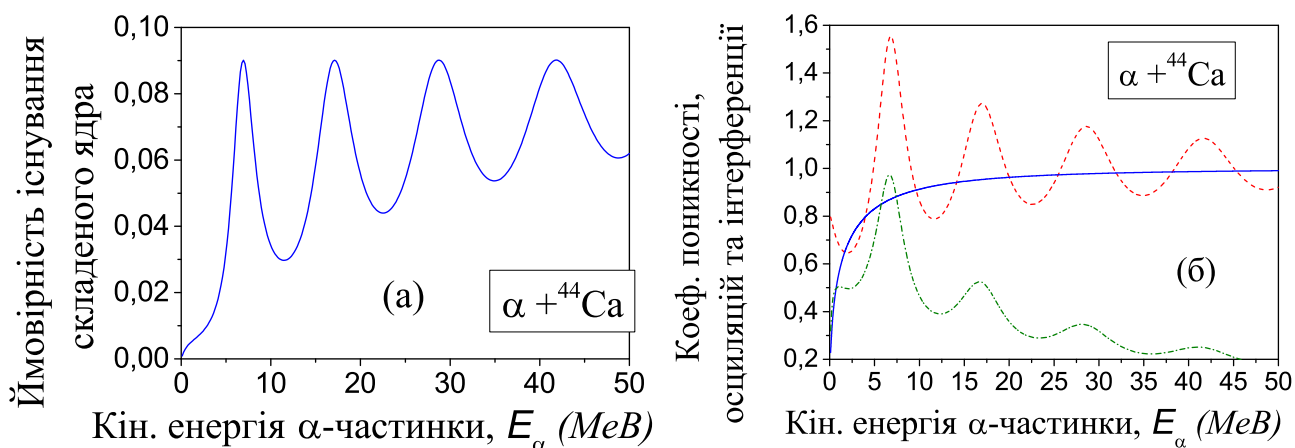


Рис.11.1 Ймовірність існування складеного ядра P_{cn} (а), визначена за формулою (11.8), коефіцієнт проникності відносно межі T_{bar} (б, синя суцільна лінія), визначений за формулою (11.8), модуль амплітуди осциляцій A_{osc} (б, червона штрихова лінія), визначений за формулою (11.6), доданок інтерференції P_{interf} (б, зелена штрих-пунктирна лінія), визначений за формулою (11.9), у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ (параметри V_1 та r_1 визначаються, як глибина ями та координата максимуму реалістичного радіального бар'єра для обраної параметризації [112] для цієї реакції: ми отримаємо $V_1 = -23.73$ MeV та $r_1 = 8.935$ фм; для усіх представлених результатів виконуються тести з точністю до перших 14 цифер). На рисунках ясно видна присутність максимумів ймовірності існування складеного ядра, амплітуди осциляцій та інтерференційного доданку (значення енергії для максимумів цих функцій розташовані дуже близько, але вони відрізняються; ці функції принципово відрізняються близ нульового значення енергії), тоді як коефіцієнт проникності є гладкою монотонною функцією. Без уключення функції, що описує внутрішні процеси, переріз злиття, який визначається тільки на основі коефіцієнтів проникності бар'єра (наприклад, як це реалізовано у підході [313]), не може дати інформації про такі максимально стабільні стани складеного ядра. Але множник P_{cn} має такі самі максимуми, де існування осциляцій у його поведінці пояснюється головним чином через наявність амплітуди осциляцій A_{osc} .

та ми знаходимо

$$\sum_{i=1} \beta_1^{(i)} = T_1^-, \quad \sum_{i=1} \alpha_1^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} = 0, \quad A_{\text{osc}} = 1, \quad P_{\text{cn}} = \frac{k_2 r_1}{k_1} T_{\text{bar}}. \quad (11.11)$$

Відповідно до отриманих амплітуд, таке злиття можна вважати як *швидке* та *повне*. Воно виникає після того, як хвилі протунелювали через бар'єр та не виникає подальших осциляцій таких хвиль у внутрішній області ядра. Якщо ми хочемо описати утворення складеного ядра без швидкого повного злиття, то нам потрібно зменшити потоки у внутрішній області лише частково, тобто необхідно зробити умову (11.10) менш жорсткою. Таким чином, ми ввели новий коефіцієнт p_1 у області 1, та перевизначили амплітуду R_0 як

$$R_0^{(\text{new})} \equiv R_0^{(\text{old})} \cdot (1 - p_1), \quad 0 \leq p_1 \leq 1. \quad (11.12)$$

При $p_1 = 1$ формула (11.12) перетворюється у (11.10) та ми отримуємо швидке повне злиття, тоді як при $p_1 = 0$ ми маємо складене ядро без злиття.

Тепер ми узагальнемо ідею, що описана вище, для опису реалістичного потенціалу α -захоплення з бар'єром складної форми, який можна достатньо вдало апроксимувати за допомогою скінченного числа N прямокутних сходінок у роботі [75] (див. там логіку такого підходу, тести, подробиці, цитування на інші роботи по цій темі). З метою підсилення попереднього дослідження [75], у цьому розділі ми розглянемо випадок, коли захоплення α -частинки ядром відбувається у області з номером N_{cap} після її тунелювання через бар'єр з правої частини потенціалу, та можливе наступне поширення усіх хвиль вздовж потенціалу, що слідує з умови збереження повного потоку, який визначається відносно повної хвильової функції. Загальний розв'язок радіальної хвильової функції (з точністю до її нормування) для енергій вище бар'єра має вигляд (6)–(7) у роботі [75]. Ми зафіксували нормування хвильової функції таким чином, щоб модуль від амплітуди падаючої хвилі $e^{-ik_N r}$ (у області з номером N) дорівнював одиниці. Ми будемо шукати розв'язок невідомих

амплітуд хвильової функції за допомогою метода багаторазових внутрішніх відбиттів. Кожний етап у такому розгляді поширення пакету виявляється подібним до одного з перших незалежних $2N - 1$ етапів. Амплітуди $T_1^\pm \dots T_{N-1}^\pm$ та $R_1^\pm \dots R_{N-1}^\pm$ можна записати як

$$\begin{aligned} T_j^+ &= \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, & T_j^- &= \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \\ R_j^+ &= \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j r_j}, & R_j^- &= \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} r_j}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Тепер, ми знайдемо хвилю, що поширюється вліво у області з номером $j - 1$, що формується після проходження через межу у точці r_{j-1} усіх можливих падаючих хвиль, що були сформовані у наслідок усіх можливих відбиттів та проходжень будь-яких хвиль у правій частині потенціалу від цієї межі. Амплітуда такої хвилі може бути визначена як сума амплітуд всіх хвиль, що падають на межу у точці r_{j-1} , з домноженням на коефіцієнт T_{j-1}^- . Відзначимо, що будь-яка хвиля, що падає на межу у точці r_{j-1} , може далі відбитися від цієї межі, далі може відбитися від наступної межі у точці r_j та буде падати на межу у точці r_{j-1} знов. Можна записати

$$\tilde{T}_{j-1}^- = \tilde{T}_j^- T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^- T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \quad (11.14)$$

Тут, ми використовуємо сумарну амплітуду відбиття \tilde{R}_j^+ (яка враховує вихід хвиль через межу у точці r_j , які після подальших відбиттів та проходжень повертаються знов у область з номером j):

$$\tilde{R}_{j-1}^+ = R_{j-1}^+ + T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-)^m \right) = R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - \tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-}. \quad (11.15)$$

Ми обираємо $\tilde{R}_{N-1}^+ = R_{N-1}^+$ та $\tilde{T}_{N-1}^- = T_{N-1}^-$ та відповідно обчислюємо усі амплітуди $\tilde{R}_{N-2}^+ \dots \tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^+$ та $\tilde{T}_{N-2}^- \dots \tilde{T}_{N_{\text{cap}}}^-$, використовуючи рекурентні співвідношення, знайдені вище. Ми визначаємо сумарну амплітуду A_T проходження через бар'єр на основі врахування всіх хвиль, що проходять через область потенціалу з бар'єром від r_{cap} до r_{N-1} : $A_{T,\text{bar}} = \tilde{T}_{N_{\text{cap}}}^-$.

З метою виконати сумування усіх хвиль, що були сформовані у наслідок відбиття від межі у точці r_{j+1} та поширюються направо, ми обчислюємо сумарну амплітуду відбиття як

$$\tilde{R}_{j+1}^- = R_{j+1}^- + T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}. \quad (11.16)$$

На такій основі, ми визначаємо амплітуду відбиття від області потенціалу з бар'єром від r_{cap} до r_{N-1} як $A_{R,\text{bar}} = \tilde{R}_{N-1}^-$, де $\tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^- = R_{N_{\text{cap}}}^-$. Ми знаходимо сумарну амплітуду $A_{R,\text{ext}}$ за всіма хвилями, які відбиваються від зовнішньої області бар'єра (починаючи з зовнішньої точки повороту $r_{\text{tp,ext}}$ до r_{N-1}) та поширюються назовні, як $A_{R,\text{ext}} = \tilde{R}_{N-1}^-$ де $\tilde{R}_{N_{\text{tp,ext}}}^- = R_{N_{\text{tp,ext}}}^-$. Більш того, ми знаходимо іншу сумарну амплітуду $A_{R,\text{tun}}$ за всіма хвилями, які формуються при відбитті відносно лише внутрішньої частини потенціалу у межах від r_{cap} до зовнішньої точки повороту $r_{\text{tp,ext}}$ [тобто вони поширюються через зовнішню область бар'єра без будь-яких відбиттів та тунелювання під бар'єром, можуть досягати межі у точці r_{cap} та потім відбиватися від неї назад] як $A_{R,\text{tun}} = A_{R,\text{bar}} - A_{R,\text{ps}}$. Ми оцінюємо амплітуду осциляцій A_{osc} у області захоплення з номером N_{cap} як $A_{\text{osc}}(N_{\text{cap}}) = (1 - \tilde{R}_{N_{\text{cap}}-1}^- \tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^+)^{-1}$.

Відповідно до методу БВВ, ми визначаємо коефіцієнти проникності T_{bar} та повного відбиття R_{bar} відносно бар'єра (тобто просторової області від r_{cap} до r_{N-1}), коефіцієнт відбиття R_{ext} зовнішньої частини бар'єру (тобто області від $r_{\text{tp,ext}}$ до r_{N-1}), коефіцієнт відбиття R_{tun} бар'єру без зовнішньої частини (тобто області від r_{cap} до $r_{\text{tp,ext}}$) як

$$T_{\text{bar}} \equiv \frac{k_{\text{cap}}}{k_N} |A_{T,\text{bar}}|^2, \quad R_{\text{bar}} \equiv |A_{R,\text{bar}}|^2, \quad R_{\text{ext}} \equiv |A_{R,\text{ext}}|^2, \quad R_{\text{tun}} \equiv |A_{R,\text{tun}}|^2. \quad (11.17)$$

Ми перевіряємо властивість $T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} = 1$, яка вказує на те, чи дає метод БВВ коректне рішення для хвильової функції. Ми обчислюємо суми амплітуд

$\alpha_j^{(i)}$ та $\beta_j^{(i)}$ для довільної області з номером j :

$$\begin{aligned}\beta_j &\equiv \sum_{i=1} \beta_j^{(i)} = \tilde{T}_j^- \left(1 + \sum_{i=1} (\tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_j^+)^i \right) = \frac{\tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_j^+}, \\ \alpha_j &\equiv \sum_{i=1} \alpha_j^{(i)} = \tilde{R}_{j-1} \sum_{i=1} \beta_j^{(i)} = \frac{\tilde{R}_{j-1} \tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_j^+}.\end{aligned}\quad (11.18)$$

Ми визначимо ймовірність існування складеного ядра через інтеграл (??) по просторовій області, що обмежена двома внутрішніми точками повороту $r_{\text{int},1}$ та $r_{\text{int},2}$ (де зовнішня точка повороту визначається як точка повороту від бар'єра для підбар'єрних енергій або координата максимуму бар'єра для надбар'єрних енергій):

$$P_{\text{cn}} \equiv \int_{r_{\text{int},1}}^{r_{\text{int},2}} |R(r)|^2 r^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}} \left\{ (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) \Delta r + \frac{\alpha_j \beta_j^*}{2ik_j} e^{2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} - \frac{\alpha_j^* \beta_j}{2ik_j} e^{-2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} \right\}.\quad (11.19)$$

Існує традиційне визначення перерізу σ злиття у реакції α -захоплення, що базується на розрахунках коефіцієнта проникності $T_{\text{bar},l}$ та ймовірностей злиття P_l . Вважається, що процес злиття починається та повністю завершується відразу після тунелювання α -частинки через бар'єр (наприклад, див. роботу [313]):

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l(E), \quad \sigma_l(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) T_{\text{bar},l}(E) P_l, \quad (11.20)$$

де σ_l — парціальний переріз при l , E — енергія відносного руху α -частинки відносно ядра. З метою досліджувати складене ядро, введемо нове визначення для парціального перерізу злиття через ймовірність існування складеного ядра (11.19) як

$$\sigma_l = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) f_l(E) P_{\text{cn}}(E), \quad f(E) = \frac{k_{\text{cap}}}{k_N |r_{\text{cap}} - r_{\text{tp},\text{in},1}|}.\quad (11.21)$$

Для вивчення складеного ядра, що існує деякий період, ми застосуємо ідею

(11.12) коефіцієнтів злиття у внутрішній просторовій області ядра:

$$T_j^{\pm,(\text{new})} \equiv T_j^{\pm,(\text{old})} \cdot (1 - p_j), \quad R_j^{\pm,(\text{new})} \equiv R_j^{\pm,(\text{old})} \cdot (1 - p_j), \quad 0 \leq p_j \leq 1. \quad (11.22)$$

Можна бачити, що за допомогою найпростішого потенціалу (11.1) для швидкого повного злиття ($p_j = 1$) формула (11.22) перетворюється на вираз (11.20). Подібний результат отримується для потенціалу з бар'єром довільної складної форми.

11.3. Аналіз захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca

Для аналізу ми оберемо ядро ^{44}Ca . Як було показано у роботі [75], коефіцієнт проникності суттєво залежить (для однакової фіксованої енергії налітаючої α -частинки) від внутрішньої межі (у точці r_{cap}) області потенціального бар'єра у розрахунках. По цій причині, нам необхідно накласти ще одну додаткову умову на визначення коефіцієнта проникності бар'єра. У роботі [75] нами було запропоновано нову умову, що базується на аналізі мінімальних змін обчисленого коефіцієнта проникності бар'єра при малих відхиленнях r_{cap} . Така умова потребує того, що мінімум внутрішньої потенціальної ями повинен бути розташованим саме у цій точці (ми отримуємо $r_{\text{cap}} = 0.44$ фм при $l = 0$ для цього ядра, у тій роботі ми використали параметризацію, узятую з роботи [112], а параметри розрахунків — 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм). Таким чином, ми будемо використовувати таке визначення r_{cap} у подальших розрахунках у цьому Розділі.

На Рис. 11.2 (а) ми показуємо коефіцієнти проникності, відбиття та модуль амплітуди осциляцій у залежності від енергії налітаючої α -частинки при $l = 0$. Можна бачити, що модуль амплітуди осциляцій має різкі максимуми, тоді як коефіцієнти проникності та відбиття є монотонними функціями. Такий результат — це перша вказівка на існування максимально стабільних

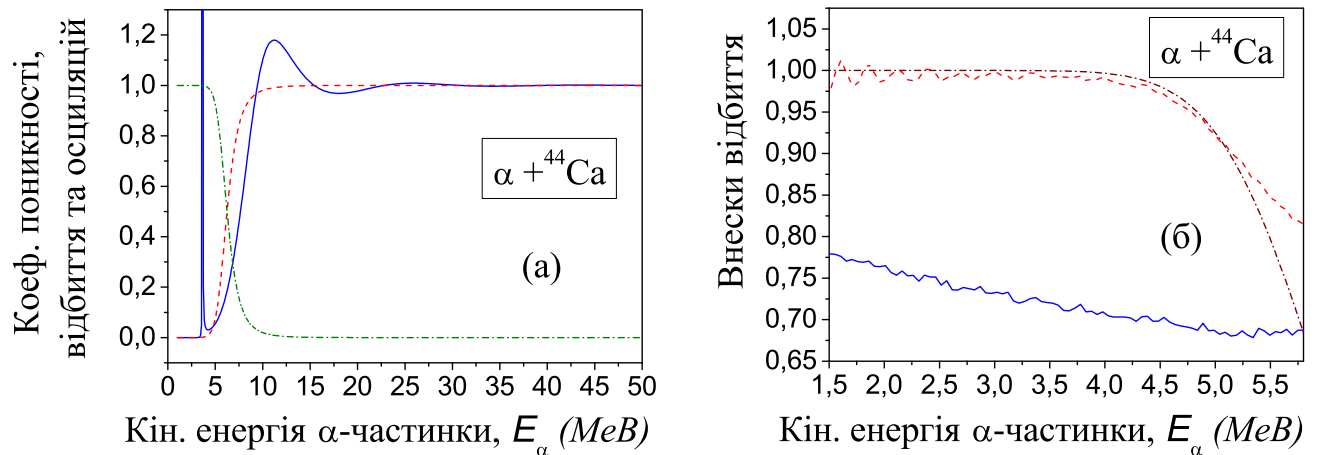


Рис.11.2 Панель (а): Коефіцієнти проникності T_{bar} (штрихова червона лінія) та відбиття R_{bar} (штрих-пунктирна зелена лінія) відносно бар'єра, визначені за формулами (11.17), модуль амплітуди осциляцій $|A_{\text{osc}}|$ (суцільна синя лінія) у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ (тест $T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} = 1$ виконується з точністю до перших 14 цифр для всіх значень енергії для всіх результатів, що представлено у цьому Розділі). Можна бачити максимуми (перший максимум існує у підбар'єрній області енергій) амплітуди осциляцій. Панель (б): Коефіцієнти відбиття R_{ext} та R_{tun} , що визначаються за формулами (11.17), у залежності від енергії E_α налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$. Тут, суцільна синя лінія — розрахунки для коефіцієнта відбиття R_{ext} , штрихова червона лінія — розрахунки для коефіцієнта відбиття R_{tun} , та штрих-пунктирна коричнева лінія — розрахунки для коефіцієнта повного відбиття R_{bar} . Можна бачити, що, до достатньо гарної точності, повне відбиття визначається хвилями, що поширюються через стадію формування складеного ядра та його подальший розпад (тобто при R_{tun}). Однак, потенціальне розсіяння не є малим та воно достатньо близько до повного відбиття у всій області енергій. Цей результат протирічить широко поширеній наразі точці зору у тому, що відбиття (у ядерних задачах захоплення та розпаду) формується тільки за рахунок процесів тунелювання в області бар'єра. Можна запропонувати формулу $P_{\text{ref,ps}} \approx 0.75 \cdot P_{\text{ref}}$ при $1.5 \text{ MeV} < E_\alpha < 5 \text{ MeV}$ для більш наближених, але швидких оцінок.

станів складеного ядра, у яких ядро існує протягом деякого часу при певних значеннях енергії налітаючої α -частинки (де існує один рівень нижче висоти бар'єра). Відзначимо, що коефіцієнт проникності не дає ніякої інформації про такі стани. Для зручності, ми додаємо розрахунки коефіцієнтів відбиття R_{ext} та R_{tun} на Рис. 11.2 (б).

На Рис. 11.3 (а) представлено розрахунки ймовірності P_{cn} існування складеного ядра. Можна бачити наявність ясних максимумів у залежності функції P_{cn} від енергії (перший максимум функції P_{cn} існує у підбар'єрній області енергій). Такі максимуми можна інтерпрувати як вказівку на існування найбільш стабільних станів для сформованого складеного ядра (яке знаходиться у таких станах продовж найбільш тривалого часу). Відзначимо, що ніяких максимумів у залежності проникності T_{bar} від енергії не існує у цієї області енергій (див. Рис. 11.2). Такі залежності покладено у основу традиційних розрахунків перерізів захоплення α -частинки ядром (наприклад, див. (1) та (2) у роботі [313]). Ми назвемо такі стани складеного ядра (та відповідні значення енергії) як *квазізв'язані* (*quasi-bound states*). Об'єднаний опис наявності таких станів складеного ядра, передбачення відповідних значень енергії та монотонні коефіцієнти проникності — все це є перевагами методу Багаторазових внутрішніх відбиттів. Найбільш ясне зрозуміння, саме чому існують такі квазізв'язані стани складеного ядра при монотонних проникностях бар'єра, можна отримати вже з найпростішої картини α -захоплення, яка була досліджена вище. А саме, тут можна бачити, що модуль $|A_{\text{osc}}|$ у формулі (11.6) [та відповідні суми амплітуд у формулах (11.6)] має ясні максимуми, які навіть можуть бути більшими, ніж одиниця. Падаюча хвиля у зовнішній області нормована на одиницю, та всі ці тести підтверджують працездатність формалізму та розрахунків з надвисокою точністю. Відзначимо, що інформацію про квазізв'язані стани для енергій вище висоти бар'єра не можна отримати з аналізу інтерференційного доданку (існує лише один ясний ма-

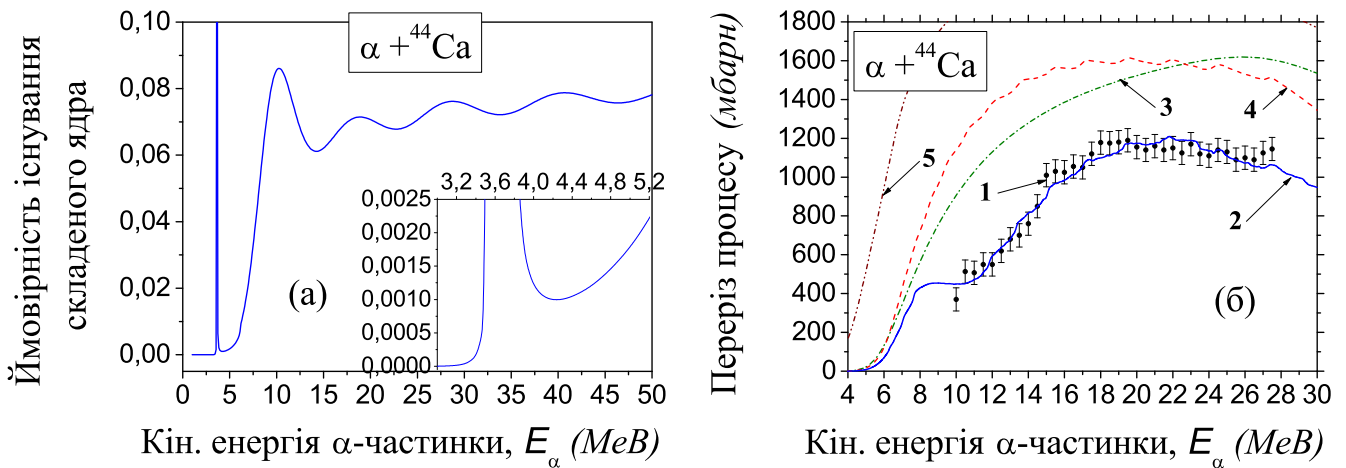


Рис.11.3 Панель (а): Ймовірність $P_{\text{сн}}$ існування складеного ядра, що визначається за формулами (11.19), у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$. Функція $P_{\text{сн}}$ має осциляторну поведінку, з наявністю 5 ясних максимумів (тут перший максимум знаходиться у підбар'єрній області енергій). Для надбар'єрних енергій, вище ніж значення енергії такого першого квазізв'язаного стану, існує лише один мінімум (при $E_{\text{мін}} = 4.24$ MeV, $P_{\text{сн}} = 0.000986$), який вказує на те, що ядро стає більш прозорим до проникнення α -частинки. Для енергій близ до нуля, ймовірність формування складеного ядра зменшується швидко до нуля. Відзначимо, що коефіцієнти проникності та відбиття $T_{\text{бар}}$ та $R_{\text{бар}}$ не мають піків близ до цього значення енергії (див. Рис. 11.2). Панель (б): Повний переріз злиття з уключенням ймовірностей злиття у розрахунки у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ (параметри розрахунків: 1000 інтервалів при $r_{\text{мак}} = 70$ фм). Тут, дані, позначені числом 1, — експериментальні дані, взяті з роботи [313], суцільна синя лінія 2 — переріз, визначений за формулами (11.21) та (11.22) з уключенням ймовірностей злиття у розрахунки [їх значення представлено у Таблиці 11.3, точність згоди з експериментальними даними — $\varepsilon_1 = 0.033308$, ε_1 визначено у роботі [75], штрих-пунктирна зелена лінія 3 — переріз у старому визначенні (11.20), де коефіцієнти проникності знаходяться за допомогою метода БВВ, штрихова червона лінія 4 — переріз, визначений за формулами (11.21) та (11.22) без коефіцієнтів злиття, штрих-двічі пунктирна коричнева лінія 5 — переріз у старому визначенні (11.20), де коефіцієнти проникності обчислюються у ВКБ-наближенні.

ксимум при $E_\alpha = 3.651$ MeV для інтерференційного доданку при $l = 0$ на Рис. 11.4 у порівнянні з п'ятьма піками P_{cn} на Рис. 11.2 (а), відповідних до п'яти значень енергії, що показано у Таблиці 11.2)³.

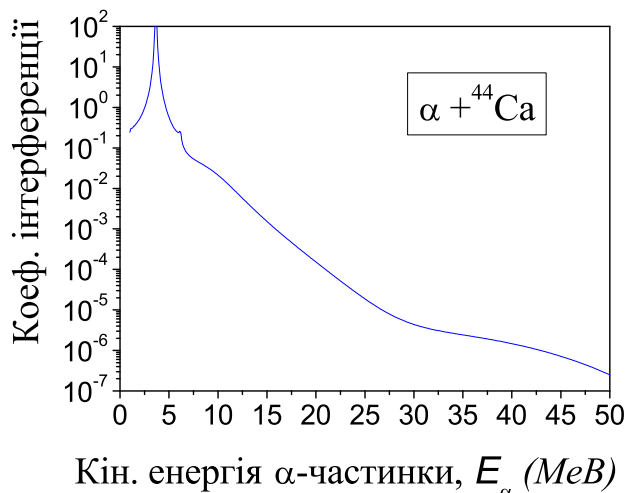


Рис.11.4 Інтерференційний доданок P_{interf} у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$.

З метою оцінити злиття у досліджуемій реакції, давайте з'ясуємо, наскільки близько формула (11.21) дає перерізи у порівнянні зі старим визначенням (11.20). У цьому Розділі ми будемо використовувати однакові значення ймовірностей злиття $p_i^{(\text{int})}$ у області від $r_{\text{int},1}$ до r_{cap} , та однакові значення ймовірностей злиття $p_i^{(\text{ext})}$ у області від r_{cap} до $r_{\text{int},2}$. Для швидкого повного злиття ми маємо $p_i^{(\text{int})} = 1$ та $p_i^{(\text{out})} = 0$. Такі знайдені перерізи та старий результат представлено на Рис. 11.3 (б) (див. штрихову червону лінію 4 та штрих-пунктирну зелену лінію 3, відповідно). Можна бачити, що нові розрахунки виявляються достатньо близько розташованими до попередніх результатів (вони мають подібну форму, не мають ніяких резонансних піків), таким чином, нове визначення (11.21) можна застосувати до аналізу злиття у цій реакції. Саме на такій підставі, тепер ми проаналізуємо можливість еволюції складеного ядра та його розвал (де ймовірності злиття не дорівнюють

³Ми не аналізуємо можливі малі варіації інтерференційного доданку (подібно до малих піків при $E_\alpha = 6.106$ MeV на Рис. 11.4), що можуть виникати у чисельних розрахунках та які не відповідають квазізв'язаним станам.

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$	$l = 8$
$p_l^{(\text{int})}$	0	0	0	0	0	1.00	1.00	0	1.00
$p_l^{(\text{ext})}$	1.00	1.00	1.00	0	1.00	1.00	0	0.93	0
	$l = 9$	$l = 10$	$l = 11$	$l = 12$	$l = 13$	$l = 14$	$l = 15$	$l = 16$	
$p_l^{(\text{int})}$	1.00	0	0	1.00	0.125	1.00	0	0	
$p_l^{(\text{ext})}$	0	0.875	0.94	0	0.875	0	0.625	1.00	

Табл. 11.1. Ймовірності злиття для перерізів, що представлені на Рис. 11.3 (б) (див. суцільну синю лінію 2 на тому рисунку).

нулю), та оцінимо злиття через варіації ймовірностей злиття. Знаходимо ці коефіцієнти ми, використовуючи процедуру фитінга.

Результати такого аналізу представлено на Рис. 11.3 (б) за допомогою суцільної синьої лінії 2. Можна бачити, що включення ймовірностей злиття дозволяє покращити згоду між розрахунками та експериментальними даними суттєво. У Таблиці 11.3 представлено значення для ймовірностей злиття. Можна бачити, що деякі ймовірності злиття не дорівнюють одиниці, що вказує на наявність не швидкого повного злиття по таким каналам. Таким чином, у таких каналах відбувається подальше проходження хвиль без злиття (або з частковим злиттям) у внутрішній ядерній області після тунелювання, тобто формується складене ядро та потім воно еволюціонує деякий час. Для таких каналів, ми знаходимо значення енергії для квазізв'язаних станів, де складене ядро виявляється найбільш стабільним. У таблиці 11.2 ми приводимо знайдені значення енергії квазізв'язаних станів для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$.

11.4. Порівняння з теорією квазістаціонарних станів з комплексними енергіями

Назараз існує теорія квазістаціонарних станів з комплексними енергіями [344], що дозволяє визначити енергії квазістаціонарних станів у задачах

$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$	$l = 14$
3.651	6.597	3.356	6.499	9.543	6.008	9.248	12.488	21.621
10.328	14.649	10.034	14.354	18.380	13.569	18.184	23.094	33.993
18.969	23.486	18.969	23.683	28.985	23.683	29.084	34.975	-
28.789	34.681	28.887	35.270	41.358	35.074	41.653	49.018	-
40.867	47.446	41.064	48.036	-	48.527	-	-	-

Табл. 11.2. Значення енергії (у MeV) для квазізв'язаних станів складеного ядра, що формується у реакції захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ до 50 MeV для перших значень орбітального моменту l (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\max} = 70$ фм).

розпадів ядер. Такі квазістаціонарні стани відповідають полюсам S -матриці при комплексних енергіях (наприклад, див. роботи [345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 354, 355, 356, 352, 357, 358]). Така теорія також застосовується для аналізу резонансних станів у розсіянні та вона могла б бути використана у розрахунках значень енергії для процесів захоплення. Порівняльний аналіз показує, що ця теорія описує та визначає квазістаціонарні стани, однак, такі стани відрізняються від станів, що описує наша підхід⁴. Для аналізу теорії, вказаної вище, ми обираємо формалізм, що представлений у роботі [345]. Можна бачити, що ясне зрозуміння різниці між теорією квазістаціонарних станів з комплексними енергіями та нашим підходом можна отримати з аналізу по двох різних аспектах: а саме, це визначення перерізів α -захоплення та визначення станів (та відповідних значень енергії) для α -ядерної взаємодії.

⁴У теорії квазістаціонарних станів з комплексними енергіями [344] вводяться стани (названі *квазістаціонарними*) з метою описати нестабільність (тобто нестаціонарність) сформованої ядерної системи у розсіянні, а також описати ядерну систему при розпаді. Ми ввели новий термін “*квазізв'язаний*” (“*quasi-bound*”) для станів найбільш ймовірного існування складеного ядра, тому що наш підхід використовує дійсні енергії налітаючої α -частинки, як формально проміжний випадок між зв'язаними (bound) та незв'язаними (non-bound) станами у стандартній квантовій механіці (з дійсними енергіями).

11.4.1. Визначення перерізів α -захоплення

У першому вказаному вище аспекті, ми проаналізуємо здатність підходів відносно їх визначення перерізів α -захоплення. Відповідно до сучасних моделей α -захоплення (див. роботи [226, 75, 112], також роботи [317, 316]), переріз α -захоплення визначається на основі коефіцієнта проникності бар'єра. А саме, досягнення високої точності у визначенні коефіцієнта проникності виявляється суттєвим моментом для коректних розрахунків перерізів. Наш підхід має об'єднаний формалізм, що дозволяє обчислити коефіцієнти проникності та ймовірності існування складеного ядра. Однак, теорія квазістаціонарних станів з комплексними енергіями (наприклад, див. роботу [345]) не визначає такі характеристики. Таким чином, без подальших теоретичних удосконалень, вона не може бути використана для визначення проникностей та перерізів α -захоплення у рамках сучасних моделей α -захоплення.

Коефіцієнт проникності змінюється при зміщенні просторової локалізації захоплення α -частинки ядром (див. роботу [75] для пояснень). Ця властивість прямо слідує з визначення проникності у квантовій механіці. Тут важливо відзначити, що така зміна коефіцієнта проникності не є малою для більшості ядерних процесів (наприклад, згідно до наших оцінок, вона може досягати збільшення до 4 разів для захоплення α -частинок ядрами $^{40,44}\text{Ca}$; для обернених ядерних процесів, подібно до α -розпадів, така зміна виявляється суттєво більш великою). Але, теорія квазістаціонарних станів з комплексними енергіями ігнорує цю властивість (тому, вона є більш наближеною та простою, а відповідні розрахунки на комп'ютері є більш швидкими). Наш формалізм вирішує цю проблему з дійсно гарною точністю (це питання було вирішено у роботі [75], до можна знайти багато подробиць та демонстрацій).

11.4.2. Визначення квантових станів у процесів пружного розсіяння α -частинок на ядрах

По другому аспекті, ми проаналізуємо застосовність підходів відносно їх визначення квантових станів у процесах α -захоплення та розсіяння. Як можна побачити, існує ясна різниця між квантовими станами, які даються теорією квазістаціонарних станів з комплексними енергіями та нашим підходом. Це стає зрозумілим з аналізу пружного розсіяння $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ за допомогою обох методів, якщо використати простий потенціал (11.1). Однак, формалізм [345] не може безпосередньо описати таку реакцію, оскільки нам потрібно внести зміни у визначення асимптотичної граничної умови (5)–(6) у тій роботі у вигляді (11.1) (при $r_1 < r$), та обрати дійсні значення для енергії. Після такої модифікації, аналіз полюсів та нулів S -матриці нічого не дає, тому що модуль від S -матриці дорівнює одиниці: $|S| = 1$ (тобто ні одного нуля та полюса S -матриці не існує). Це можна бачити від точного аналітичного вигляду S -матриці, який можна легко отримати за допомогою нашого формалізму ($R_0 = 1$):

$$S = A_R = \alpha_2^{(1)} + \sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} = R_1^- + A_{\text{osc}} T_1^- R_0 T_1^+. \quad (11.23)$$

Навпаки, ми представляємо розрахунки ймовірності існування складеного ядра на Рис. 11.1, отримані за допомогою нашого підходу, де ясно видно максимуми. Ми обчислюємо дійсні значення енергії (та відповідні хвильові функції), що відповідають максимальним ймовірностям. Відзначимо, що ми накладуємо таку ж саму граничну умову на радіальну хвильову функцію в нулі ($\chi(0) = 0$) та таку ж саму умову нормування падаючої хвилі в асимптотичній області [$\chi_{\text{inc}}(r) = e^{-ik_2 r}$] в обох підходах. Більш того, різниця між двома підходами також існує, якщо використати реалістичний α -ядерний потенціал замість простого потенціалу (11.1) [див. стор. 259].

Можна отримати більше корисної інформації, якщо включити додан-

ки потенціального та резонансного розсіяння S -матриці в аналіз пружного розсіяння. Метод БВВ визначає такі компоненти. Для потенціалу (11.1) ми маємо

$$S_{\text{res}} = \sum_{i=2} \alpha_2^{(i)} = A_{\text{osc}} T_1^- R_0 T_1^+, \quad S_{\text{pot}} = \alpha_2^{(1)} = R_1^-. \quad (11.24)$$

Найбільш ймовірне формування складеного ядра можна охарактеризувати через максимуми резонансної компоненти. Таким чином, з метою порівняти аналіз S -матриці (на основі якого побудовано формалізм у роботі [345]) та метод БВВ (у вивченні складеного ядра), нам потрібно порівняти максимуми резонансного доданку S_{res} та ймовірності P_{cn} . Ми маємо

$$|S_{\text{res}}|^2 = |A_{\text{osc}}|^2 |T_1^- R_0 T_1^+|^2 = |A_{\text{osc}}|^2 \left| \frac{4kk_1}{(k+k_1)^2} \right|^2, \quad (11.25)$$

$$P_{\text{cn}} = |A_{\text{osc}}|^2 \frac{4k}{k+k_1} \left(r_1 - \frac{\sin 2k_1 r_1}{2k_1} \right) = |A_{\text{osc}}|^2 P_{\text{loc}} \frac{2k_1}{k+k_1}$$

або

$$P_{\text{cn}} = |S_{\text{res}}|^2 \cdot P_{\text{loc}} \frac{(k+k_1)^3}{8k_1 k^2}. \quad (11.26)$$

З цих формул, ми отримуємо різні максимуми для ймовірностей існування складеного ядра та резонансної компоненти S -матриці. На Рис. 11.5 (а) представлено наші обчислення з такими характеристиками для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для простого потенціалу (11.1). Можна бачити, що максимуми для резонансного доданку S_{res} та ймовірності P_{cn} близькі, але відрізняються (див. Табл. 11.3). Таким чином, ми робимо висновок, що підхід, що базується на аналізі резонансної компоненти S -матриці, та підхід, що представлений у цьому Розділі та визначає ймовірність P_{cn} , описують різні стани складеного ядра. А саме, різницю між значеннями енергії для максимумів S_{res} та P_{cn} можна визначити через фактор $P_{\text{loc}} (k+k_1)^3 / (8k_1 k^2)$. Відзначимо, що формалізм [345] не дає пояснення зв'язку між резонансним розсіянням та внутрішніми квантовими процесами у ямі, тоді як ми пропонуємо високоточний об'єднаний формалізм опису таких процесів. Ця властивість є перевагою нашого підходу, відносно якої не існує альтернативних методів для її опису у

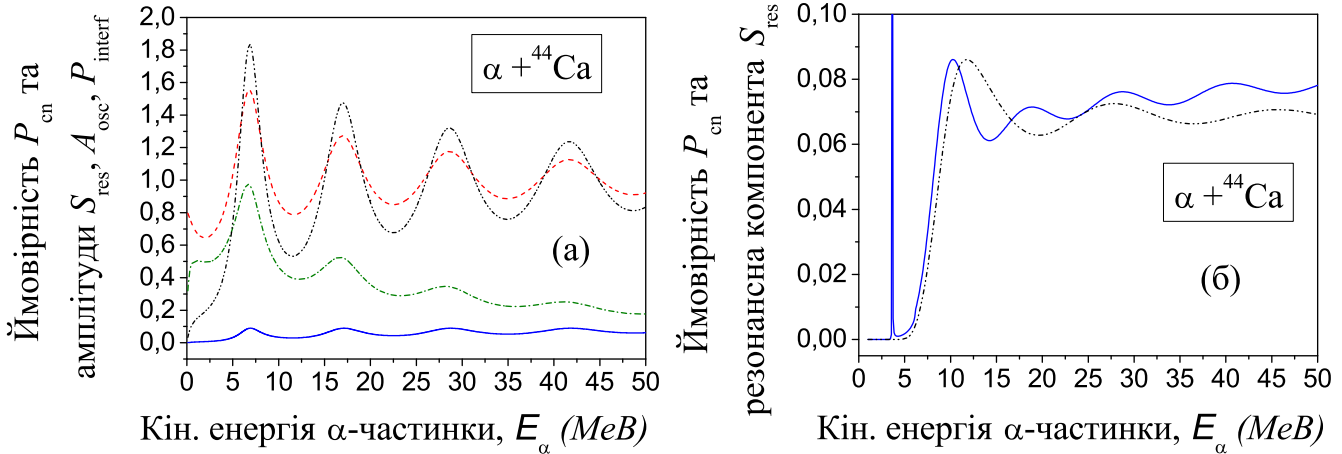


Рис.11.5 Панель (а): Модуль резонансного доданку S_{res} від S -матриці (чорна штрих-двічі пунктирна лінія) у порівнянні з ймовірністю існування складеного ядра P_{cn} (синя суцільна лінія), визначеною за формулою (11.8), модулем амплітуди осциляцій A_{osc} (червона штрихова лінія), визначеною за формулою (11.6), та інтерференційним доданком P_{interf} (зелена штрих-пунктирна лінія), визначеним за формулою (11.9) у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для простого потенціалу (11.1) (параметри V_1 та r_1 обрані таким чином, щоб вони відповідали глибині ями та координаті максимуму реалістичного радіального бар'єра при параметризації з роботи [112] для цієї реакції: ми отримуємо $V_1 = -23.73$ MeV та $r_1 = 8.935$ фм). Значення для енергії максимумів для коефіцієнтів представлено у Таблиці 11.3. Панель (б): Нормований модуль резонансного доданку від S -матриці S_{res} (чорна штрих-двічі пунктирна лінія) у порівнянні з ймовірністю існування складеного ядра P_{cn} (синя суцільна лінія) у залежності від енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для реалістичного потенціалу. У розрахунках ми визначаємо резонансний доданок як $S_{\text{res}} = \alpha_{\text{tp,out}} - A_{R,\text{ext}}$, $\alpha_{\text{tp,out}}$ — амплітуда хвильової функції близ зовнішньої точки повороту. Можна бачити, що максимумами для представлених ліній відрізняються, що вказує на різницю між станами, що визначаються через аналіз ймовірності P_{cn} , та станами, що визначаються через аналіз резонансного доданку S_{res} .

	A_{osc}	P_{cn}	P_{interf}	S_{res}
$E_{\text{max},1}$ (MeV)	-	-	0.934	-
$E_{\text{max},2}$ (MeV)	6.775	6.942	6.608	6.775
$E_{\text{max},3}$ (MeV)	16.955	17.122	16.622	16.955
$E_{\text{max},4}$ (MeV)	28.638	28.805	28.137	28.638
$E_{\text{max},5}$ (MeV)	41.655	41.822	40.987	41.655

Табл. 11.3. Значення енергії для максимумів модуля амплітуди осциляцій A_{osc} , ймовірності існування складеного ядра P_{cn} , інтерференційного доданку P_{interf} та модуля резонансного доданку від S -матриці S_{res} для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для потенціалу простої форми (11.1). Можна бачити, що такі значення енергії для S_{res} співпадають зі значеннями енергії для максимумів амплітуди A_{osc} , але вони відрізняються від значень енергії для максимумів P_{cn} . Цікаво відзначити, що значення максимумів ймовірності при таких енергіях практично дуже близькі: $P_{\text{cn,max}} = 0.0901$.

квантовій фізиці, на сьогодні.

На Рис. 11.5 (б) представлено наші розрахунки для нормованого модуля резонансного доданку S -матриці S_{res} , у порівнянні з ймовірністю існування складеного ядра P_{cn} для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ at $l = 0$ для реалістичного потенціалу. Знов, ми бачимо, що максимуми відрізняються. Відзначимо, що на відміну до методу ВКБ, у повністю квантовому аналізі потенціальне та резонансне розсіяння вже залежать від додаткового незалежного параметра, що визначається зовнішньою межею області потенціалу з бар'єром (ми обрали її як зовнішню точку повороту).

11.4.3. Визначення квантових станів для α -ядерного непружного розсіяння та α -захоплення

Уключення комплексних енергій до нашого аналізу дозволяє додати непружні процеси до такої задачі. Тут метод Багаторазових внутрішніх відбиттів

може бути узагальнений відповідно до розрахунків з комплексними енергіями налітаючої α -частинки, тому що його формалізм побудовано на використанні комплексних значень для хвильових чисел k_i , амплітуд α_i та β_i для хвильової функції, амплітуд T_i^\pm та R_i^\pm на кожній області потенціалу. Однак, пряме застосування формалізму [345] до аналізу реакції, що досліджується, з потенціалом найпростішої форми (11.1) не дає ніякого розв'язку у області дійсної частини енергій до 50 MeV, що означає, що ніякого повного захоплення не існує, відповідно до логіки такого підходу. На Рис. 11.6 представлено наші розрахунки модуля від S -матриці з комплексними енергіями. Тут мо-

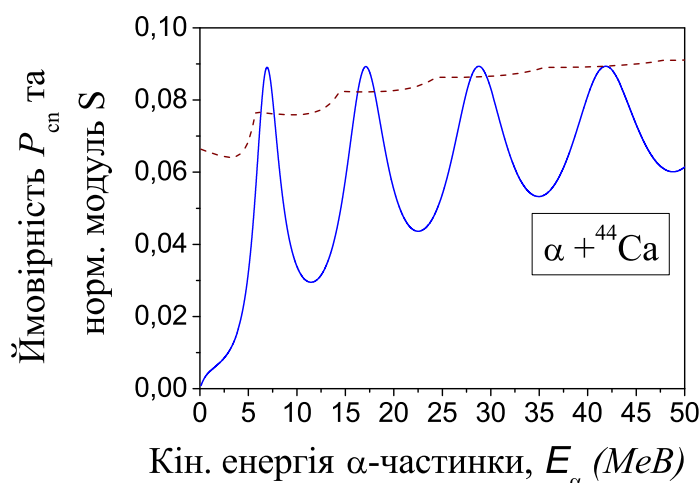


Рис.11.6 Перенормований модуль від S -матриці при комплексній енергії (коричнева штрих-двічі пунктирна лінія) у порівнянні з ймовірністю існування складеного ядра $P_{сн}$ (синя суцільна лінія), що представлена на Рис. (11.5), у залежності від дійсної частини енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для простого потенціалу (11.1) (параметри V_1 та r_1 потенціалу взяті такі, як у розрахунках, що представлено на Рис. 11.1). Можна бачити, що модуль від S -матриці не має нулів у досліджуемій області енергій, що вказує на відсутність повного захоплення у рамках формалізму [345]. Мінімуми модуля від S -матриці не відповідають максимумам ймовірності $P_{сн}$. Таким чином, ми маємо різницю між резонансними значеннями енергії, що визначаються за нашим підходом та узагальненням підхода на основі S -матриці, що описують стани найбільш ймовірного існування складеного ядра.

жна бачити, що така функція не має нулів у досліджуемій області енергій.⁵

⁵Нуль S -матриці відповідає граничній умові нуля від хвилі, що поширюється назовні у асимптотичній області. Це відповідає головній ідеї формалізму [345], якого можна адаптувати до опису процесу захоплення.

Можна узагальнити формалізм [345] та припустити, що мінімуми модуля від S -матриці відповідають станам найбільш ймовірного формування складеного ядра. Але, як можна бачити з цього рисунку, такі мінімуми не співпадають з максимумами ймовірності існування складеного ядра $P_{\text{ен}}$, що знаходиться за допомогою нашого підходу. Такий рисунок показує, що така модифікація формалізму [345] та нашого підходу описують різні стани складеного ядра.

На наступноу Рис. 11.7 представлено наші розрахунки модуля S -матриці та відповідної Γ -ширини для реалістичного α -ядерного потенціалу при комплексній енергії налітаючої α -частинки (обрано діапазон для дійсної частини енергії до 7 MeV). Можна бачити, що в обраній для аналізу області

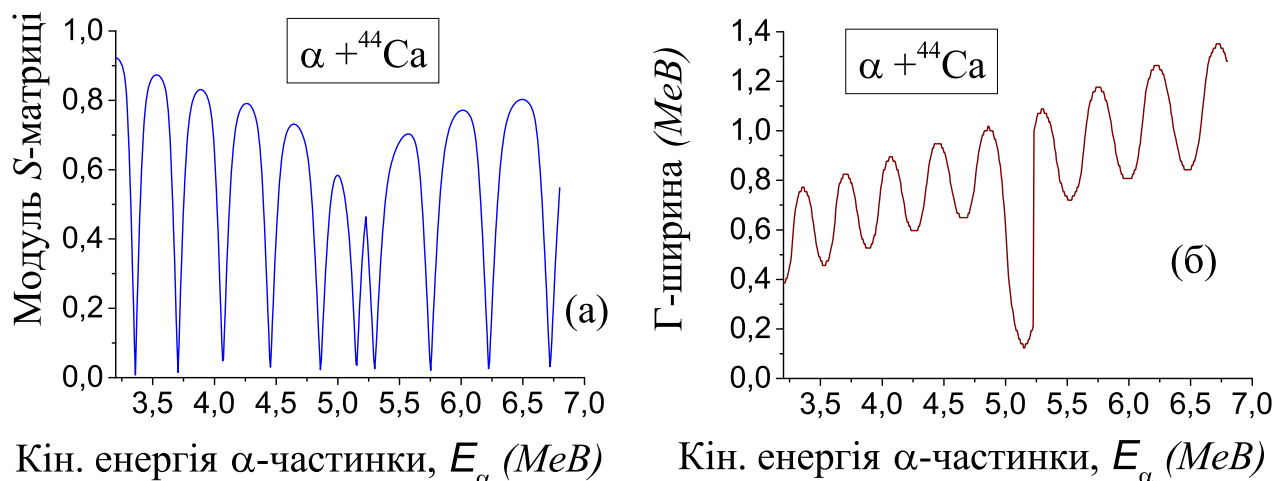


Рис.11.7 Панель (а): Модуль від S -матриці при комплексній енергії у залежності від дійсної частини енергії налітаючої α -частинки для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ для реалістичного потенціалу. Панель (б): Γ -ширина у залежності від дійсної частини енергії налітаючої α -частинки, що відповідає розрахованій S -матриці, що показана на рисунку (а).

енергій модуль від S -матриці має 10 мінімумів. Відповідно до логіки та основних положень теорії квазістаціонарних станів з комплексними енергіями, такі мінімуми дуже близькі до нуля та вони відповідають станам найбільш ймовірного захоплення α -частинки ядром. Тепер, якщо порівняти такий результат з результатами, що приведені на Рис. 11.3 (а) для обчислених ймовірності існування складеного ядра $P_{\text{ен}}$ (ми маємо 5 максимумів для такої функції у області енергій до 50 MeV, див. Табл. 11.2), то ми робимо висновок про те, що

такі стани, що відповідають мінімумам (нулям) S -матриці при комплексній енергії налітаючої α -частинки, суттєво відрізняються відносно станів, що відповідають максимумам ймовірності існування складеного ядра, обчисленої за допомогою нашого метода.

11.5. Головні результати і висновки до Розділу 11

У Розділі досліджено захоплення α -частинки ядром за допомогою метода БВВ. У цих дослідженнях відкрито нові стани [які ми назвали квазізв'язаними (quasi-bound states)], що описують найбільш стабільне існування складеного ядра, що формується під час цієї реакції. На простому прикладі (див. Рис. 11.1 та пояснення до цього рисунку) пояснено відсутність таких станів у традиційних розрахунках перерізів α -захоплення наступним. Коефіцієнти проникності бар'єра мають монотонну залежність від енергії α -частинки (див. Рис. 2 у роботі [75]). На підставі таких монотонних проникностей, повні перерізи α -захоплення не мають піків (див. Рис. 3 у роботі [75]). Це виникає тому, що традиційний підхід до опису процесів захоплення α -частинок ядрами не враховує поведінку хвильової функції у внутрішній області ядра (та внаслідок цього відповідний потік не зберігається), яка, однак, повинна бути визначеною, відповідно до основних положень квантової механіки. Відповідно до логіки нашого формалізму, такі квазізв'язані стани з'являються при повному описі еволюції складеного ядра, через додаткове врахування внеску від квантових процесів у внутрішній ядерній області. Ми описуємо таку еволюцію у внутрішній області на основі зберігання повного потоку на всій області визначення хвильової функції. З метою повністю описати еволюцію складеної ядерної системи, ми удосконалюємо наш метод багаторазових внутрішніх відбиттів, викладений у попередніх розділах (див. також роботу [75]), для повного опису попередніх досліджень цього методу). Переваги нашого метода наступні: (1) Ясна картина формування складеного ядра та його розвал, (2) Детальний квантовий опис еволюції складеного ядра, (3) Тести квантової механіки (які не реалізовані у інших відомих підходах), (4) Надвисока точність розрахунків (що не досягається у інших відомих підходах). Інша суттєва перевага нашого метода — це те, що на основі його формалізму

ми єдиним шляхом об'єднуємо дві ключові ідеї Гамова, що назараз широко застосовуються при рішенні задач ядерних розпадів та задач захоплення (що базуються на оцінках тунелювання через бар'єр, та осциляцій у внутрішній області ядра). Але, крім цього, у нашому підході істотно виникає ще один принципово новий додатковий множник. Цей множник описує просторовий розподіл α -частинки у внутрішній ядерній області, та він повинен впливати на оцінки швидкостей розпадів та перерізів захоплення (що не було враховано Гамовим). Однак, це ніколи ще не було враховано у попередніх роботах у цій області.

Ми демонструємо властивості нашого методу на прикладі реакції захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Для цієї реакції ми даємо власні передбачення значень енергії квазізв'язаних станів (див. Табл. 11.2), та показуємо, що уключення еволюції складеного ядра з можливістю злиття до розгляду дозволяє суттєво підвищити згоду між розрахунками (теорією) та експериментальними даними. Це можна бачити на Рис. 11.3, де видно, що обчислені перерізи для захоплення α -частинок ядрами ${}^{44}\text{Ca}$ дуже гарно описують експериментальні дані. Оновлені дані ймовірностей злиття для цієї реакції показано у Табл. 11.3), у порівнянні з нашими попередніми результатами роботи [75] (див. Табл. 2, В.3, F.9 у тій роботі).

Ми порівняли формалізм методу БВВ у визначенні квазізв'язаних станів з теорією квазістаціонарних станів з комплексними енергіями (наприклад, див. роботи [344, 345, 352, 357]) у визначенні резонансних та квазістаціонарних станів у реакції α -захоплення. Ми отримаємо наступне.

1. Теорія квазістаціонарних станів з комплексними енергіями не визначає перерізів для α -захоплення, відповідно до логіки сучасних моделей α -захоплення (див. роботи [226, 75, 112]). На відміну до цієї теорії, наш підхід має єдиний формалізм, що дозволяє визначити коефіцієнти проникності з високою точністю (які необхідні при оцінках перерізів, від-

повідно до сучасного формалізму α -захоплення), а також ймовірності існування складеного ядра та ймовірності злиття (див. дискусії у Підрозділі 11.4.1).

2. Квазістаціонарні стани (та відповідні значення енергії), розраховані для α -захоплення за допомогою теорії квазістаціонарних станів при комплексних енергіях, відрізняються від квазізв'язаних станів, що описуються за допомогою нашого підходу (див. Рис. 11.7 та пояснення у Підрозділі 11.4.3). У Підрозділі 11.4.2 ми додаємо порівняльний аналіз між такими двома підходами на прикладі розсіяння $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$.

Різницю можна пояснити вже на прикладі найпростішого випадку, тобто для вільної частинки, що рухається у постійному потенціалі, для якого ці два підходи описують два принципово різні процеси (для однакового значення дійсної частини енергії, при ненульовій Γ -ширині). Але, розрахунки для більш складних реалістичних потенціалів вже базуються саме на цьому аспекті, та тому не можуть описати однакові процеси. Час обчислень на комп'ютері подібний для двох підходів. Наприклад, час обчислень модуля S -матриці (та Γ -ширини при комплексних енергіях) досягає біля 8 сек (при $N = 100$, $r_{\text{max}} = 70$ фм, 500 інтервалів у області дійсної частини енергії, з використанням реалістичного бар'єра), та час обчислень ймовірності існування складеного ядра P_{cn} за нашим підходом досягає близ 10 сек (при тих же параметрах).

Результати досліджень, представлених у цьому Розділі, викладено у роботі [76].

РОЗДІЛ 12

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БВВ ДО ЗАДАЧ КВАНТОВОЇ КОСМОЛОГІЇ

12.1. Вступ

Насьогодні квазікласичний підхід є домінуючим до квантового опису формування Всесвіту та його еволюції на першому етапі. Тут ключовим об'єктом являється хвильова функція, що використовується у розрахунках амплітуд переходів, ймовірностей та інших характеристик еволюції Всесвіту.

Такий підхід покладено у базис *підходу Хартлі-Хокінга* (“Hartle-Hawking proposal”) (тобто моделей з використанням Фейнманівського формалізму інтегралів по траєкторіях у багатовимірному просторі-часу [359]), та *підходу тунелювання* (“tunneling proposal”) (тобто методів, що базуються на безпосередньому розгляді тунелювання крізь потенціальний бар'єр у так званому мінісуперпросторі (minisuperspace) з можливістю багатовимірного узагальнення [360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368]). Прийнято використовувати різні граничні умови: коли у першому підході прийнятим вважається використання так-званих *умов без меж* (*no-boundary condition*), то у другому підході — *граничних умов тунелювання* (*tunneling boundary condition*). Математичний апарат цих підходів розвивається у моделях, що базуються на розв'язку одновимірного рівняння *Уілера-Де Вітта* (*УДВ, Wheeler-De Witt, WDW*) [370, 371, 372, 373, 374, 375, 376], багатовимірний моделях [377, 378], некомутативних підходах [379], моделях струн [380, 381]. Можна відзначити альтернативний напрямок — *полевий підхід до квантування гравітації з уключенням анізотропії та неоднорідності Всесвіту шляхом теорії збурень* [384, 385, 386, 373].

Незважаючи майже на 40 років досліджень у квантової космології (див. перші роботи [387]), на даний час квазікласичний підхід є практично безальтернативним до опису квантових станів Всесвіту (див. спроби до повністю квантового опису [386, 388, 389, 390, 391]). Зусилля у дослідженнях спрямовані на пошуки нових фізичних ефектів на квазікласичній основі. Як зміняться результати квазікласичних моделей, якщо не використовувати таке наближення, а знайти рішення максимально точно? Це питання не вивчалось детально (див. [77, 78]). Можна було б сподіватись, що такі спроби навряд чи дадуть істотних відмінностей від квазікласичних результатів. Інша трудність полягає у тому, що невикористання ВКБ-наближення додає повноти до квантового опису явищ. У такому випадку важко (а іноді неможливо) знайти аналогії з класичної динаміки. Виявляється, що квантові поправки змінюють квазікласичні результати на декілька порядків.

Формування Всесвіту — це квантовий процес, що часто розвивається на основі ідеї тунелювання крізь бар'єр. У такому напрямку, результати залежать від наближень, що застосовуються для опису тунелювання. Щоб зрозуміти, наскільки вдало реалізована ідея тунелювання, має сенс використати інші фізичні і геометричні ідеї найпростішим чином. Отже, ми не будемо включати багатовимірних моделей, структури вакууму у моделях струн [380, 381, 392] та ін. Ідея інфляція істотно змінює оцінки еволюції Всесвіту [393, 394, 395, 369, 396, 397, 399, 372, 398, 400, 401, 402, 403, 404]. Однак, вона використовується тільки у квантовому формалізмі моделей, що мають інші сценарії еволюції. Некомутативність між просторово-часовими змінними та спряженими імпульсами вносить корекції до квантування [379]. Але, після отримання рівнянь, розподіл ймовірностей остається не визначеним на квантовій основі. Ми зосередимося на вивченні формування Всесвіту на основі ідеї тунелювання у повністю квантовому описі. Найпростіше це питання можна дослідити у одновимірній задачі тунелювання через космологічні бар'єри на

піввісі в основі рівняння Уілера-де Вітта.

В Розділі показано, що квазікласичний підхід не має необхідного критерія, який би вказував, наскільки коректними є отримані результати. По цій причині, у Розділі створено новий повністю квантовий метод, що описує проникнення через бар'єр. Вперше застосовано тести для перевірки отриманих результатів, та оцінки похибки. Продемонстровано, наскільки такий підхід виявляється правильним. Зазначимо, що моделі на основі теорії збурень не мають повного набору квантових характеристик для оцінки їх самодостатності¹. У той-же час, у роботах по квантовій космології, в яких розрахунки базуються на квазікласичній основі, часто використовується термін “повністю квантові розрахунки”, що призводить до плутанини. Може з'явитися запитання, навіщо саме нам потрібні повністю квантові методи? У нас і так існує значна кількість моделей у квантовій космології. У цій ситуації стає зрозумілим, що нам потрібні ясні демонстрації таких випадків, коли повністю квантові методи дають принципово інший результат.

12.2. Модель Фрідманна–Робертсона–Уолкера з радіацією та узагальненим газом Чаплигіна

У рамках моделі Фрідманна–Робертсона–Уолкера (ФРУ) для Всесвіту закритого типу (при $k = 1$), з включенням космологічної сталої $\Lambda > 0$, компоненти радіації та газу Чаплигіна запишемо лагранжіан у такому вигляді [78]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, \dot{a}) &= \frac{3a}{8\pi G} \left(-\dot{a}^2 + k - \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho(a) \right), \\ \rho(a) &= \left(\rho_\Lambda + \frac{\rho_{\text{dust}}}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)} + \frac{\rho_{\text{rad}}}{a^4(t)}, \\ \rho_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

¹Поясненням такого ствердження є те, що теорія збурень не розглядає процес тунелювання як єдиний неперервний процес.

де a — масштабний фактор (залежить від часу), \dot{a} — похідна функції a за часовою координатою t , $\rho(a)$ — густина енергії, $\rho_{\text{rad}}(a)$ — компонента, що описує радіацію (рівняння стану для радіації має вигляд $p(a) = \rho_{\text{rad}}(a)/3$, де p — тиск), α — параметр моделі газу Чаплигіна (див. [405, 372, 401], історичну роботу [406]). Перехід до квантового опису еволюції Всесвіту виконується відповідно до стандартної процедури канонічного квантування систем у формалізмі Дірака. Так отримується рівняння Уілера–Де Вітта (див. [367, 387, 386]), яке після помноження на постійний множник та переносу компоненти з радіацією ρ_{rad} у праву частину рівняння має вигляд [78]:

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial a^2} + V(a) \right\} \varphi(a) = E_{\text{rad}} \varphi(a), \quad E_{\text{rad}} = \frac{3 \rho_{\text{rad}}}{2\pi G}, \quad (12.2)$$

де

$$V(a) = \left(\frac{3}{4\pi G} \right)^2 k a^2 - \frac{3}{2\pi G} a^4 \left(\rho_{\Lambda} + \frac{\rho_{\text{dust}}}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)} \quad (12.3)$$

та $\varphi(a)$ — хвильова функція. Можна бачити математичну аналогію такого рівняння з одномірним рівнянням Шредінгера на піввісі [при енергії E_{rad} з потенціалом $V(a)$]. У системі одиниць $8\pi G \equiv M_{\text{p}}^{-2} = 1$ перепишемо (12.3) як

$$V(a) = A a^2 - B a^4 \left(\Lambda + \frac{\rho_{\text{dust}}}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (12.4)$$

де A та B — сталі.

12.3. Перехід до нестационарного рівняння УДВ

Тунелювання — квантове явище, при якому частинка проникає через класично заборонену область. Падіння частинки на бар'єр, її подальше тунелювання та відбиття пов'язані причинно-наслідним зв'язком. Тому, розгляд еволюції тунелювання крізь космологічні бар'єри є істотним. Заперечення причинно-наслідного зв'язку між падіння хвилі на бар'єр та її подальшим проходженням крізь бар'єр (з відбиттями) приводить до появи невизначеностей у знаходженні коефіцієнту проникнення та інших характеристик у ко-

смології. Відзначимо, що характерним у роботах по розрахункам проникностей у космології є повна відсутність тестів квантової механіки, що дозволили б перевірити результат.

Таким чином, запишемо узагальнене рівняння УДВ як

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - V_{\text{eff}}(a) \right) \Psi(a, \tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau), \quad (12.5)$$

де τ — нова змінна, що описує еволюцію та являє собою аналог часу. Відповідно до квантової механіки, коефіцієнти проникнення та відбиття — стаціонарні характеристики, тобто не залежать від τ . Відзначимо, що всі ці характеристики є розв'язками стаціонарного рівняння УДВ, тоді як нестаціонарний розгляд пакетів, що поширюються по бар'єру, добавляє розуміння процесу.

З метою створити базис для порівнянь з розрахунками по іншим моделям, розглянемо роботу [389], де результати отримано на основі рівняння

$$\left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + V_{\text{eff}}(a) \right) \Psi(a, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau) \quad (12.6)$$

з потенціалом замкненої моделі УДВ з узагальненим газом Чаплигіна

$$V_{\text{eff}}(a) = 3a^2 - \frac{a^4}{\pi} \sqrt{\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6}} \quad (12.7)$$

Після заміни змінної $a_{\text{new}} = a_{\text{old}} \sqrt{12}$ рівняння (12.6) перетворюється у рівняння (12.5), де потенціал V_{eff} не залежить від змінної τ (див. Рис. 12.1).

12.4. Тунелювання пакета через бар'єр, що складається з довільного числа прямокутних сходинок

Розглянемо тунелювання пакету через одномірний бар'єр довільної форми за допомогою метода багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) (див. попередні Розділи). Для застосування методу слід замінити радіальну відстань r на масштабний фактор a , та апроксимувати потенціал через достатньо велике число N прямокутних сходинок (формули приведено у Додатку Л, див.

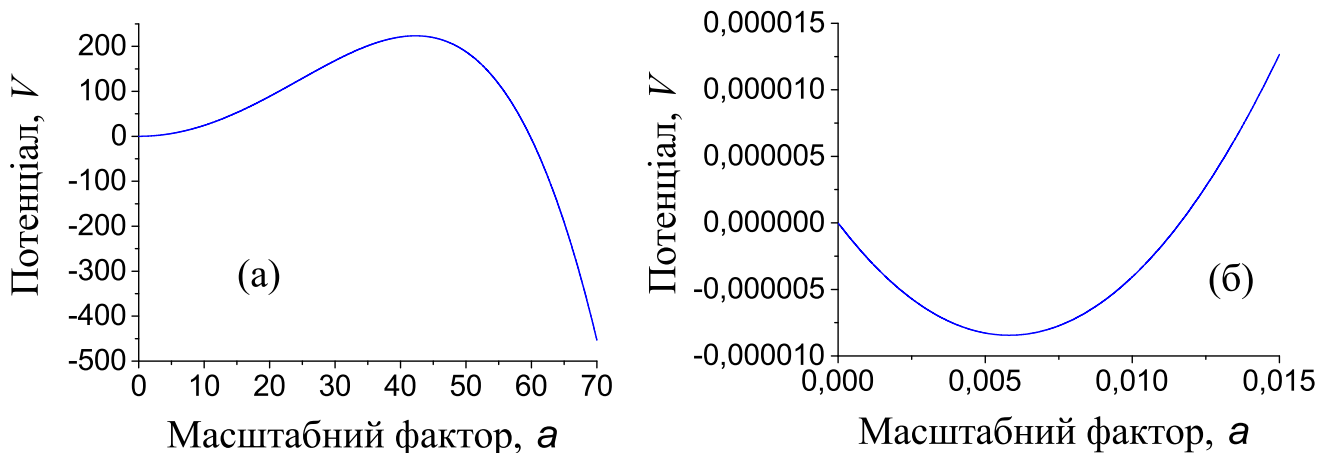


Рис.12.1 Поведінка потенціалу (12.7) після заміни $a_{\text{new}} = a_{\text{old}} \sqrt{12}$ при $\bar{A} = 0.001$ та $\bar{B} = 0.001$ (параметри потенціалу взято з роботи [389], див. Рис. 1, Таблиці I та II у тій роботі): (а) форма бар'єра ($V_{\text{max}} = 223.52$ при $a = 42.322$); (б) існує достатньо мала внутрішня яма близ нуля ($V_{\text{min}} = -8.443 \cdot 10^{-6}$ при $a = 0.00581$).

стор. 535–545):

$$V(a) = \begin{cases} V_1 & \text{при } a_{\text{min}} < a \leq a_1 & \text{(область 1),} \\ V_2 & \text{при } a_1 < a \leq a_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & \text{при } a_{N-1} < a \leq a_{\text{max}} & \text{(область } N\text{),} \end{cases} \quad (12.8)$$

де V_i — сталі ($i = 1 \dots N$).

Припустимо, що пакет починає поширюватися назовні з довільно обраної внутрішньої області з номером M (позначимо її ліву межу a_{M-1} як a_{start}) зліва від бар'єра. Будемо шукати розв'язок для енергії вище бар'єра, тоді як розв'язок для тунелювання можна отримати потім через заміну $i \xi_i \rightarrow k_i$. За-

гальний розв'язок хвильової функції (з точністю до нормування) має вигляд:

$$\varphi = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_1 a} + \beta_1 e^{-ik_1 a} & \text{при } a_{\min} \leq a \leq a_1 \text{ (область 1),} \\ \dots & \\ \alpha_{M-1} e^{ik_{M-1} a} + \beta_{M-1} e^{-ik_{M-1} a} & \text{при } a_{M-2} \leq a \leq a_{M-1} \text{ (область } M-1), \\ e^{ik_M a} + A_R e^{-ik_M a} & \text{при } a_{M-1} < a \leq a_M \text{ (область } M), \\ \alpha_{M+1} e^{ik_{M+1} a} + \beta_{M+1} e^{-ik_{M+1} a} & \text{при } a_M \leq a \leq a_{M+1} \text{ (область } M+1), \\ \dots & \\ \alpha_{n-1} e^{ik_{n-1} a} + \beta_{n-1} e^{-ik_{n-1} a} & \text{при } a_{N-2} \leq a \leq a_{N-1} \text{ (область } N-1), \\ A_T e^{ik_N a} & \text{при } a_{N-1} \leq a \leq a_{\max} \text{ (область } N), \end{cases} \quad (12.9)$$

де α_j та β_j — невідомі амплітуди, A_T та A_R — невідомі амплітуди проходження та відбиття, $k_i = \sqrt{6(E - V_i)}$ — хвильові числа. Нормування зафіксовано так, що модуль першої хвилі $e^{ik_M a}$ на старті дорівнює одиниці.

Ми будемо вивчати еволюцію пакета, що починає в області M рухатися вправо на праву частину потенціалу з бар'єром. У відповідності до метода багаторазових внутрішніх відбиттів, розсіяння пакету на бар'єрі розглядається по етапах його послідовного поширення відносно кожної межі бар'єру. Ми обчислюємо амплітуди $T_1^\pm, T_2^\pm \dots T_{N-1}^\pm$ та $R_1^\pm, R_2^\pm \dots R_{N-1}^\pm$ за формулами (Л.20) (нижній індекс позначає номер межі, а верхній знак “+” або “-” — напрямок руху хвилі вправо або вліво), сумарні амплітуди $\tilde{R}_{N-1}^+ \dots \tilde{R}_M^+, \tilde{R}_M^- \dots \tilde{R}_{N-1}^-$ та $\tilde{T}_M^+ \dots \tilde{T}_{N-1}^+$ — за формулами (Л.22), суми амплітуд $\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)}$ — за формулами (Л.21), повні амплітуди α_j і β_j та амплітуди проходження та відбиття A_T і A_R — за формулами (Л.24) та (Л.25).

Також (на відміну до формалізму у Розділі 9) ми включимо до формалізму можливість подальшої еволюції пакетів, що поширюються в області з номером M ліворуч та потім формують осциляції. Самі пакети формуються у наслідок відбиттів відносно правої частини потенціалу, починаючи з

межі a_M . Якщо нам потрібно перейти від простої межі a_{M-1} до лівої частини потенціальної ями, починаючи від цієї точки до a_{\min} , то слід узагальнити коефіцієнт R_{M-1}^- на \tilde{R}_{M-1}^- , що дається рекурентною формулою у (Л.22) [див. стор. 544)], де для визначення T_i^\pm та R_i^\pm слід використати рівняння (Л.20) [див. стор. 543]. У випадку $a_{\min} = 0$ ми отримуємо можливість описати повне проходження пакету через цю межу (без відбиття), де ми маємо $R_0^- = -1$.²

Ми визначаємо коефіцієнти T та R , що описують проникнення пакету з внутрішньої області назовні та його відбиття від бар'єру, за формулами (Л.26) [див. стор. 545]:

$$\begin{aligned} T_{MIR} &\equiv \frac{k_N}{k_M} |A_T|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot T_{\text{bar}}, & T_{\text{bar}} &= \frac{k_N}{k_M} |\tilde{T}_{N-1}^+|^2, \\ R_{MIR} &\equiv |A_R|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot R_{\text{bar}}, & R_{\text{bar}} &= |\tilde{R}_M^+|^2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Тут T_{bar} та R_{bar} — коефіцієнти проникнення та відбиття відносно бар'єра, $|A_{\text{inc}}|^2$ — коефіцієнт, що характеризує осциляції пакета у внутрішній області (він являє собою повністю квантовий аналог нормуючого множника F , уведеного наприклад у роботі [140] при квазікласичному описі розпаду ядра). Важливим тестом формалізму є перевірка наступної властивості:

$$\frac{k_N}{k_M} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1 \quad \text{або} \quad T_{MIR} + R_{MIR} = 1. \quad (12.11)$$

Для отримання розв'язків для енергії пакета нижче від висоти однієї довільно обраної сходинки з номером M слід використати заміну

$$k_m \rightarrow i \xi_m, \quad \xi_m = \sqrt{E - V_m}. \quad (12.12)$$

Зокрема, картини проникнення та відбиття на Рис. 12.2 (а) і (б), Рис. 12.3 (а) і (б), Рис. 12.4 (б) повністю відтворюються також за виконанням стандартної техніки квантової механіки. Отже, *результат осциляторної залежності проникності від положення точки старту a_{start} на таких рисунках є не залежним від повністю квантового методу, обраного для обчислень.*

²Можливість довільно змінювати значення амплітуди R_0^- дозволяє включити опис стоку до такого квантового формалізму (що могло б описати народження частинок матерії або їх анігіляцію). Але у цій роботі ми не будемо розвивати такий аналіз.

12.5. Аналіз

Застосуємо метод, описаний вище, до аналізу поведінки хвильового пакета, що тунелює крізь потенціальний бар'єр (12.6) (ми використовуємо $a_{\text{new}} \rightarrow \sqrt{12} a_{\text{old}}$). Перший цікавий результат — це *помітна залежність проникності бар'єра від положення точки старту* $a_{\text{min}} \leq a \leq a_1$, де ми поміщуємо пакет для старту. Використовуючи можливість зменшувати ширину інтервалів до достатньо малих розмірів (та вибираючи ширини інтервалів однаковими), ми назвемо точку a_{min} як *точку старту* (позначимо її як a_{start}), звідки пакет починає своє поширення назовні. На Рис. 12.2 (а) можна бачити, що проникність сильно змінюється у залежності від a_{start} при довільній енергії радіації E_{rad} : Вона має осциляційну поведінку, різниця між мінімумами та максимумами є мінімальною при a_{start} у центрі ями, зі зростанням значення a_{start} ця різниця зростає також, доходючи до максимуму близ точки повороту. На такій підставі, ми вперше установили *залежність проникності від точки старту пакета*. Залежності коефіцієнтів відбиття, осциляцій та проходження від положення точки старту a_{start} представлено на наступних Рис. 12.2 (б), (в) та (г), які мають подібну поведінку.

Існують нестационарні підходи до еволюції у задачах квантової космології. Але тут формалізм визначення проникності стаціонарний, без врахування впливу початкових умов. Таке розуміння про проникність бар'єра є достатньо поширеним на сьогоднішній день, яке існує не тільки у квантовій космології, але й у теоретичній ядерній фізиці. Так, у останній галузі, така точка зору є глибоко поширеною, де розрахунки періодів напіврозпаду розпадів ядер виконано без врахування початкових умов процесу розпаду. Ми наведемо тільки декілька прикладів. Так, у роботі [119] опубліковано порівняльний аналіз між експериментальними даними та теоретичними розрахунками періодів α -розпаду у широкому діапазоні ядер від ^{106}Te до ядер з $A_d = 266$

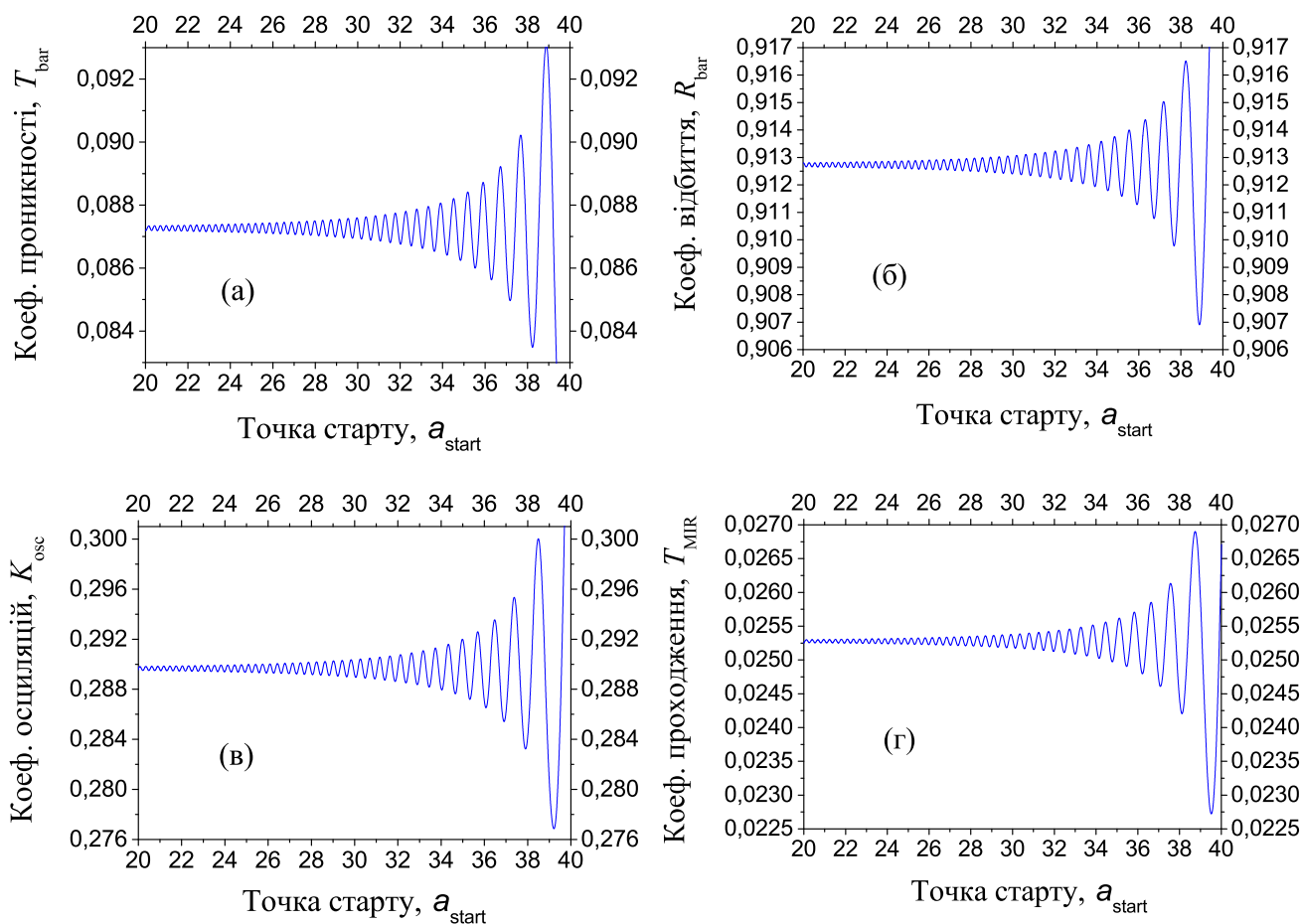


Рис.12.2 Залежності коефіцієнтів проникності $T_{\text{бар}}$ (а), відбиття $R_{\text{бар}}$ (б), коефіцієнта осциляції K_{osc} (в) та коефіцієнта проходження T_{MIR} (г) від положення точки старту a_{start} для енергії $E = 220$ ($A = 0.001, B = 0.001, a_{\text{max}} = 70$, загальна кількість інтервалів — 2000, для усіх представлених значень досягнута точність становить $|T_{\text{бар}} + R_{\text{бар}} - 1| < 10^{-15}$). Ці рисунки наглядно демонструють осциляторну поведінку всіх розглянутих коефіцієнтів від a_{start} .

та $Z_d = 109$ (див. роботи [112, 226], де представлено більш детальний акуратний підхід та проаналізовано більше даних). У огляді [126] представлено методологію розрахунків періодів напіврозпаду для спонтанного поділу ядер [див. формули (21)–(24) на стор. 321 у цій роботі]. Для визначення періодів ядерного розпаду з вильотом протона (ядерний протонний розпад) можна відзначити двопотенціальний підхід (ДПП, two-potential approach, ТРА) та квазікласичний підхід (ВКБ), що на сьогодні прийнято вважати як найбільш широко поширені, точні та достовірні (наприклад, див. [140, 274, 117, 144]). Але в цих роботах вплив початкових умов на отримані результати не враховано та їми нехтується повністю (див. [73] для детальних пояснень та демонстрацій цієї властивості). На основі саме таких підходів сформовано таблиці ядерних даних, що прийнято вважати як найбільш сучасний та достовірний погляд на процеси розпаду у ядерній фізиці на сьогодні (наприклад, див. [324]). Неочікуваний результат, що продемонстровано на Рис. 12.2, приводить до неминучої зміни такого уявлення про проникність та цих вказаних вище опублікованих результатів. Перший прямий наслідок від такого результату такий: проникність повинна бути пов'язана з початковими умовами квантового процесу (не тільки у нестационарному його розгляді, але й також у стаціонарному), які визначають положення локалізації для старта пакета назовні. Другий важливий висновок — це проникність бар'єра у стаціонарному розгляді повинна визначатися з врахуванням початкових умов квантового процесу.

Перше дійсно важливе питання — наскільки достовірними виявляються отримані результати. А саме, чи не буде зруйнована ця картина, якщо зсунути зовнішню межу назовні (хоча у ВКБ-підході це не можливо)? Беручи до уваги сильне зниження зовнішнього хвоста бар'єру до мінус нескінченності, можна навіть розраховувати на це.

На Рис. 12.3 можна бачити, що розрахунки чудово сходяться, що де-

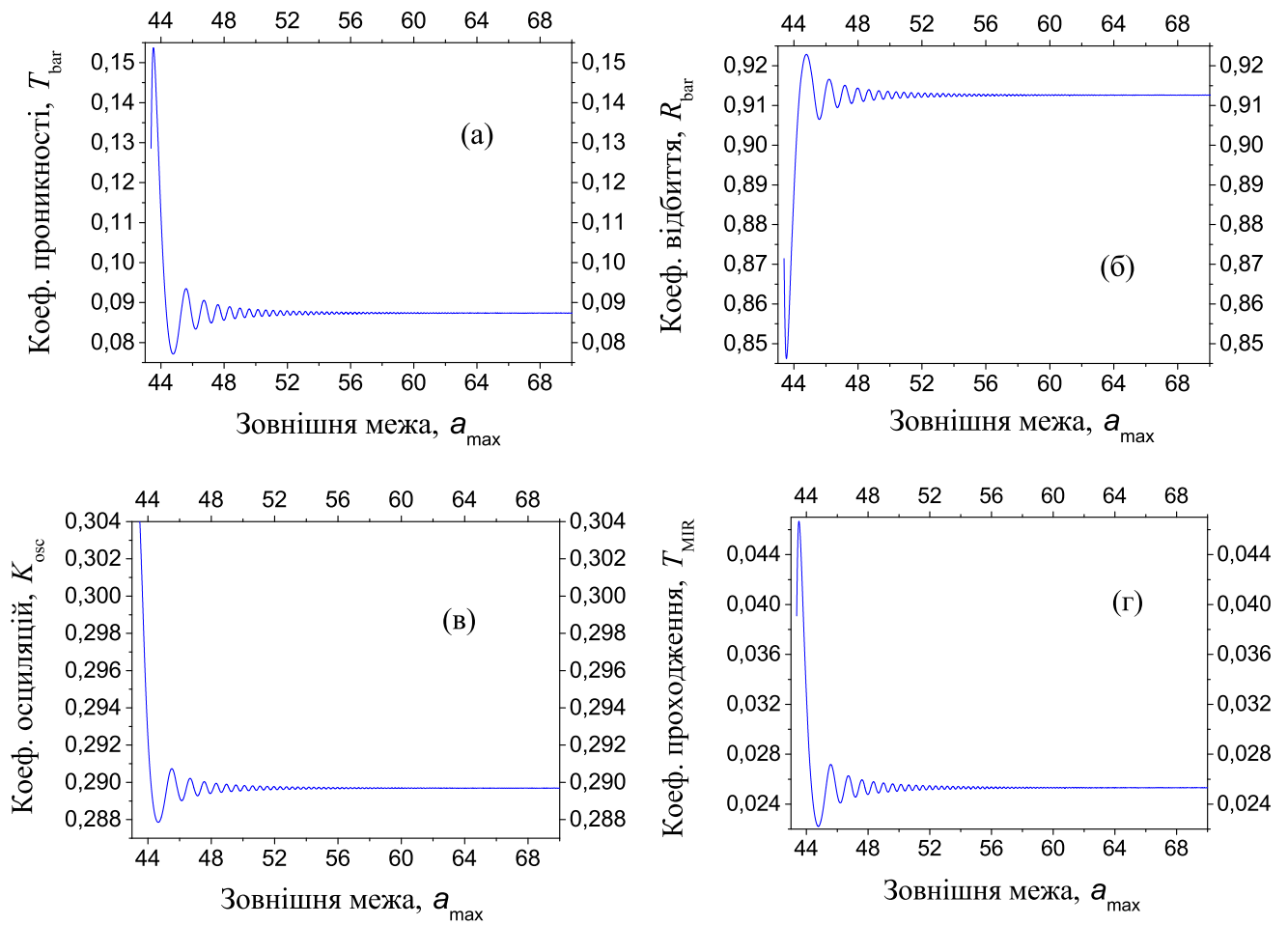


Рис.12.3 Залежності коефіцієнтів проникності (а), відбиття (б), осциляцій (в) та проходження (г) від зовнішньої межі a_{\max} для енергії $E = 223$ ($A = 0.001, B = 0.001$). Досягається точність $|T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} - 1| < 1 \cdot 10^{-15}$ (число інтервалів — 2000).

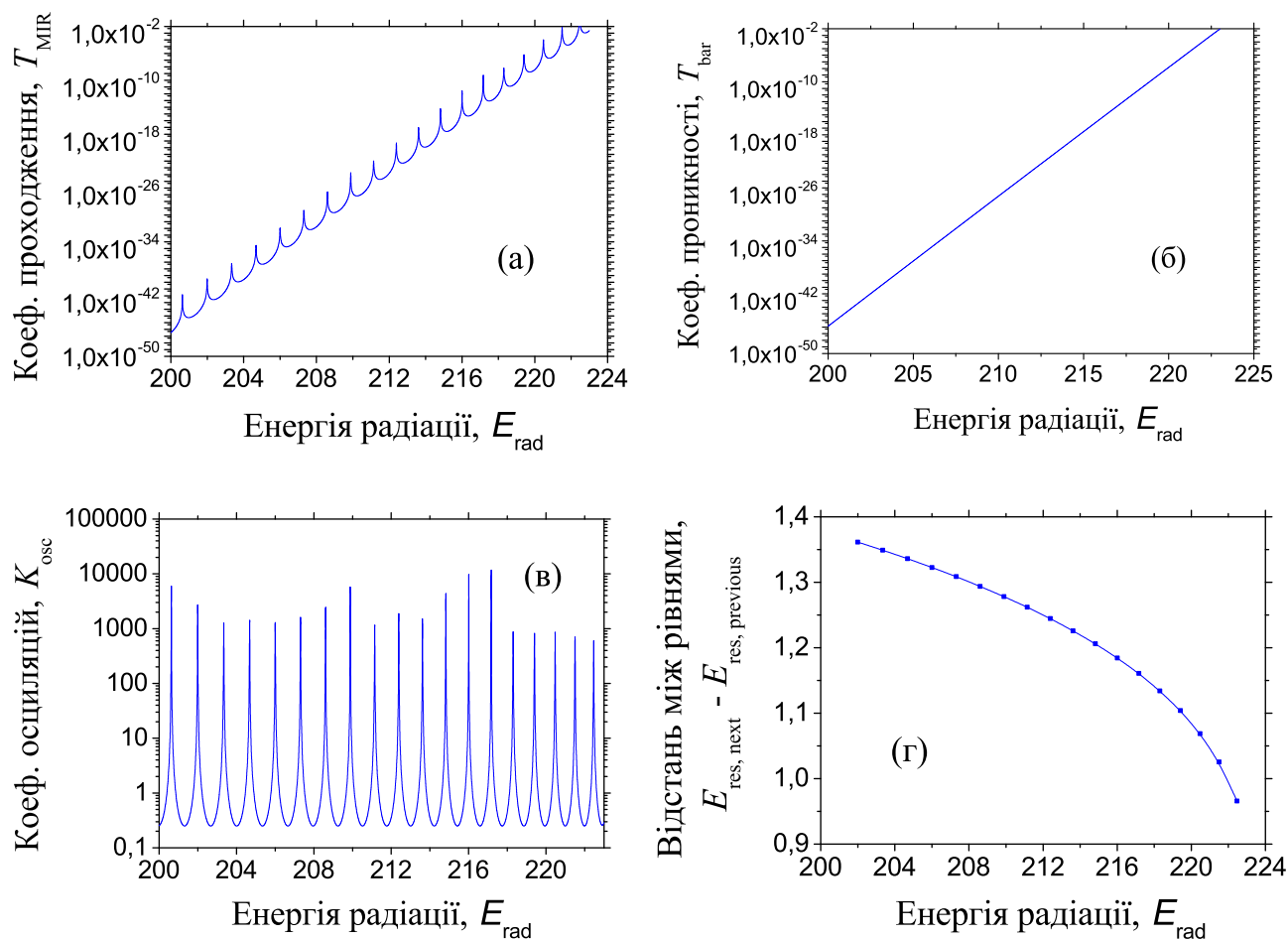


Рис.12.4 Залежності коефіцієнта проходження T_{MIR} (а), коефіцієнта проникності T_{bar} (б), коефіцієнтів осциляцій K_{osc} (в) та різниці $E_{res, next} - E_{res, previous}$ між двома найближчими піками енергії (г) від енергії радіації E_{rad} (для розрахунків обрано: $A = 0.001$ і $B = 0.001$, $a_{start} = 10$, $a_{max} = 70$, кількість інтервалів по осі — 1000, кількість інтервалів енергії — 100000). В середині області енергій $E_{rad} = 200 - 223$ ми спостерігаємо 19 резонансних піків у T_{MIR} і K_{osc} у той час, як проникність монотонно зростає зі зростанням енергії радіації E_{rad} .

монструє ефективність методики БВВ. Це вказує, що намагання визначити розбіжну хвилю в асимптотичній області (щоб задовільнити граничну умову тунелювання у космології) не мають практичного сенсу. Тому ми обрали $a_{\max} = 70$ для розрахунків. Можна бачити, що включення зовнішньої області у розрахунки істотно змінює коефіцієнти проникності і проходження.

Друге питання — наскільки сильним виявляється цей ефект у розрахунках проникності. Якщо б виявилось, що він достатньо малий, то тоді можна вважати, що квазікласичні підходи є достатньо вдалим наближенням. З Рис. 12.2 випливає, що проникність не сильно змінюється у залежності від зсуву точки старту. Однак такі невеликі зміни пов'язані з відносно невеликими висотою бар'єра та глибиною внутрішньої ями, тоді як вони можуть істотно зрости при іншому виборі параметрів (коефіцієнти осциляцій та проходження помітно змінюються при певних енергіях радіації, див. нижче). Таким чином, можна припустити, що цей ефект є більшим при збільшенні висоти бар'єру та глибини внутрішньої ями, як для білябар'єрних енергій (енергій близьких до висоти бар'єра), так і для надбар'єрних енергій радіації.

Цікавим є питання, наскільки ці характеристики змінюються у залежності від енергії випромінювання. Результат виявляється несподіваним (див. Рис. 12.4). Коефіцієнт проходження має осциляторну поведінку, в якій чітко проявляються піки. Ці піки знаходяться приблизно на однакових відстанях, між якими спостерігаються неперервні ями зі своїми мінімумами. Таким чином, вперше у рамках такого квантового підходу ми спостерігаємо чітку картину резонансів, які повинні бути пов'язані з деякими квазістаціонарними станами. Більш детальний аналіз показує наступне. При збільшенні енергії випромінювання проникність монотонно змінюється і визначає загальну тенденцію зміни коефіцієнта проходження, в той час коли коефіцієнт осциляцій вносить піки. Тепер причина існування резонансів стає зрозумілою: осциляції пакета у внутрішній ямі створюють їх, тоді як можливість

пакета проникати через бар'єр (що описується через проникність бар'єру) не впливає на них. Взагалі, спостерігається 134 таких резонансних рівнів енергії всередині діапазону $E_{\text{rad}} = 0\text{--}200$ та ще 19 рівнів при $E_{\text{rad}} = 200\text{--}223$.

На Рис. 12.5 показано точність $|T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} - 1| < 10^{-15}$ у всій області від a_{start} до a_{max} . Ця оцінка характеризує точність методу БВВ.

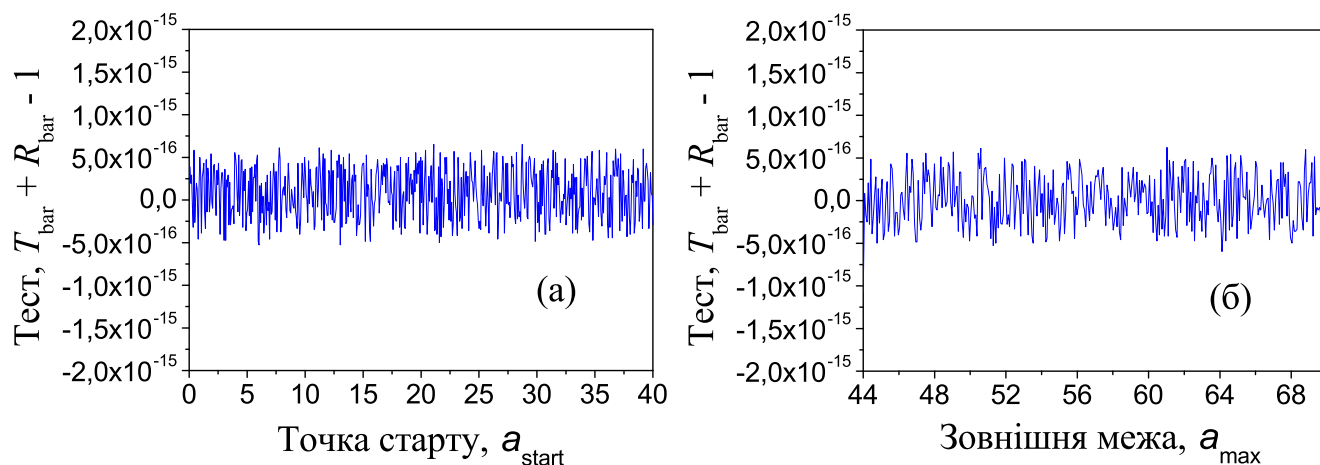


Рис.12.5 Точність розрахунків у визначенні проникності T_{bar} та відбиття R_{bar} для енергії $E = 220$, що використані на Рис. 12.2 та 12.3. Ми обчислюємо $T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} - 1$ у залежності від точки старту a_{start} (а) та зовнішньої межі a_{max} (б) ($A = 0.001$, $B = 0.001$, кількість інтервалів — 2000).

12.5.1. Проникність у повністю квантовому та у квазікласичному підходах: порівняння

Поставимо запитання: чи може проникність, що визначається за ВКБ-формулою на основі форми бар'єру між двома точками повороту, дати вичерпну інформацію і найкращі оцінки еволюції Всесвіту? З Рис. 12.2 (а) видно, що це не так: проникність є функцією від нових параметрів старту пакету. Таку різницю між квантовим та квазікласичним підходами отримано вперше у космології.

(1) Щоб перевірити результати, можна використати тест $T + R = 1$ (де T і R — це проникність через бар'єр і відбиття від нього). Але ВКБ-наближення нехтує відбиттям хвилі [див. [43], (46.10), стор 205, 221–222]. Тому

цей тест неможна застосувати до перевірки T .

(2) Квазікласичні наближення другого та наступних порядків вже враховують убуваючу та зростаючу компоненти хвильової функції в області тунелювання (що не вивчалоя у космології). Звідси повстає наступна проблема — наявність ненульової інтерференції між падаючою та відбитою хвилями. Тобто загально прийнятий критерій $T + R = 1$ [43] не виконується і потрібно врахувати ще третю компоненту M , що описує інтерференцію [78]. Якщо ми некоректно розділемо точно відому хвильову функцію на падаючу та відбиту хвилі, то інтерференційна компонента може безмежно зрости! У такому випадку, коефіцієнти проникності та відбиття можуть також перевищити одиницю та безмежно зростати. Який сенс у цій ситуації має проникність?

(3) Наведемо лише декілька прикладів з квантової механіки.

- Якщо ми розглянемо двовимірне проникнення пакету через бар'єр найпростішої прямокутної форми, то ми побачимо, що проникність безпосередньо залежить від напрямку тунелювання пакета. Тобто стає ясно, що проникність — це не число, а функція.
- Якщо ми розглянемо одновимірне тунелювання пакету через найпростіший прямокутний бар'єр, то ми отримуємо “інтерференційну картину” амплітуди у області проходження, що залежить від просторової координати та є точним аналітичним розв'язком. Стаціонарна частина такого результату точно збігається з відомими стаціонарними розв'язками [54]. З наведених вище прикладів стає ясно, що проникність, визначена тільки на основі форми бар'єра між двома точками повороту, — це не більш ніж, як спрощене розуміння, тоді як для більш глибокого та точного аналізу слід використовувати повністю квантову основу.

(4) Перевага ВКБ-формули проникності — у її простоті, що базується на визначенні хвилі у асимптотичній області. Гранична умова тунелювання

[367, 366] є достатньо природною, відповідно до якої хвильова функція являє собою розбіжну хвилю при великих значеннях масштабного фактора a . Однак, чи дійсно така хвиля описує вільний рух? На відміну до задач атомної та ядерної фізики, у космології ми маємо справу з потенціалами, модулі яких зростають (з прискоренням) зі збільшенням масштабного фактора a (їх градієнти зростають, які мають сенс сили, що діє на хвилю). Таким чином, тут ми не маємо нічого спільного з поширенням вільної хвилі у асимптотичній області. Тепер стає незрозумілим, як пов'язати дві функції Ейрі у точці повороту, щоб отримати коректну форму хвилі, що поширюється назовні. Виявляється, що замість вільної хвилі у асимптотичній області (яка не виникає у задачах квантової космології) ми повинні працювати з хвилями, що поширюються у сильних полях (див. [78]).

У розрахунках ймовірностей тунелювання у космологічних моделях широко застосовується визначення хвильової функції:

$$\Psi(x) = N e^{iS(x)}, \quad (12.13)$$

де S — дія, N — постійна нормування. У квантовій механіці це визначення формулюється у квазікласичному наближенні (див. (6,1), стр. 36 [43]), тоді як у квантовому розгляді має сенс знайти точне формулювання. Інколи, формулу (12.13) пов'язують з рішеннями Евклідових класичних рівнянь руху та квазікласичній експоненті ймовірності тунелювання. Але цей зв'язок отримується з ВКБ-наближення (див. [407], стор. 218–228).

12.6. Головні результати і висновки до Розділу 12

У Розділі представлено новий метод для визначення ймовірності проходження пакету з внутрішньої ями назовні з його тунелюванням через одновимірний радіальний бар'єр довільної форми, що використовуються у задачах квантової космології. Відзначимо наступне:

1. Метод є подальшим розвитком підходу багаторазових внутрішніх відбиттів [263, 264, 265, 54, 71, 96, 73]. Коли бар'єр складається з довільного числа n прямокутних потенційних сходинок, точні розв'язки для амплітуд хвильової функції, коефіцієнтів проникності T_{bar} через бар'єр та відбиття R_{bar} від нього отримано вперше. При $n \rightarrow \infty$ розв'язки можна розглядати як точні для потенціала з бар'єром та ямою довільної форми.
2. Точність методу у знаходженні коефіцієнтів проникності і відбиття складає $|T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} - 1| < 10^{-15}$ (див. Рис. 12.5). На даний час не існує інших методів у космології, що досягають такої точності.
3. У космологію уведено новий коефіцієнт, що описує ймовірність проходження пакету з внутрішньої ями назовні з його тунелюванням через бар'єр довільної форми та враховує внутрішні осциляції пакету у ямі (його названо як *коефіцієнт проходження*). Вдається вперше чітко розділити цей коефіцієнт на коефіцієнт проникності та інший новий коефіцієнт, який характеризує осциляторну поведінку пакету у внутрішній ямі та його названо *коефіцієнтом осциляцій*. Знайдена вперше формула такого розділення являє собою повністю квантовий аналог квазікласичної формули для Γ -ширини розпаду у квазістаціонарному стані, запропонованої Гурвіцем (Gurvitz) та Калберманном (Kälbermann) у роботі [140]. Тут, коефіцієнт осциляцій — повністю квантовий аналог квазікласичного

фактору формування F , а коефіцієнт проходження є аналогом квазікласичної Γ -ширини.

Метод застосовано для дослідження властивостей пакету, що описує еволюцію Всесвіту на першому етапі у закритій моделі Фрідманна–Робертсона–Уолкера з квантуванням та позитивною космологічною сталою, компонентою випромінювання та компонентою узагальненого газу Чаплигіна з потенціалом, що обрано з роботи [389]. Сформулюємо наступні висновки:

1. Проникність бар'єру помітно змінюється у залежності від точки старту R_{start} пакету у внутрішній ямі (див. Рис. 12.2). Коефіцієнт проникності має осциляторну поведінку, різниця між мінімумами і максимумами є мінімальною, якщо точка старту R_{start} розташована у мінімумі внутрішньої ями; зі збільшенням R_{start} ця різниця збільшується, досягаючи максимального значення біля точки повороту. Коефіцієнти відбиття, осциляцій та проходження мають аналогічну поведінку. Досягається збіг (до перших 15 цифр) між амплітудами хвильової функції, отриманої таким методом, та відповідними амплітудами, отриманими стандартним підходом квантової механіки (див. Додаток В у роботі [73]). Це підтверджує, що цей результат не залежить від вибору повністю квантового методу, що застосовується для розрахунків. Ця особливість проявляється у повністю квантовому розгляді та зникає у квазікласичному наближенні.
2. Коефіцієнт проникності суттєво змінюється при врахуванні зовнішнього хвоста бар'єру. Так, проникність змінюється до 2 разів (див. Рис. 12.3) для бар'єра (12.6) з параметрами $A = 0.001$ і $B = 0.001$ (див. Рис. 12.1) при енергії випромінювання $E_{\text{rad}} = 223$.
3. Коефіцієнт проникнення має осциляторну залежність від енергії випромінювання. Піки осциляцій локалізуються на однакових відстанях (див. рис. 12.4). Таким чином, вперше отримано чітку та стабільну картину ре-

зонансів, що вказують на наявність раніше невідомих квазістаціонарних станів. При збільшенні енергії випромінювання проникність змінюється монотонно. Вона описує тенденцію поведінки коефіцієнта проходження, тоді як коефіцієнт осциляцій додає піки у залежність. Тепер причина резонансів стає зрозумілою: осциляції пакета у внутрішній ямі спричиняють їх. Зокрема, виявлено 134 таких резонансів при енергії $E_{\text{rad}} = 0-223$ для бар'єра (12.6) з параметрами $A = 0.001$ та $B = 0.001$.

4. Залежність коефіцієнта проникності від точки старту має максимуми та мінімуми. Тому можна припустити, що найбільш ймовірний старт пакету приходить на координату одного з максимумів. Це дозволяє прогнозувати деякі певні початкові значення масштабного коефіцієнта, коли найбільш ймовірно може починатися старт розширення Всесвіту.
5. Залежність модуля хвильової функції у внутрішній і зовнішній областях від масштабного фактору має мінімуми та максимуми [77, 78]. Це вказує на значення масштабного фактору, при яких “проява” класичного Всесвіту втрачається або є найбільш ймовірною. Тобто, радіус Всесвіту у ході його розширення зростає не безперервно, а послідовно проходить через певні дискретні значення. Впливає, що класичний простір-час на першому етапі еволюції Всесвіту після квантування виглядає скоріше дискретним, ніж безперервним. різниця між максимуми і мінімуми поступово спадає до нуля із збільшенням масштабного фактора [77, 78]. Це нове явище найсильніше виявляється на першій стадії розширення Всесвіту та воно зникає після накладення ВКБ-наближення.

Результати цих досліджень опубліковано в роботах [77, 78, 79, 88, 92, 93].

РОЗДІЛ 13

ТУНЕЛЮВАННЯ КРІЗЬ БАР'ЄРИ АЛЬБРЕХТА З ДИСИПАТИВНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

13.1. Вступ

Проблема квантування систем з силами тертя є однією з фундаментальних проблем квантової фізики. Існуючі підходи, розроблені з намаганням увести дисипацію у квантову фізику, можна розділити на дві групи. До першої групи можна винести методи, спрямовані на безпосереднє рішення рівняння Шредінгера з намаганням як найбільш коректно зберігати усі принципи квантової механіки та квантові властивості систем. Однак, найпростіші спроби реалізувати формалізм таким чином для опису реалістичних квантових систем приводять до суттєвих складнощів. По цій причині можна пояснити, що кількість робіт достатньо мала.

До другої групи можна винести методи, що спрямовані на опис дисипативних властивостей реалістичних систем, що знайшли своє природне застосування у задачах ядерної фізики. Ядерна дисипація у цьому напрямку являє собою перетворення енергії колективному руху в ядрах до енергії внутрішніх одне-частинкових збурень. Початок розвитку цього напрямку можна пов'язати з появою робіт Святецького (Swiatecki) ще у 1969 році [408, 409], які привертали суттєвої уваги дослідників до останніх часів. Однак, сам формалізм починається з наближень, неквантових узагальнень початкових квантових рівнянь. З метою розробити формалізм, потрібно відходити від початкового рівняння Шредінгера та стандартної квантової механіки.

На початку розвитку методів другої групи дисипативні ефекти в ядерних реакціях вивчалися за допомогою класичних рівнянь руху, що опису-

ють зіткнення індивідуальних нуклонів у ядерному середовищі зі в'язкістю з підключенням сил тертя [410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425]. Але, з роками, класичні представлення ядерної дисипації отримували все більш акуратне квантове формулювання. Інтенсивно удосконалювалися моделі захоплення, злиття, поділу, глибоко-непружних зіткнень важких іонів на основі використання рівнянь Ланжевена (Langevin) [426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437] (тут, знайшли своє місце методи Монте-Карло (Monte-Carlo), формалізм Фоккера-Планка (Fokker-Planck), моделі квантової молекулярної динаміки та багато інших). На сьогодні, такий напрямок теорії інтенсивно розробляється для опису утворення та властивостей надважких елементів (наприклад, див. [438]). Застосовуються сучасні квантові підходи на основі теорії Хартрі-Фока (Hartree-Fock theory) з різними видами параметризації взаємодій Скірма (Skyrme), де для опису дисипативних процесів застосовуються квазікласичні та напівкласичні підходи (наприклад, формалізм розподілів Вігнера [440, 441], моделі флуктаційно-дисипативних траєкторій (fluctuation-dissipation trajectory models) з фолдинг-розрахунками [442], моделі класичних дисипативних траєкторій [443], розширений траєкторний підхід Гутцвіллера (extended Gutzwiller trajectory approach) у описі ядерної колективної динаміки [444]).

Привабливою перевагою методів останньої групи є можливість вводити характеристики, фізичний зміст яких стає достатньо простим та ясним у класичному наближенні (з квантової механіки). До цієї групи можна включити підходи, спрямовані на опис дисипативних ефектів у поділі ядер, фізиці важких іонів, синтезі надважких ядер. Цей напрямок здобув своєї популярності, число робіт є дійсно вражаючим. На сьогодні для роботи в цьому напрямку розроблені спеціальні чисельні методи (наприклад, див. [447, 448]).

Тут можна відзначити незалежний підхід, що був уведений Калдей-

рою (Caldeira) та Леггеттом (Leggett) у [449, 450]. Такий підхід спрямований на опис системи броунівських частинок у середовищі за допомогою гармонічних осциляторів, на яку подальш накладається канонічне квантування. Цей формалізм інтенсивно застосовувався до широкого ряду задач, включаючи системи з зовнішнім середовищем (systems coupled with environment), такі як дифузія мюонів у металах, рух електронів у біологічних та хімічних системах, радіаційне згасання (radiation damping) та інше.

У даному розділі інтерес ми направимо до першої групи методів, з метою побудувати повністю квантовий апарат для опису дисипативних процесів у квантовій фізиці. Ми очікуємо, що такий підхід буде спрямований на найбільш точне збереження квантових властивостей при описі дисипативних систем. Як ми визначаємо, найбільш широко відомий (та, можливо, найперший серед створених) підхід в цій групі — це формалізм на основі гамільтоніанів Калдірола-Канаї (Caldeira-Kanai) [451, 452] (див. також інтенсивні дослідження [453, 454, 455, 456, 457, 458], узагальнення [459, 460, 461, 462, 463, 464, 465]). Серед інших підходів можна відзначити побудову нелінійних (не-ермітових, non-hermitian) гамільтоніанів з операторами Костіна (Kostin) [466], Альбрехта (Albrecht) [467], Хасе (Hase) [468], лінійних (ермітових) гамільтоніанів Гізіна (Gisin) [469], Екснера (Exner) [470], Поліхронакоса (Polychronakos) та Тзані (Tzani) [471]. В цій роботі ми виберемо напрямок Альбрехта, в формалізмі якого потенціал з дисипативною компонентою визначається на основі усереднення по хвильовим пакетам [467]:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0(x) + \gamma W(x), \\ W(x) &= (x - \langle x \rangle) [cp + (1 - c) \langle p \rangle] - \frac{i \hbar c}{2}, \end{aligned} \quad (13.1)$$

де $V_0(x)$ — потенціал стандартного стаціонарного рівняння Шредінгера, γ та c — довільні дійсні параметри, $\langle x \rangle$ та $\langle p \rangle$ — усереднені координата та імпульс, де усереднення виконується по координаті x з використанням хвильових пакетів, що базуються на розв'язках рівняння Шредінгера з потенціалом

$V(x)$. Ця властивість виділяє підхід Альбрехта серед інших підвищеною складністю у математичному формулюванні та комп'ютерних розрахунках. Саме тому ми вважаємо, що після вдалої побудови такого формалізму для визначення хвилевої функції, більшість останніх підходів цієї групи можна далі буде розв'язати на основі подібних вже знайдених ідей. Відповідно до [467], при $c > 0$ більшість потенціалів V дає затухаючі розв'язки та не локалізує основний стан, тоді як випадок $c = 0$ зберігає основні стани. Щоб зрозуміти, як побудувати підхід для знаходження розв'язків рівняння при довільному параметру c , ми розберемося з випадком $c = 0$.

Основи такого формалізму було покладено у роботах [80, 81]. Але, перед тим як застосувати такий формалізм для складних реалістичних ядерних задач, поперш потрібно було б довести цей підхід до рівня розрахунків проникностей бар'єрів простої форми з наявністю дисипативної компоненти в потенціалі взаємодії, та проаналізувати основні властивості методу. Деякі загальні властивості тунелювання з включеною дисипативною компонентою у потенціалі можна дослідити у задачі тунелювання через найпростіший одномірний бар'єр прямокутної форми. Знаходження розв'язку такої задачі є метою цієї роботи. Ми будемо припускати, що як наступний крок у такому напрямку досліджень, цей підхід можна бути вдосконалити для роботи з реалістичними бар'єрами для задач ядерної фізики, де напрямок досліджень треба направити саме на бар'єри довільної форми (де можна застосувати метод багаторазових внутрішніх відбиттів, який, як ми оцінюємо, є найбільш точним у знаходженні розв'язку таких задач [263, 264, 265, 54, 71, 72, 73]).

Для досліджень ми візьмемо потенціальні бар'єри з задач ядерної фізики. Тут найбільш глибоко досліджені та відтестовані потенціали взаємодій між фрагментами малої маси та ядрами. Придатними кандидатами для таких фрагментів можуть бути протони та α -частинки. Тут прояв дисипативних ефектів у α -ядерних реакціях є більш вагомим. Найбільш інтенсивно та

глибоко α -ядерні взаємодії вивчалися у задачах α -розпаду ядер (див. експериментальні дослідження [277, 278, 119, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 287], різні мікроскопічні моделі [217, 288, 289, 212, 290, 291, 214, 292, 293, 294, 215], макроскопічні кластерні моделі [295, 296, 297, 298, 299, 112, 224, 225, 226, 213, 300, 301, 302, 303, 304], моделі поділу [305, 126]), та розсіяння α -частинок на ядрах [306, 307, 308, 309, 310]. α -розпади ядер характеризуються періодами напіврозпаду, що визначаються на основі процесу формування α -частинки у внутрішній просторовій області ядра, її подальших (квантових) осциляцій та вильоту назовні з тунелюванням через бар'єр. α -захват характеризується перерізами, що визначаються на основі проникностей бар'єру при різних значеннях кутового моменту та процесами злиття α -частинки з ядром, де саме й проявляються дисипативні ефекти. Відповідно до такої логіки, α -захват є найбільш цікавою реакцією, саме що ми й вибираємо для аналізу у цій роботі. Відзначимо, що фізика процесів злиття при α -захопленні досліджена найменш глибоко [112, 224, 225, 226], та тому будь-яка здобута нова інформація могла б бути корисною. Оцінки ймовірностей захоплення α -частинок використовуються при описі ядерних реакцій у зірках [304, 309, 312].

На сьогодні, найбільш поширений підхід до визначення перерізів α -захоплення заснований на розрахунках проникності бар'єрів без включення процесів злиття (наприклад, див. [112]). З літератури можна знайти, що визначення ймовірностей злиття являє собою серйозну та довго-існуючу загадку, не дивлячись на довгу історію досліджень реакцій захоплення. Тут, Глас та Мосел увели підхід різкого обрізання кутових моментів [316, 317], який широко застосовувався до останніх часів (наприклад, див. [321, 322]). Еберхард та ін. запропонували формулу, що дає деяку інформацію про злиття при α -захопленні на основі порівняння розрахункових перерізів з експериментальними даними при деяких обраних енергіях [313]. У [74] ми показали, що включення процесів злиття у задачу дозволяє суттєво покращити згоду

між теорією та експериментом. Експериментально, ці реакції не досліджені достатньо глибоко: ми маємо дані вимірів для α -захоплення ядрами ^{40}Ca , ^{44}Ca [313], ^{59}Co [314], ^{208}Pb [315], ^{209}Bi [315].

13.2. Метод визначення хвильової функції рівняння Шредінгера з потенціалом Альбрехта

У цьому розділі ми коротко розглянемо метод визначення хвильової функції для нестационарного рівняння Шредінгера з потенціалом Альбрехта [80, 81].

13.2.1. Рівняння Шредінгера з дисипативною компонентою

Розглянемо нестационарне рівняння Шредінгера:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) \Psi(x, t), \quad (13.2)$$

в якому потенціал має деяку залежність від часу. Розглянемо хвильову функцію, що залежить від часу, у вигляді інтеграла Фур'є:

$$\Psi(x, t) = \int_0^{E_0} g(E) e^{-iEt/\hbar} \varphi(E, x) dE, \quad (13.3)$$

де $\varphi(E, x)$ — компонента хвильової функції, що не залежить від часу t , $g(E)$ — ваговий фактор у формі гаусіану

$$g(E) = A e^{-a^2(k-\bar{k})^2}, \quad (13.4)$$

де A та a — сталі, \bar{k} — значення імпульсу, відносно якого локалізується пакет.

Підставляючи хвильову функцію (13.3) у вираз (13.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_0^{E_0} g(E) e^{-iEt/\hbar} \varphi(E, x) E dE = \\ & = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{E_0} g(E) e^{-iEt/\hbar} \frac{\partial^2 \varphi(E, x)}{\partial x^2} dE + \int_0^{E_0} g(E) V(x, \bar{E}, t) e^{-iEt/\hbar} \varphi(E, x) dE. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Застосуємо обернене Фур'є-перетворення до цього рівняння. Ліва частина отримає вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int dt e^{iE't/\hbar} \int_0^{E_0} g(E) e^{-iEt/\hbar} \varphi(E, x) E dE = \\ & = \hbar \int_0^{E_0} g(E) \varphi(E, x) \delta(E' - E) E dE = \hbar g(E') E' \varphi(E', x), \end{aligned} \quad (13.6)$$

а права частина перетвориться як

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \frac{\hbar^2}{2m} \int dt e^{iE't/\hbar} \int_0^{E_0} g(E) e^{-iEt/\hbar} \frac{\partial^2 \varphi(E, x)}{\partial x^2} dE + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int dt e^{iE't/\hbar} \int_0^{E_0} g(E) V(x, \bar{E}, t) e^{-iEt/\hbar} \varphi(E, x) dE = \\ & = -\frac{\hbar^3}{2m} g(E') \frac{\partial^2 \varphi(E', x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} dE g(E) \varphi(E, x) \int V(x, \bar{E}, t) e^{i(E'-E)t/\hbar} dt. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Об'єднуючи ці частини, ми отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} \hbar g(E') E' \varphi(E', x) & = -\frac{\hbar^3}{2m} g(E') \frac{\partial^2 \varphi(E', x)}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} dE g(E) \varphi(E, x) \int V(x, \bar{E}, t) e^{i(E'-E)t/\hbar} dt. \end{aligned} \quad (13.8)$$

При $c = 0$ дисипативна компонента $W_A(x)$ має вигляд:

$$W_A(x) = \langle p \rangle (x - \langle x \rangle). \quad (13.9)$$

Визначимо усереднення як

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \Psi^*(x, t) \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx, \\ \langle x \rangle &= \int \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx, \end{aligned} \quad (13.10)$$

звідки отримаємо дисипативну компоненту

$$\begin{aligned} W_A(x, t) &= \\ &= -i \hbar \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) \times \\ &\quad \times e^{i(E_1 - E_2 + E_3 - E_4)t/\hbar} (x - x_2) \varphi^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2), \end{aligned} \quad (13.11)$$

то розрахуємо повний потенціал

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_0(x) - \\ &- i \hbar \gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) \times \\ &\quad \times e^{i(E_1 - E_2 + E_3 - E_4)t/\hbar} (x - x_2) \varphi^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2). \end{aligned} \quad (13.12)$$

Враховуючи перетворення, знайдемо другу складову правої частини (13.8):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} dE g(E) \varphi(E, x) \int V(x, \bar{E}, t) e^{i(E' - E)t/\hbar} dt = \hbar g(E') \varphi(E', x) V_0(x) - \\ &- i \hbar^2 \gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) g(E'') \times \\ &\quad \times (x - x_2) \varphi^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2) \varphi(E'', x). \end{aligned} \quad (13.13)$$

де

$$E'' = E' + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \quad (13.14)$$

Таким чином, рівняння (13.8) перетворюється до наступного (при $E' \rightarrow E$)

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E \right) \varphi(E, x) = \\
& = i\hbar\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \times \\
& \times \frac{g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) g(E'')}{g(E)} (x - x_2) \times \\
& \times \varphi^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2) \varphi(E'', x).
\end{aligned} \tag{13.15}$$

Ми знайшли нове рівняння без часу, яке залежить від дисипативного параметру γ . Якщо цей параметр прямує до нуля, тоді рівняння (13.14) перетвориться до стаціонарного рівняння Шредінгера зі стаціонарним потенціалом $V_0(x)$ без дисипативної компоненти $W_A(x)$, що відповідає стаціонарному процесу.

13.2.2. Метод послідовних наближень

Припускаючи параметр γ достатньо малим, ми будемо шукати розв'язок невідомої функції $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma \varphi_1(x), \tag{13.16}$$

де $\varphi_0(x)$ — хвильова функція стаціонарного рівняння Шредінгера зі потенціалом $V_0(x)$ при енергії E_0 . Підставляючи розв'язок (13.16) у рівняння (13.15), ми отримаємо нове рівняння, що до членів при γ^1 має вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E \right) \left(\varphi_0(E, x) + \gamma \varphi_1(E, x) \right) = \\
& = i\hbar\gamma \cdot \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \times \\
& \times \frac{g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) g(E'')}{g(E)} (x - x_2) \times \\
& \times \varphi_0^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi_0(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi_0^*(E_3, x_2) \varphi_0(E_4, x_2) \varphi_0(E'', x).
\end{aligned} \tag{13.17}$$

Випишемо компоненти при різних ступенях γ у (13.17) (позначення $E = E_0$):

$$\begin{aligned}
\gamma^0 : & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0 \right) \varphi_0(E_0, x) = 0, \\
\gamma^1 : & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0 \right) \varphi_1(E_0, x) = \\
& = i \hbar \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \times \\
& \times \frac{g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) g(E'')}{g(E_0)} (x - x_2) \times \\
& \times \varphi_0^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi_0(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi_0^*(E_3, x_2) \varphi_0(E_4, x_2) \varphi_0(E'', x),
\end{aligned} \tag{13.18}$$

де

$$E'' = E_0 + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \tag{13.19}$$

Перше рівняння у системі (13.18), що нами отримана, — це тотожність згідно до умов задачі. Друге рівняння визначає невідому функцію φ_1 на основі заданої функції φ_0 . Це диференціальне рівняння другого порядку та для його рішення можна застосувати чисельні методи.

13.2.3. Точний розв'язок для корекції φ_1

Для того щоб знайти розв'язки рівнянь (13.18), нам потрібно знати корекцію φ_1 , яка невідома. Перепишемо праву частину другого рівняння при γ^1 як

$$\begin{aligned}
f(E_0, x) & = i \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \frac{g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) g(E'')}{g(E_0)} \times \\
& \times \varphi_0(E'', x) \left\{ x I_1(E_3, E_4) - I_2(E_3, E_4) \right\} \cdot I_3(E_1, E_2),
\end{aligned} \tag{13.20}$$

де

$$\begin{aligned}
I_1(E_1, E_2) & = \int \varphi_0^*(E_1, x) \varphi_0(E_2, x) dx, \\
I_2(E_1, E_2) & = \int \varphi_0^*(E_1, x) \varphi_0(E_2, x) x dx, \\
I_3(E_1, E_2) & = \int \varphi_0^*(E_1, x) \frac{\partial \varphi_0(E_2, x)}{\partial x} dx,
\end{aligned} \tag{13.21}$$

та рівняння (13.18) при γ^1 отримують наступний вигляд:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0 \right) \varphi_1(E_0, x) = \hbar f(E_0, x). \quad (13.22)$$

Помножуючи це рівняння зліва на хвильову функцію $\varphi_0(x)$, отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_0^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} \right] = \hbar \varphi_0(x) f(x). \quad (13.23)$$

Враховуючи, що функції $\varphi_0(x)$ та $f(x)$ відомі, ми проінтегруємо це рівняння по dx :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi_0^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = \hbar \int \varphi_0(x) f(x) dx + C_1, \quad (13.24)$$

та отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left\{ \int \varphi_0(x) f(x) dx + C_1 \right\}. \quad (13.25)$$

Інтегруючи це рівняння по dx ще раз, отримаємо точний розв'язок для функції φ_1 :

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0(x) \left\{ \frac{2m}{\hbar} \int \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left[\int \varphi_0(x) f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \right\}. \quad (13.26)$$

Використовуючи сталі C_1 та C_2 , можна деформувати корекцію φ_1 до даної хвильової функції φ_0 (тобто ми створили метод явної деформації повної хвильової функції, що могло би бути цікавим при пошуках нових квантових систем з заданими властивостями). Як було показано у роботі [80], у вузлах хвильової функції $\varphi_0(x)$ її корекція φ_1 має вигляд:

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0(x) \left\{ \frac{2m}{\hbar} \int \frac{f(x)}{2\varphi_0'(x)} dx + C_2 \right\}. \quad (13.27)$$

Таким чином, корекція $\varphi_1(x)$ прямує до нуля у вузлах та, на цій основі вона не має розбіжностей.

13.3. Тунелювання крізь прямокутний бар'єр

Тепер ми розглянемо одномірну задачу тунелювання частинки з масою m у напрямку осі x через прямокутний потенційний бар'єр. Позначимо область I

при $x < 0$, область II при $0 < x < a$ та область III при $x > a$ відповідно. Стаціонарна хвильова функція для такого процесу тунелювання має вигляд:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_R e^{-ikx} & \text{при } x < 0, \\ \alpha e^{\xi x} + \beta e^{-\xi x} & \text{при } 0 < x < a, \\ A_T e^{ikx} & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (13.28)$$

де $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, $\xi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_1 - E)}$, E — повна енергія частинки. Амплітуди A_T , A_R , α та β можна визначити, якщо використати умови неперервності хвильової функції та її похідної на кожній межі бар'єра. Ми маємо (наприклад, див. [263, 264, 54, 71, 72, 73]):

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{i4k\xi e^{-\xi a - ika}}{F_{\text{sub}}}, & \alpha &= \frac{2k(i\xi - k) e^{-2\xi a}}{F_{\text{sub}}}, \\ A_R &= \frac{k_0^2 D_-}{F_{\text{sub}}}, & \beta &= \frac{2k(i\xi + k)}{F_{\text{sub}}}, \end{aligned} \quad (13.29)$$

де

$$\begin{aligned} F_{\text{sub}} &= (k^2 - \xi^2) D_- + 2ik\xi D_+, \\ D_{\pm} &= 1 \pm e^{-2\xi a}, \\ k_0^2 &= k^2 + \xi^2 = \frac{2mV_1}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Підставляючи у (13.3) хвилю $\varphi_{\text{inc}}(k, x)$, що падає на бар'єр, а також прошедшу хвилю $\varphi_{\text{tr}}(k, x)$ або відбиту хвилю $\varphi_{\text{ref}}(k, x)$ від хвильової функції $\varphi(k, x)$, що дана (13.28), ми відповідно отримаємо пакет, що падає на бар'єр, або прошедший чи відбитий пакет.

На основі таких рішень тепер ми можемо знайти інтеграли I_1 , I_2 та I_3 . Такі розрахунки являють собою математично складну проблему та вони наведені у Додатку М [див. стор. 547–552]. Ми отримаємо наступні рішення:

$$\begin{aligned} I_1(E_1, E_2) &= \delta(k_1 - k_2) \cdot f_{11}(E_1, E_2) + f_{12}(E_1, E_2), \\ I_2(E_1, E_2) &= f_{21}^{(+)}(E_1, E_2) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \right|_{k=k_2+k_1} + \\ &+ f_{21}^{(-)}(E_1, E_2) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \right|_{k=k_2-k_1} + f_{22}(E_1, E_2), \\ I_3(E_1, E_2) &= \delta(k_1 - k_2) \cdot f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2), \end{aligned} \quad (13.31)$$

де

$$\begin{aligned}
f_{11}(E_1, E_2) &= \pi (A_{T,1}^* A_{T,2} + A_{R,1}^* A_{R,2} + 1), \\
f_{12}(E_1, E_2) &= \frac{\alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} - \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} - \\
&- \frac{i (A_{R,1}^* - A_{R,2})}{k_1 + k_2} + \left\{ \frac{i (A_{T,1}^* A_{T,2} e^{i(k_2 - k_1)a} + A_{R,1}^* A_{R,2} - 1)}{k_2 - k_1} + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_2 \beta_1^* + \alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2} + \\
&+ a \cdot \left\{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 - A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1 = E_2},
\end{aligned} \tag{13.32}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}^{(+)}(E_1, E_2) &= i \pi (A_{R,2} - A_{R,1}^*), \\
f_{21}^{(-)}(E_1, E_2) &= i \pi (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} - 1), \\
f_{22}(E_1, E_2) &= \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2)^2} \left\{ [(\xi_1 + \xi_2) a - 1] \alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} - \right. \\
&- \left. [(\xi_1 + \xi_2) a + 1] \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} + \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2 \right\} + \\
&+ \frac{A_{R,1}^* + A_{R,2}}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \left\{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 - A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1 = E_2} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^2} \left([(\xi_2 - \xi_1) a - 1] \alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} - \right. \right. \\
&- \left. \left. [(\xi_2 - \xi_1) a + 1] \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} + \alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2 \right) + \right. \\
&+ \frac{A_{T,1}^* A_{T,2}}{(k_2 - k_1)^2} \left([i(k_2 - k_1) a - 1] e^{i(k_2 - k_1)a} + 1 \right) + \\
&+ \left. \frac{A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} + 1}{(k_1 - k_2)^2} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2},
\end{aligned} \tag{13.33}$$

$$\begin{aligned}
f_{31}(E_1, E_2) &= \pi i k_2 (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} + 1), \\
f_{32}(E_1, E_2) &= \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \left[\alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} + \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \alpha_1^* \alpha_2 - \beta_1^* \beta_2 \right] + \\
&+ \frac{k_2 (A_{R,1}^* + A_{R,2})}{k_1 + k_2} + a \cdot \left\{ \xi_2 \beta_1^* \alpha_2 - \xi_2 \alpha_1^* \beta_2 - i k_2 A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1 = E_2} - \\
&- \left\{ \frac{k_2 (A_{T,1}^* A_{T,2} e^{i(k_2 - k_1)a} - A_{R,1}^* A_{R,2} - 1)}{k_2 - k_1} - \right. \\
&- \left. \frac{\xi_2 (\alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} + \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2)}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2}.
\end{aligned} \tag{13.34}$$

Використовуюючи отримані розв'язки для інтегралів, тепер ми знайдемо функцію $f(E_0, x)$, яка визначена у (13.20). Її рішення наведено у Додатку М.2 [див. стор. 552–559]] та її розв'язок має вигляд (М.32):

$$\begin{aligned}
f(E_0, x) &= \frac{i}{g(E_0)} \frac{\hbar}{m} J_1(E_0) \left\{ x \frac{\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \cdot J_2(E_0) + \right. \\
&+ x \cdot J_3(E_0, x) + \frac{2\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \times \\
&\times \left(\left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - J_4(E_0) \right) - J_5(E_0, x) \Big\} + \\
&+ \frac{i}{g(E_0)} \cdot \left\{ x \cdot \frac{\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot J_2(E_0) + x \cdot J_7(E_0, x) + \right. \\
&+ \frac{2\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot \left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - \\
&- \left. \frac{2\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot J_4(E_0) - J_8(E_0, x) \right\},
\end{aligned} \tag{13.35}$$

де розрахунки інтегралів $J_1(E_0) \dots J_8(E_0, x)$ приведено у (М.33) та (М.34) у Додатку М.2 [див. стор. 552–559].

13.3.1. Проблема інтерференції між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею

Повну хвильову функцію φ_{total} у першій області $x < 0$ можна переписати як суму хвилі φ_{inc} , що падає на бар'єр, та відбитої хвилі φ_{ref} :

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_{\text{inc}} + \varphi_{\text{ref}}, \quad (13.36)$$

звідки ми отримаємо повний потік:

$$j(\varphi_{\text{total}}) = \frac{i\hbar}{2m} \left[(\varphi_{\text{inc}} + \varphi_{\text{ref}}) \nabla (\varphi_{\text{inc}}^* + \varphi_{\text{ref}}^*) - \text{h. c.} \right] = j_{\text{inc}} + j_{\text{ref}} + j_{\text{mixed}}, \quad (13.37)$$

де

$$\begin{aligned} j_{\text{inc}} &= \frac{i\hbar}{2m} (\varphi_{\text{inc}} \nabla \varphi_{\text{inc}}^* - \text{h. c.}), \\ j_{\text{ref}} &= \frac{i\hbar}{2m} (\varphi_{\text{ref}} \nabla \varphi_{\text{ref}}^* - \text{h. c.}), \\ j_{\text{mixed}} &= \frac{i\hbar}{2m} (\varphi_{\text{inc}} \nabla \varphi_{\text{ref}}^* + \varphi_{\text{ref}} \nabla \varphi_{\text{inc}}^* - \text{h. c.}). \end{aligned} \quad (13.38)$$

Тут, компонента j_{mixed} описує інтерференцію між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею у першій області при $x < 0$ (далі ми будемо називати її як *змішана компонента від повного потоку* або просто *поток змішування (flux of mixing)*). З умови збереження повного потоку j_{total} ми отримаємо потік j_{tr} для хвилі, що пройшла через бар'єр, та:

$$j_{\text{inc}} = j_{\text{tr}} - j_{\text{ref}} - j_{\text{mixed}}, \quad j_{\text{tr}} = j_{\text{total}} = \text{const.} \quad (13.39)$$

Звідси можна бачити, що потік змішування вносить невизначеність у знаходження проникності та відбиття при одній та тій же відомій повній хвильовій функції.

Ми визначимо коефіцієнти проникності, відбиття та змішування так:

$$T = \frac{j_{\text{tr}}}{j_{\text{inc}}}, \quad R = \frac{j_{\text{ref}}}{j_{\text{inc}}}, \quad M = \frac{j_{\text{mixed}}}{j_{\text{inc}}}. \quad (13.40)$$

Тоді, з формул (13.39) та (13.40) отримаємо (j_{tr} та j_{ref} направлені у протилежних напрямках, а j_{inc} та j_{tr} — у однаковому напрямку):

$$|T| + |R| - M = 1. \quad (13.41)$$

Звідси ми бачимо, що умова $|T| + |R| = 1$ має сенс у квантовій механіці тільки тоді, коли не існує інтерференції між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею, тобто

$$j_{\text{mixed}} = 0. \quad (13.42)$$

13.3.2. Проникність

Припускаючи коефіцієнт γ достатньо малим, ми будемо шукати розв'язок для невідомої функції $\varphi(x)$ як

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma \varphi_1(x) = \varphi_0(x) \{1 + \gamma \phi(x)\}, \quad (13.43)$$

де

$$\phi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left[\int \varphi_0(x) f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2. \quad (13.44)$$

Знайдемо потік, що пройшов через бар'єр:

$$\begin{aligned} j_{\text{tr}} &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\varphi_{\text{tr}} \nabla \varphi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.} \right) = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\varphi_{\text{tr},0} \nabla \varphi_{\text{tr},0}^* + \gamma \varphi_{\text{tr},0} \nabla \varphi_{\text{tr},0}^* (\phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^*) + \gamma^2 \varphi_{\text{tr},0} \nabla \varphi_{\text{tr},0}^* |\phi_{\text{tr}}|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma |\varphi_{\text{tr},0}|^2 \nabla \phi_{\text{tr}}^* + \gamma^2 |\varphi_{\text{tr},0}|^2 \phi_{\text{tr}} \nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{c. c.} \right). \end{aligned} \quad (13.45)$$

Убираючи всі компоненти при γ^2 , отримаємо для потоку, що пройшов через бар'єр, наступний вираз:

$$j_{\text{tr}} = j_{\text{tr},0} + \gamma \cdot \left\{ j_{\text{tr},0} (\phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^*) + \frac{i\hbar}{2m} |\varphi_{\text{tr},0}|^2 (\nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.}) \right\}, \quad (13.46)$$

та відповідний вираз для проникності:

$$\begin{aligned} T &= \frac{j_{\text{tr},0}}{j_{\text{inc}}} + \gamma \cdot \left\{ j_{\text{tr},0} (\phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^*) + \frac{i\hbar}{2m} |\varphi_{\text{tr},0}|^2 (\nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.}) \right\} \frac{1}{j_{\text{inc}}} = \\ &= T_0 + \gamma \cdot \left\{ T_0 (\phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^*) + \frac{i\hbar}{2m} \frac{1}{j_{\text{inc}}} |\varphi_{\text{tr},0}|^2 (\nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.}) \right\}. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Перепишемо його у наступному вигляді:

$$T = T_0 + \gamma \cdot \Delta T, \quad (13.48)$$

де

$$\Delta T = T_0 (\phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^*) + \frac{i\hbar}{2m} \frac{1}{j_{\text{inc}}} |\varphi_{\text{tr},0}|^2 (\nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.}). \quad (13.49)$$

Підставляючи сюди компоненту хвильової функції відповідно до хвилі, що пройшла через бар'єр:

$$\varphi_{\text{tr},0} = A_T e^{ikx}, \quad \nabla \varphi_{\text{tr},0} = ik A_T e^{ikx}, \quad \nabla \varphi_{\text{tr},0}^* = -ik A_T^* e^{-ikx}, \quad (13.50)$$

отримаємо

$$\frac{i\hbar}{2m} |\varphi_{\text{tr},0}|^2 = i \frac{j_{\text{tr},0}}{2k}. \quad (13.51)$$

Тепер ми перепишемо розв'язок (13.49) так

$$\Delta T = T_0 \left\{ \phi_{\text{tr}} + \phi_{\text{tr}}^* + \frac{i}{2k} (\nabla \phi_{\text{tr}}^* - \text{h. c.}) \right\} = T_0 \left\{ 2 \operatorname{Re}(\phi_{\text{tr}}) + \frac{1}{k} \nabla \operatorname{Im}(\phi_{\text{tr}}) \right\}. \quad (13.52)$$

Таким чином, ми отримали наступний вираз для проникності:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \gamma \cdot \Delta T, & \Delta T &= T_0 \left\{ 2 \operatorname{Re}(\phi_{\text{tr}}) + \frac{1}{k} \nabla \operatorname{Im}(\phi_{\text{tr}}) \right\}, \\ T &= T_0 \cdot \delta T, & \delta T &= 1 + \gamma \left\{ 2 \operatorname{Re}(\phi_{\text{tr}}) + \frac{1}{k} \nabla \operatorname{Im}(\phi_{\text{tr}}) \right\}. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Будемо називати ΔT дисипативною корекцією проникності.

13.4. Аналіз тунелювання у захопленні α -частинки ядром ^{44}Ca

Будемо вивчати прояв та властивості дисипативних сил при тунелюванні через прямокутний бар'єр у задачі захоплення α -частинки ядром. Для аналізу ми виберемо ядро ^{44}Ca , на яка налітає α -частинка з наступним захопленням. Для опису взаємодії між α -частинкою та ядром ми будемо використовувати підхід [112], де параметри α -ядерного потенціалу були здобуті з орієнтацією на реакції α -захоплення. Ми визначимо межі бар'єра з внутрішньою та

зовнішньою точками повороту R_1 та R_2 для потенціалу при параметризації [112] при енергії налітаючої α -частинки 5 MeV. Отримаємо $R_1 = 8.128$ фм та $R_2 = 10.650$ фм; висота бар'єру — $V_{\max} = 6.168$ MeV (ми маємо орбітальний момент $l = 0$).

Розуміння про вплив дисипації на процеси тунелювання краще отримати на основі характеристик, які не залежать від дисипативного параметру γ [тому що цей параметр може змінюватися довільно та тому він не визначає власно властивості дисипативних процесів, що можуть виникати при тунелюванні через бар'єр, див. (13.1), стор. 308]. Таку інформацію надає нам дисипативна корекція ΔT до проникності або її відношення до проникності без дисипації $\Delta T/T_0$.

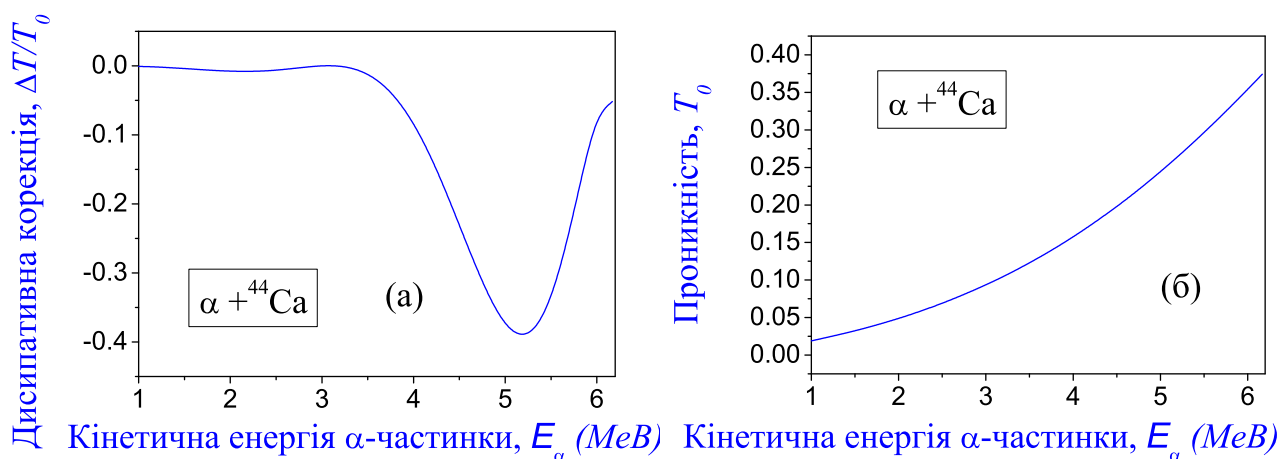


Рис.13.1 Вплив дисипативної компоненти на проникність бар'єра для α -захоплення ядром ${}^{44}\text{Ca}$. (а) Дисипативна корекція до проникності $\Delta T/T_0$, що визначена першою формулою у (13.53) [див. стор. 322]. (б) Проникність T_0 бар'єра без включення дисипативних сил [тобто без дисипативної компоненти W_A у потенціалі (13.1), див. стор. 308].

На Рис. 13.1 ми представляємо результати наших розрахунків останньої характеристики у залежності від енергії α -частинки. Аналізуючи отримані результати, ми робимо наступні висновки:

- У повній області енергій дисипативна корекція ΔT є негативною. Звідси слідує, що включення дисипативного члена W_A типу Альбрехта у потенціал (13.1) понижує проникність бар'єру. Цей результат є природним,

але він був отриманий на основі нетривіальних розрахунків на основі розробленого методу, що вказує на його ефективність.

- Ми виявляємо існування чіткого мінімуму у залежності дисипативної корекції $\Delta T/T_0$ від енергії налітаючої α -частинки при $E = 5.27$ MeV, де вплив дисипативних сил на процеси тунелювання повинен бути максимальним (існує також інший але суттєво менший мінімум у цій залежності при $E = 2.22$ MeV). При подальшому зростанні енергії вплив дисипативних сил зменшується.
- При зменшенні енергії α -частинки (з 5.27 MeV) енергія тунелювання знижується глибше під бар'єр та дисипативна корекція $\Delta T/T_0$ зменшується. Це вказує на послаблення впливу дисипативних сил на тунелювання.
- Залежність дисипативної корекції $\Delta T/T_0$ від енергії α -частинки має осциляційний характер. Така поведінка пояснюється хвильовою природою тунелювання під бар'єром.

13.5. Головні результати і висновки до Розділу 13

У даному розділі побудовано новий метод знаходження хвильової функції для квантових систем у полі одномірного потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається на основі хвильових пакетів. Метод дозволяє управляти інтенсивністю впливу дисипативних сил такого типу на процеси тунелювання завдяки довільного параметра γ . Для частинки, що тунелює через прямокутний бар'єр, метод визначає проникність у залежності від дисипативного параметра γ . Проаналізовано загальні властивості дисипативних ефектів при тунелюванні на прикладі захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca . На основі методу виявлено наступне:

1. Включення дисипативної компоненти у потенціал Альбрехта послаблює проникність бар'єра;
2. Вплив дисипативних сил такого типу на процес тунелювання має осциляційний характер у залежності від енергії α -частинки, маючи свій максимум.

Результати цих досліджень опубліковано у роботах [80, 81, 82].

ВИСНОВКИ

Головні результати досліджень, що представлені у дисертаційній роботі, полягають у наступному.

1. Побудовано нову квантову теорію гальмівного випромінювання фотонів в ядерних процесах з застосуванням до α -розпаду сферичних та деформованих ядер, розпадів ядер з вильотом протонів, розсіяння протонів та π -мезонів на ядрах, спонтанного та потрійного поділу ядер. Ця теорія є найбільш точною в описі існуючої експериментальної інформації випромінювання гальмівних фотонів у реакціях, вказаних вище. Окремі досягнення такої теорії сформульовано у розділах. Відзначимо наступне:

- Теорія вперше дозволяє вивчати експериментально деформації ядер у розпадах через аналіз спектрів випромінювання фотонів.
- Розроблений новий метод провідної гармоніки дозволяє суттєво підвищити точність розрахунків матричних елементів випромінювання у задачах, де виникають труднощі у збіжності розрахунків при визначенні спектрів (наприклад, така ситуація виникає у задачах поділу важких ядер).
- Теорія дозволяє досліджувати динаміку та геометрію вильоту фрагментів при потрійному поділу ядер через аналіз гальмівних фотонів.
- Теорія єдиним чином описує некогерентне та когерентне випромінювання при розсіянні. Так, у рамках такої єдиної теорії вперше пояснено суттєву роль некогерентного випромінювання фотонів при розсіянні протонів на ядрах та відсутність такого випромінювання при альфа-розпадах ядер (що підтверджується експериментами). Суттєвою частиною теорії є

формалізм магнітного випромінювання, аномальних магнітних моментів нуклонів, що складають ядра.

- Теорія дозволяє вивчати багатонуклонну структуру ядер у альфа-розпадах на основі аналізу гальмівних фотонів.
- Проведено перші дослідження випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні піонів (у пучках) на ядрах. Встановлено, що випромінювання фотонів високих енергій, сформоване за рахунок ядерної частини потенціалів, вносить істотний внесок у повний спектр (це вказує на те, що некулонівську взаємодію можна вивчати експериментально через аналіз вимірювань гальмівних фотонів).
- У теорії вперше реалізовано підхід до визначення потенціалів взаємодії у розсіянні протонів на ядрах, π -мезонів на ядрах через аналіз гальмівного випромінювання фотонів.

2. Побудовано новий квантово-механічний метод (що було названо методом багаторазових внутрішніх відбиттів, або методом БВВ) для опису одномірного тунелювання під бар'єром загальної форми та проходження над ним.

- Метод БВВ є найбільш точним у визначенні проникностей одномірних бар'єрів загальної форми (у порівнянні з іншими підходами).
- Метод БВВ (на відміну від інших методів) повністю використовує тести квантової механіки, що дозволяють оцінити коректність формалізму, точність розрахунків.
- Суттєвою перевагою метода БВВ є його фокус на аналіз бар'єрів довільної форми, що дозволяє вивчати реалістичні потенціали взаємодій у ядерних задачах.

- Метод БВВ застосовано до опису процесів вильоту протона з ядра (протонний розпад), α -розпаду, α -захоплення, дослідження особливостей злиття. За допомогою такого метода, суттєво покращено опис експериментальних даних вказаних реакцій вище (у деяких випадках більш ніж на порядок у порівнянні з іншими підходами).
- При описі α -розпаду та оберненого процесу α -захоплення у формалізмі БВВ вперше в єдиному підході об'єднані тунелювання крізь бар'єр та осциляції во внутрішній області ядра. Але такий точний аналітичний розв'язок (отриманий вперше) включає ще один додатковий новий множник, що описує просторовий розподіл α -частинки у межах ядра (його не існувало в підході Гамова до визначення періодів напіврозпадів для α -розпадів). На прикладі α -захоплення ядрами ^{44}Ca оцінено роль всіх цих процесів при визначенні ймовірності існування складеного ядра.
- Метод БВВ перевірено при його застосуванні до задач квантової космології, де використовується ідея тунелювання при описі еволюції Всесвіту на першому етапі. Методом БВВ отримано збіжність розрахунків проникності (та інших відповідних характеристик, з тестами та демонстрацією точності) для бар'єрів зі спадаючим потенціалом у безмежності (такої ситуації немає у задачах розсіяння та розпадів в ядерній фізиці). Виявлено, що метод БВВ описує процеси тунелювання у таких задачах з більш високою точністю у порівнянні з іншими підходами, також пропонує тести.

3. Розроблено новий метод визначення хвильової функції для тунелювання частинки у полі одномірного потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається на основі хвильових пакетів [80, 81, 82]. Метод дозволяє управляти інтенсивністю впливу дисипативних сил такого типу на процеси тунелювання завдяки уведеного довільного параметра γ . Для частинки, що тунелює через прямокутний бар'єр, метод визначає проникність

у залежності від дисипативного параметра γ . Проаналізовано властивості дисипативних ефектів при тунелюванні на прикладі захоплення α -частинки ядром ^{44}Ca . Виявлено, що (1) включення дисипативної компоненти у потенціал Альбрехта послаблює проникність бар'єра; (2) вплив дисипативних сил такого типу на процес тунелювання має осциляційний характер у залежності від енергії α -частинки.

Список використаних джерел

1. J. A. Edgington and B. Rose, Nuclear bremsstrahlung from 140 MeV protons, Nucl. Phys. **89** (3), 523–552 (1966).
2. J. A. Pinston, D. Barneoud, V. Bellini, S. Drissi, J. Guillot, J. Julien, M. Kwato Njock, M. Maurel, H. Nifenecker, F. Schussler, and J. P. Vorlet, Nuclear bremsstrahlung production in proton-nucleus reactions at 168 and 200 MeV, Phys. Lett. **B 218** (2), 128–132 (1989).
3. J. A. Pinston, D. Barneoud, V. Bellini, S. Drissi, J. Guillot, J. Julien, H. Nifenecker, and F. Schussler, Proton-deuterium bremsstrahlung at 200 MeV, Phys. Lett. **B 249** (3–4), 402–405 (1990).
4. J. Clayton, W. Benenson, M. Cronqvist, R. Fox, D. Krofcheck, R. Pfaff, T. Reposeur, J. D. Stevenson, J. S. Winfield, B. Young, M. F. Mohar, C. Bloch, and D. E. Fields, High energy gamma ray production in proton-induced reactions at 104, 145, and 195 MeV, Phys. Rev. **C45** (4), 1815–1821 (1992).
5. D. R. Chakrabarty, V. M. Datar, Y. K. Agarwal, C. V. K. Baba, M. S. Samant, I. Mazumdar, A. K. Sinha, and P. Sugathan, Hard photon production in $p + {}^{197}\text{Au}$ reaction at $E_p = 27$ MeV, Phys. Rev. **C60** (2), 024606 (1999).
6. M. J. van Goethem, L. Apechetche, J. C. S. Bacelar, H. Delagrange, J. Díaz, D. d'Enterria, M. Hoefman, R. Holzmann, H. Huisman, N. Kalantar-Nayestanaki, A. Kugler, H. Löhner, G. Martínez, J. G. Messchendorp, R. W. Ostendorf, S. Schadmand, R. H. Siemssen, R. S. Simon, Y. Schutz, R. Turrisi, M. Volkerts, V. Wagner, and H. W. Wilschut, Suppression of soft nuclear bremsstrahlung in proton-nucleus collisions, Phys. Rev. Lett. **88** (12), 122302 (2002).

7. F. S. Dietrich, J. C. Browne, W. J. O'Connell, and M. J. Kay, Spectrum of γ rays in the 8 to 20-MeV range from ^{252}Cf spontaneous fission, *Phys. Rev.* **C10** (2), 795–802 (1974).
8. J. Kasagi, H. Hama, K. Yoshida, M. Sakurai, and K. Ishii, Nucleus-nucleus bremsstrahlung observed in the spontaneous fission of ^{252}Cf . Proc. Fifth Int. Conf. Clustering Aspects in Nucl. and Subnucl. Systems (Kyoto, 1988). *Journ. Phys. Soc. Jpn. Suppl.* **58**, 620–625 (1989).
9. C. J. Luke, C. A. Gossett, and R. Vandenbosch, Search for high energy γ rays from the spontaneous fission of ^{252}Cf , *Phys. Rev.* **C44** (4), 1548–1554 (1991).
10. H. van der Ploeg, R. Postma, J. C. Bacelar, T. van der Berg, V. E. Iacob, J. R. Jongman, A. van der Woude, Large gamma anisotropy observed in the ^{252}Cf spontaneous fission process, *Phys. Rev. Lett.* **68** (21), 3145–3148 (1992).
11. D. J. Hofman, B. B. Back, C. P. Montoya, S. Schadmand, R. Varma and P. Paul, High energy γ rays from ^{252}Cf spontaneous fission, *Phys. Rev.* **C47** (3), 1103–1107 (1993).
12. H. van der Ploeg, J. C. S. Bacelar, A. Buda, C. R. Laurens, A. van der Woude, J. J. Gaardhoje, Z. Zelazny, G. van 't Hof, and N. Kalantar-Nayestanaki, Emission of photons in spontaneous fission of ^{252}Cf , *Phys. Rev.* **C52** (4), 1915–1923 (1995).
13. V. A. Varlachev, G. N. Dudkin, and V. N. Padalko, Study of the high-energy part of the spectrum of γ rays from the neutron-induced fission reaction of ^{235}U nuclei, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **71** (11), 1635–1639 (2007).
14. N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, S. S. Markochev, E. A. Tsvetkov, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, G. Giardina, and M. V. Romaniuk, New experimental method of investigation the rare nuclear transformati-

- ons accompanying atomic processes: Bremsstrahlung emission in spontaneous fission of ^{252}Cf , *Int. J. Mod. Phys.* **E19** (5–6), 1183–1188 (2010).
15. M. K. Sharan, Y. K. Agarwal, C. V. K. Baba, D. R. Chakrabarty, and V. M. Datar, Ultradipole photon production in 40 and 50 MeV α -nucleus collisions, *Phys. Rev.* **C48** (6), 2845–2854 (1993).
 16. A. D'Arrigo, N. V. Eremin, G. Fazio, G. Giardina, M. G. Glotova, T. V. Klochko, M. Sacchi, and A. Taccone, Investigation of bremsstrahlung emission in α decay of heavy nuclei, *Phys. Lett.* **B332** (1–2), 25–30 (1994).
 17. J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki, and H. Yuki, Bremsstrahlung emission in α -decay and tunneling motion of α -particle, *Journ. Phys.* **G23** (10), 1451–1457 (1997).
 18. J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki, and H. Yuki, Bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po : Do α -particles emit photons in tunneling?, *Phys. Rev. Lett.* **79** (3), 371–374 (1997).
 19. N. V. Eremin, G. Fazio, and G. Giardina, Comment on “Bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po : Do α -particles emit photons in tunneling?”, *Phys. Rev. Lett.* **85** (14), 3061 (2000).
 20. J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki, and H. Yuki, Replay on Comment on “Bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po : Do α -particles emit photons in tunneling?”, *Phys. Rev. Lett.* **85** (14), 3062 (2000).
 21. H. Boie, H. Scheit, U. D. Jentschura, F. Köck, M. Lauer, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, and D. Schwalm, Bremsstrahlung in α decay reexamined, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2), 022505 (2007).
 22. J. Stevenson, K. B. Beard, W. Benenson, J. Clayton, E. Kashy, A. Lampis, D. J. Morrissey, M. Samuel, R. J. Smith, C. L. Tam, and J. S. Winfield, High-

- Energy Gamma-Ray Emission in Heavy-Ion Collisions, *Phys. Rev. Lett.* **57** (5), 555–558 (1986).
23. S. J. Luke, R. Vandenbosch, W. Benenson, J. Clayton, K. Joh, D. Krofcheck, T. K. Murakami, and J. D. Stevenson, High energy γ rays from $^{14}\text{N} + \text{nat Ag}$ at 35 MeV/nucleon, *Phys. Rev.* **C47** (3), 1211–1218 (1993).
24. D. Pierroutsakou, B. Martin, G. Inglima, A. Boiano, A. De Rosa, M. Di Pietro, M. La Commara, R. Mordente, M. Romoli, M. Sandoli, M. Trotta, E. Vardaci, T. Glodariu, M. Mazzocco, C. Signorini, L. Stroe, V. Baran, M. Colonna, M. Di Toro, and N. Pellegriti, Evolution of the prompt dipole γ -ray emission with incident energy in fusion reactions, *Phys. Rev.* **C71** (5), 054605 (2005).
25. В. А. Плюйко, В. А. Поярков, Ядерное тормозное излучение в реакциях с протонами, *ЭЧАЯ* **18** (Вып. 2), 374–418 (1987).
26. Амусья М. Я. *Тормозное излучение* (Энергоатомиздат, Москва, 1990), 208 стр.
27. M. Ya. Amusia, “Atomic” bremsstrahlung, *Phys. Rep.* **162** (5), 249–335 (1988).
28. М. Я. Амусья, В. М. Буймистров, Б. А. Зон, В. Н. Цытович, В. А. Астапенко, Е. Б. Клейман, А. В. Король, Ю. А. Кротов, А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, И. М. Ойрингель, А. В. Соловьев, В. И. Коган, *Поляризованное тормозное излучение частиц и атомов* (Наука, Москва, 1987), 335 стр.
29. S. D. Kurgalin, Yu. M. Chuvilskiy, and T. A. Churakova, *Izv. Acad. Nauk: Ser. Fiz.* **65**, 672 (2001) [in Russian].
30. С. Д. Кургалин, Ю. М. Чувильский, Т. А. Чуракова, Моделирование ха-

- рактеристик тормозного γ -излучения в α -распадах ^{226}Ra и ^{214}Po , Вестник ВГУ, Сер. Физ. Мат. **1**, 21–26 (2004).
31. I. V. Kopytin, M. A. Dolgoplov, T. A. Churakova, and A. S. Kornev, Electromagnetic radiation in nucleon-nucleus collisions, *Phys. At. Nucl.* **60** (5), 776–785 (1997) [Rus. Ed.: *Яд. Физ.* **60** (Вып. 5), 869–879 (1997)].
 32. И. С. Баткин, И. В. Копытин, Т. А. Чуракова, Внутреннее тормозное излучение, сопровождающее α -распад, *Ядер. Физ.* **44** (Вып. 6 (12)), 1454–1458 (1986).
 33. A. Maj, J. J. Gaardhøje, A. Ataç, S. Mitarai, J. Nyberg, A. Virtanen, A. Bracco, F. Camera, B. Million, and M. Pignanelli, Angular distribution of photons from the decay of the GDR in hot and rotating light Yb nuclei from exclusive experiments, *Nucl. Phys.* **A571** (1), 185–220 (1994).
 34. A. Maj, J. J. Gaardhøje, B. Herskind, G. Sletten, J. Nyberg, A. Bracco, B. Million, and M. Pignanelli, Phase-space selection of the GDR gamma ray emission from hot ^{162}Yb nuclei, *Phys. Lett.* **291** (4), 385–390 (1992).
 35. A. Bracco, F. Camera, M. Mattiuzzi, B. Million, M. Pignanelli, J. J. Gaardhøje, A. Maj, T. Ramsøy, T. Tveter, and Z. Želazny, Increase in width of the Giant Dipole Resonance in hot nuclei: Shape change or collisional damping?, *Phys. Rev. Lett.* **74** (19), 3748–3751 (1995).
 36. F. Camera, A. Bracco, S. Leoni, B. Million, M. Mattiuzzi, M. Pignanelli, A. Maj, M. Kmiecik, R. Bark, J. Bearden, J. J. Gaardhøje, W. E. Ormand, T. Lönnroth, and R. Österbacka, Probing the shape of hot ^{194}Hg at high spins with the giant dipole resonance decay in selected cascades, *Phys. Rev.* **C60** (1), 014306 (1999).
 37. T. S. Tveter, J. J. Gaardhøje, A. Maj, T. Ramsøy, A. Ataç, J. Bacelar, A. Bracco, A. Buda, F. Camera, B. Herskind, W. Korten, W. Królas,

- A. Menthe, B. Million, H. Nifenecker, M. Pignanelli, J. A. Pinston, H. v. D. Ploeg, F. Schussler, and G. Sletten, Collective Dipole Motion in highly excited ^{272}Hs ($Z = 108$) nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **76** (7), 1035–1038 (1996).
38. G. Benzoni, A. Bracco, F. Camera, S. Leoni, B. Million, A. Maj, A. Algora, A. Axelsson, M. Bergström, N. Blasi, M. Castoldi, S. Frattini, A. Gadea, B. Herskind, M. Kmiecik, G. Lo Bianco, J. Nyberg, M. Pignanelli, J. Styczen, O. Wieland, M. Zieblinski, and A. Zucchiatti, Effect of E1 decay in the population of superdeformed structures, *Phys. Lett.* **B540** (3–4), 199–206 (2002).
39. A. Maj, M. Kmiecik, A. Bracco, F. Camera, P. Bednarczyka, B. Herskind, S. Brambilla, G. Benzoni, M. Brekiesz, D. Curien, G. De Angelis, E. Farnea, J. Grębosz, M. Kicin'ska-Habior, S. Leoni, W. Męczyn'ski, B. Million, D. R. Napoli, J. Nyberg, C. M. Styczen', O. Wieland, M. Ziębliński, K. Zuber, N. Dubray, J. Dudek, and K. Pomorski, Evidence for the Jacobi shape transition in hot ^{46}Ti , *Nucl. Phys.* **A731**, 319–326 (2004).
40. M. Kmiecik, A. Maj, B. Million, Brekiesz M., W. Królas, W. Męczyński, J. Styczeń, M. Ziębliński, A. Bracco, F. Camera, G. Benzoni, S. Leoni, O. Wieland, S. Brambilla, B. Herskind, M. Kicińska-Habior, N. Dubray, J. Dudek, and N. Schunck, Probing nuclear shapes close to the fission limit with the giant dipole resonance in ^{216}Rn , *Phys. Rev.* **C70** (6), 064317 (2004).
41. O. Wieland, A. Bracco, F. Camera, G. Benzoni, N. Blasi, S. Brambilla, F. C. L. Crespi, S. Leoni, B. Million, R. Nicolini, A. Maj, P. Bednarczyk, J. Grebosz, M. Kmiecik, W. Meczynski, J. Styczen, T. Aumann, A. Banu, T. Beck, F. Becker, L. Caceres, P. Doornenbal, H. Emling, J. Gerl, H. Geissel, M. Gorska, O. Kavatsyuk, M. Kavatsyuk, I. Kojouharov, N. Kurz, R. Lozeva, N. Saito, T. Saito, H. Schaffner, H. J. Wollersheim, J. Jolie,

- P. Reiter, N. Warr, G. deAngelis, A. Gadea, D. Napoli, S. Lenzi, S. Lunardi, D. Balabanski, G. LoBianco, C. Petrache, A. Saltarelli, M. Castoldi, A. Zucchiatti, J. Walker, and A. Bürger, Search for the Pygmy Dipole Resonance in ^{68}Ni at 600 MeV/nucleon, *Phys. Rev. Lett.* **102** (9), 092502 (2009).
42. T. Papenbrock and G. F. Bertsch, Bremsstrahlung in α -decay, *Phys. Rev. Lett.* **80** (19), 4141–4144 (1998).
43. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, курс Теоретической физики*, т. 3 (Наука, Москва, 1989), 768 с. [in Russian; Eng. variant: Oxford, Uk, Pergamon, 1982].
44. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1 (Мир, Москва, 1974), 341 с. [in Russian; Eng. variant: Springer-Verlag, 1971].
45. К. С. Кунц, *Численный анализ* (Техника, Киев, 1964), 389 стр. [Eng. Ed.: Kunz K. S. Numerical analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957].
46. F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics, *Phys. Reports* **251** (5–6), 267–385 (1995).
47. F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry and quantum mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001), 210 p.
48. К. Шадан, П. Сабатье, *Обратные задачи в квантовой теории рассеяния* (Мир, Москва, 1980), 408 с. [in Russian; Engl. ed.: K. Chadan, P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer-verlag, New York, 1977. – 377 p.]
49. Б. Н. Захарьев, Н. А. Костов, Е. Б. Плеханов, Точно решаемые одно- и многоканальные модели (уроки квантовой интуиции), *ЭЧАЯ* **21** (Вып. 4), 914–962 (1990).

50. Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов, Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами (уроки квантовой интуиции), ЭЧАЯ **25** (Вып. 6), 1561–1597 (1994).
51. Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов, К качественной теории элементарных преобразований одно- и многоканальных квантовых систем в подходе обратной задачи (их конструирование с заданными спектральными параметрами), ЭЧАЯ **30** (Вып. 2), 277–320 (1999).
52. Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов, Спектроскопия, потенциальные барьеры, резонансы (новые успехи квантового дизайна), ЭЧАЯ **33** (Вып. 2), 348–392 (2002).
53. Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько, *Потенциалы и квантовое рассеяние: Прямая и обратная задачи* (Энергоатомиздат, Москва, 1985), 224 стр.
54. С. П. Майданюк, *Методи часового аналізу процесів тунелювання у ядерних зіткненнях та розпадах*, дисертація к.ф.м.н. (Інститут ядерних досліджень НАНУ, Київ, 2003), с. 147.
55. <http://www.nndc.bnl.gov>
56. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Does sub-barrier bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po exist? Prog. Theor. Phys. **109** (2), 203–211 (2003).
57. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Angular analysis of bremsstrahlung in α -decay, Europ. Phys. Journ. **A28** (3), 283–294 (2006).
58. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, and C. Saccá, Bremsstrahlung emission during α -decay of ^{226}Ra Mod. Phys. Lett. **A23** (31), 2651–2663 (2008).

59. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, C. Saccá, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, Bremsstrahlung emission accompanying alpha-decay of ^{214}Po , *Europ. Phys. Journ.* **A36** (1), 31–36 (2008).
60. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying α -decay of deformed nuclei, *Nucl. Phys.* **A823** (1–4), 38–46 (2009).
61. S. P. Maydanyuk, Multipolar approach for description of bremsstrahlung during α -decay and unified formula of the bremsstrahlung probability, *The Open Nucl. Part. Phys. J* **2**, 17–33 (2009) [open access].
62. С. П. Майданюк, Мультипольний підхід до опису гальмівного випромінювання при α -розпаді, *Журн. Фіз. Досл.* **13** (№ 3), 3201 (2009) [15 с., укр.].
63. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous of ^{252}Cf , *Phys. Rev.* **C82** (1), 014602 (2010) [9 pages].
64. S. P. Maydanyuk, Multipolar model of bremsstrahlung accompanying proton decay of nuclei, *Jour. Phys.* **G38** (8), 085106 (2011).
65. S. P. Maydanyuk, Model for bremsstrahlung emission accompanying interactions between protons and nuclei from low energies up to intermediate energies: Role of magnetic emission, *Phys. Rev.* **C86** (1), 014618 (2012) [21 pages].
66. S. P. Maydanyuk and P.-M. Zhang, New approach to determine proton-nucleus interactions from experimental bremsstrahlung data, *Phys. Rev.* **C91** (2), 024605 (2015) [20 pages].

67. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New approach for obtaining information on the many-nucleon structure in α decay from accompanying bremsstrahlung emission, *Phys. Rev.* **C93** (1), 014617 (2016) [14 pages].
68. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Manifestation of the important role of nuclear forces in the emission of photons in pion scattering off nuclei, *Phys. Rev.* **C98** (5), 054613 (2018) [12 pages].
69. X. Liu, S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L. Liu, First investigations of hypernuclei in reactions via analysis of bremsstrahlung photons, *Phys. Rev.* **C99** (6), 064614 (2019) [24 pages].
70. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Nucleon microscopy in proton-nucleus scattering via analysis of bremsstrahlung emission, *Phys. Rev.* **C99** (6), 064602 (2019) [31 pages].
71. F. Cardone, S. P. Maydanyuk, R. Mignani, and V. S. Olkhovsky, Multiple internal reflections during particle and photon tunneling, *Found. Phys. Lett.* **19** (5), 441–457 (2006).
72. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Проблема проникності бар'єрів у задачі протонного розпаду: повністю квантовий підхід та початкові умови розпаду, *Журн. Фіз. Досл.* **14** (4), 4002 (2011) [15 с., укр.].
73. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Problem of nuclear decay by proton emission in fully quantum consideration: Calculations of penetrability and role of boundary condition, *Journ. Mod. Phys.* **2** (6), 572–585 (2011).
74. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Метод багаторазових внутрішніх відбиттів як засіб визначення ймовірностей злиття в задачах захоплення альфа-частинок ядрами, *Журн. Фіз. Досл.* **18** (1), 1001 (2011) [11 с., укр.].

75. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and S. V. Belchikov, Quantum design using a multiple internal reflections method in a study of fusion processes in the capture of alpha-particles by nuclei, *Nucl. Phys.* **A940**, 89–118 (2015).
76. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New quasibound states of the compound nucleus in α -particle capture by the nucleus, *Phys. Rev.* **C96** (1), 014602 (2017) [13 pages].
77. S. P. Maydanyuk, Wave function of the Universe in the early stage of its evolution, *Europ. Phys. Journ.* **C 57** (4), 769–784 (2008).
78. S. P. Maydanyuk, A fully quantum method of determination of penetrability and reflection coefficients in quantum FRW model with radiation, *Int. Journ. Mod. Phys.* **D19** (4), 392–435 (2010).
79. S. P. Maydanyuk, Resonant structure of the early-universe space-time, *Eur. Phys. Journ. Plus* **126** (8), 76–94 (2011).
80. В. С. Ольховский, С. П. Майданюк, Э. Реками, О несамосопряженных операторах в описании наблюдаемых в квантовой теории и ядерной физике, *ЭЧАЯ* **41** (Вып. 4), 951–995 (2010) [Eng.: *Physics of Particles and Nuclei* **41** (4), 508–530 (2010)].
81. E. Recami, V. S. Olkhovsky, and S. P. Maydanyuk, On non-selfadjoint operators for observables in quantum mechanics and quantum field theory, *Int. Journ. Mod. Phys.* **A25** (9), 1785–1818 (2010).
82. С. П. Майданюк, Тунелювання крізь бар'єри Альбрехта з дисипативними компонентами, *Журн. Фіз. Досл.* **19** (3), 3001 (2015).
83. S. P. Maydanyuk, SUSY-hierarchy of one-dimensional reflectionless potentials, *Annals Phys.* **316** (2), 440–465 (2005).

84. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Bremsstrahlung in alpha-decay: Angular analysis of spectra, *Prob. At. Sci. Tech.. Ser.: Nucl. Phys. Inv.* **44** 5, 19–21 (2004).
85. G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Giardina, G. Fazio, C. Saccá, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, and D. A. Smirnov, Radiation of bremsstrahlung accompanying the α -decay of heavy nuclei, *Radiation Effects and Defects in Solid* **164** (5–6), 283–286 (2009).
86. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying decays and spontaneous fission of heavy nuclei, *Int. Journ. Mod. Phys.* **E19** (5), 1189–1196 (2010).
87. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of photons accompanying ternary fission of ^{252}Cf , *Journ. Phys.: Conf. Ser.* **282**, 012016 (2011).
88. S. P. Maydanyuk, Quantum method of determination of penetrability in FRW model with radiation, *Visn. Kiev. Univ., Ser.: Fiz. Mat. Nauk.* **3**, 47–52 (2010).
89. S. P. Maydanyuk, New exactly solvable reflectionless potentials of Gamov's type, *Surveys in High Energy Physics* **19** (3–4), 175–192 (2004).
90. S. P. Maydanyuk, One-dimensional inverse power reflectionless potential $V(x) = \text{const} \cdot |x - x_0|^{-n}$, *Prob. At. Scienc. Tech. Ser: Nucl. Phys. Inv.* **44** (5), 22–25 (2004).
91. S. P. Maydanyuk, Quantum mechanics of nuclear decays. Nuclear Science of the Series “Energy Science and Technology” (Studium Press LLC, USA, 2014), **4**, 428 [33 pages].

92. S. P. Maydanyuk, A. Del Popolo, V. S. Olkhovsky, and E. Recami, A Fully Quantum Model of Big Bang. Chapter in book “Quantum Mechanics” (Intech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
93. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Full Quantum Study of the FRW Model with Radiation and Chaplygin Gas. Chapter in book “The Big Bang: Theory, Assumptions and Problems”, pp. 185–196 (Nova Publisher, Jason R. O’Connell and Alice L. Hale Ed., ISBN: 978-1-61324-577-4, 2012).
94. V. S. Olkhovsky, E. Recami, and S. P. Maydanyuk, Time as Quantum Observable, Canonical Conjugated to Energy. Chapter in book “Measurements in Quantum Mechanics” (InTech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
95. S. P. Maydanyuk, *Nuclear bremsstrahlung: methods of quantum mechanics and electrodynamics in tasks of emission of photons* (Palmarium Academic Publishing, Saarbrücken, 2012), 148 p.
96. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Method of determination of the most probable coordinate of formation of α -particle in α -decay, 25 p., arXiv: 0805.4165.
97. В. В. Каманин, А. Куглер, Ю. Э. Пенионжкевич, И. С. Баткин, И. В. Копытин, Эмиссия высокоэнергетических гамма-квантов в реакциях с тяжелыми ионами при нерелятивистских энергиях, ЭЧАЯ **20** (Вып. 4), 743–829 (1989).
98. M. I. Dyakonov and I. V. Gornyi, Electromagnetic radiation by a tunneling charge, Phys. Rev. Lett. **76** (19), 3542–3545 (1996).
99. M. I. Dyakonov, Bremsstrahlung spectrum in α decay, Phys. Rev. **C60** (3), 037602 (1999) [4 pages].

100. N. Takigawa, Y. Nozawa, K. Hagino, A. Ono, and D. M. Brink, Bremsstrahlung in α decay, *Phys. Rev.* **C59** (2), R593–R597 (1999).
101. U. D. Jentschura, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, H. Boie, H. Scheit, and D. Schwalm, Quasiclassical description of bremsstrahlung accompanying α decay including quadrupole radiation, *Phys. Rev.* **C77** (1), 014611 (2008) [7 pages].
102. C. A. Bertulani, D. T. de Paula and V. G. Zelevinsky, Bremsstrahlung radiation by a tunneling particle: A time-dependent description, *Phys. Rev.* **C60** (3), 031602 (1999) [4 pages].
103. S. Misicu, M. Rizea, and W. Greiner, Emission of electromagnetic radiation in α -decay, *Journ. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **27** (5), 993–1003 (2001).
104. W. van Dijk and Y. Nogami, Model study of bremsstrahlung in alpha decay, *Few-body Systems Supplement* **14**, 229–232 (2003).
105. O. Serot, N. Carjan, and D. Strottman, Transient behaviour in quantum tunneling: Time-dependent approach to alpha decay, *Nucl. Phys.* **A569** (3), 562–574 (1994).
106. W. van Dijk and Y. Nogami, Novel expression for the wave function of a decaying quantum systems, *Phys. Rev. Lett.* **83** (15), 2867–2871 (1999).
107. W. van Dijk and Y. Nogami, Analytical approach to the wave function of a decaying quantum system, *Phys. Rev.* **C65** (2), 024608 (2002) (14 pages).
108. B. Ivlev and V. Gudkov, New enhanced tunneling in nuclear processes, *Phys. Rev.* **C69** (3), 037602 (2004) [4 pages].
109. V. V. Flambaum and V. G. Zelevinsky, Radiation corrections increase tunneling probability, *Phys. Rev. Lett.* **83** (16), 3108–3111 (1999).

110. F. F. Karpeshin and M. B. Trzhaskovskaya, Experimental aspects of the adiabatic approach in estimating the effect of electron screening on alpha decay, *Phys. Atom. Nucl.* **78** (9), 993–1000 (2015) [*Yad. Fiz.* **78** (12), 1055–1063 (2015)].
111. F. F. Karpeshin, Influence of electron screening on α decay, *Phys. Rev.* **C87** (5), 054319 (2013).
112. V. Yu. Denisov and H. Ikezoe, Alpha-nucleus potential for alpha-decay and sub-barrier fusion, *Phys. Rev.* **C72** (5), 064613 (2005).
113. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля* (Наука, Москва, 1980), 320 стр.
114. С. Де Бенедетти, *Ядерные взаимодействия* (Атомиздат, Москва, 1968), 475 стр. [in Russian; Eng. variant: S. de Benedetti, *Nuclear Interactions*, John Wiley and Sons, Inc., New York - London - Sydney].
115. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, курс Теоретической физики, т. 4 (Наука, Москва, 1989), 704 стр. [in Russian; Eng. variant: Oxford, Uk, Pergamon, 1982. – 652 p.].
116. И. А. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра*, т. 2 (Атомиздат, Москва, 1973), 348 стр. [in Russian; Engl.: J. M. Eisenberg, W. Greiner, *Excitation mechanisms of the nucleus. Electromagnetic and weak interactions*, Amsterdam-London: North-Holland publishing company, 1970].
117. S. Åberg, P. B. Semmes, and W. Nazarewicz, Spherical proton emitters, *Phys. Rev.* **C56** (4), 1762–1773 (1997).
118. K. Heyde, *The Nuclear Shell Model* (Springer Verlag, Berlin, 1990).
119. B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, Half-lives of favored alpha decays from nuclear ground states, *Atom. Dat. Nucl. Dat. Tabl.* **54** (1), 53–74 (1993).

120. S. Peltonen, D. S. Delion, and J. Suhonen, α -decay spectroscopy of deformed nuclei reexamined, *Phys. Rev.* **C78** (3), 034608 (2008) [7 pages].
121. T. Ohtsuki, H. Yuki, K. Hirose, and T. Mitsugashira, Status of the electron accelerator for radioanalytical studies at Tohoku University, *Czech. Journ. Phys. Suppl.* **D56**, D391–D398 (2006).
122. W. So and Y. Kim, Energy and charge dependency for bremsstrahlung in α -decay, *Journ. Korean Phys. Soc.* **37** (3), 202–208 (2000).
123. E. V. Tkalya, Bremsstrahlung in α -decay and “interference of space regions”, *Phys. Rev.* **C60** (5), 054612–054615 (1999).
124. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента* (Наука, Ленинград, 1975), 439 стр.
125. P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki, Nuclear Ground-State Masses and Deformations, *At. Dat. Nucl. Dat. Tabl.* **59** (2), 185–381 (1995).
126. A. Sobiczewski and K. Pomorski, Description of structure and properties of superheavy nuclei, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58** (1), 292–349 (2007).
127. M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix, and J. L. Norton, New calculation of fission barriers for heavy and superheavy nuclei, *Phys. Rev.* **C5** (3), 1050–1077 (1972).
128. G. Royer, On the coefficients of the liquid drop model mass formulae and nuclear radii, *Nucl. Phys.* **A807** (3–4), 105–118 (2008).
129. G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, and A. H. Wapstra, The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties, *Nucl. Phys.* **A 729** (1), 3–128 (2003).

130. G. Audi, A. H. Wapstra, and C. Thibault, The AME2003 atomic mass evaluation: (II). Tables, graphs and references, Nucl. Phys. **A729** (1), 337–676 (2003).
131. Z. Büyükmumcu and M. Kildir, Monte Carlo calculation of the de-excitation of fission fragments of $^{252}\text{Cf}(\text{sf})$ within multimodal random neck rupture model, Phys. Rev. **C74** (5), 054613 (2006) [12 pages].
132. C. Budtz-Jorgensen and H.-H. Knitter, Simultaneous investigation of fission fragments and neutrons in ^{252}Cf , Nucl. Phys. **A490** (2), 307–328 (1988).
133. A. V. Daniel, G. M. Ter-Akopian, J. H. Hamilton, A. V. Ramayya, J. Kormicki, G. S. Popeko, A. S. Fomichev, A. M. Rodin, Yu. Ts. Oganessian, J. D. Cole, J. K. Hwang, Y. X. Luo, D. Fong, P. Gore, M. Jandel, J. Kliman, L. Krupa, J. O. Rasmussen, S. C. Wu, I. Y. Lee, M. A. Stoyer, R. Donangelo, and W. Greiner, Ternary fission of ^{252}Cf : 3368 KeV γ radiation from ^{10}Be fragments, Phys. Rev. **C69** (4), 041305 (2004).
134. V. I. Zagrebaev, A. V. Karpov, and W. Greiner, True ternary fission of superheavy nuclei, Phys. Rev. **C81** (4), 044608 (2010).
135. F. F. Karpeshin, Coaxial fission of nuclei to three commensurate fragments, Phys. Atom. Nucl. **81** (2), 157–161 (2018) [Ядерная Физика **81** (2), 155–159 (2018)].
136. F. F. Karpeshin, True ternary fission and the rotation effect, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **81** (10), 1207–1210 (2017) [Изв. Росс. Акад. Наук. Сер. Физ. **81** (10), 1350–1353 (2017)].
137. F. F. Karpeshin, Ternary fission of nuclei into comparable fragments, Phys. Atom. Nucl. **78** (5), 548–550 (2015) [Ядерная Физика **78**, 591–594 (2015)].

138. J. R. Nix, Further studies in the liquid-drop theory on nuclear fission, Nucl. Phys. **A130** (2), 241–292 (1969).
139. N. V. Eremin, *Emission of photons in spontaneous fission of ^{252}Cf* , Private communication, 5 p. (2010).
140. S. A. Gurvitz and G. Kälbermann, Decay width and the shift of a quasi-stationary state, Phys. Rev. Lett. **59** (3), 262–265 (1987).
141. B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, Ground state proton emission from heavy nuclei, Phys. Rev. **C45** (4), 1688–1692 (1992).
142. H. Esbensen and C. N. Davids, Coupled-channels treatment of deformed proton emitters, Phys. Rev. **C63** (1), 014315 (2000) [13 pages].
143. K. Hagino, Role of dynamical particle-vibration coupling in reconciliation of the $d_{3/2}$ puzzle for spherical proton emitters, Phys. Rev. **C64** (4), 041304(R) (2001) [5 pages].
144. S. A. Gurvitz, P. B. Semmes, W. Nazarewicz, and T. Vertse, Modified two-potential approach to tunneling problems, Phys. Rev. **A69** (4), 042705 (2004) [8 pages].
145. D. S. Delion, R. J. Liotta, and R. Wyss, Systematics of proton emission, Phys. Rev. Lett. **96** (7), 072501 (2006),
146. J. M. Dong, H. F. Zhang, and G. Royer, Proton radioactivity within a generalized liquid drop model, Phys. Rev. **C79** (5), 054330 (2009) [6 pages].
147. D. S. Delion, Universal decay rule for reduced widths, Phys. Rev. **C80** (2), 024310 (2009) [7 pages].
148. F. D. Jr. Becchetti and G. W. Greenlees, Nucleon-nucleus optical-model parameters, $A > 40$, $E < 50$ MeV, Phys. Rev. **182** (4), 1190–1209 (1969).

149. Dao T. Khoa and G. R. Satchler, Generalized folding model for elastic and inelastic nucleus-nucleus scattering using realistic density dependent nucleon-nucleon interactions, *Nucl. Phys.* **A668** (1–4), 3–41 (2000).
150. E. V. Tkalya, Bremsstrahlung spectrum for α decay and quantum tunneling, *Journ. Exp. Theor. Phys.* **89** (2), 208–218 (1999) [Translation: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **116**, 390–409 (1999)].
151. M. Ya. Amusia, B. A. Zon, and I. Yu. Kretinin, Polarization bremsstrahlung in α decay, *Journ. Exp. Theor. Phys.* **105** (2), 343–346 (2007) [Translation: *Zhurn. Eksp. Teor. Fiz.* **132** (2), 387–391 (2007)].
152. H. W. Sobel, A. A. Hruschka, W. R. Kropp, J. Lathrop, F. Reines, M. F. Crouch, B. S. Meyer, and J. P. F. Sellschop, High-energy gamma rays from spontaneous fission of ^{238}U , *Phys. Rev.* **C7** (4), 1564–1579 (1973).
153. H. Van der Ploeg, R. Postma, J. C. Bacelar, T. Van den Berg, V. E. Iacob, J. R. Jongman, and A. Van der Woude, Large gamma anisotropy observed in the ^{252}Cf spontaneous-fission process, *Phys. Rev. Lett.* **68** (21), 3145–3147 (1992).
154. Deepak Pandit, S. Mukhopadhyay, Srijit Bhattacharya, Surajit Pal, A. De, and S. R. Banerjee, Coherent bremsstrahlung and GDR width from ^{252}Cf cold fission, *Phys. Lett.* **B690** (5), 473–476 (2010).
155. B. Kursunoglu, Proton bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **105** (6), 1846–1853 (1957).
156. A. D'Arrigo, N. L. Doroshko, N. V. Eremin, G. Giardina, B. N. Govorov, V. S. Olkhovsky, and A. Taccone, Bremsstrahlung study of nuclear reaction dynamics: the $^{16}\text{O} + p$ reaction, *Nucl. Phys.* **A549** (3), 375–386 (1992).

157. A. D'Arrigo, N. L. Doroshko, N. V. Eremin, G. Fazio, G. Giardina, B. V. Govorov, V. S. Olkhovsky, and A. Taccone, Delay-advance phenomenon observed by bremsstrahlung spectrum of the $^{12}\text{C} + p$ collision, Nucl. Phys. **A564** (2), 217–226 (1993).
158. Q. K. K. Liu, Y. C. Tang, and H. Kanada, Microscopic study of $p + \alpha$ bremsstrahlung, Phys. Rev. **C42** (5), 1895–1898 (1990).
159. D. Baye and P. Descouvemont, Microscopic description of nucleus-nucleus bremsstrahlung, Nucl. Phys. **A443** (2), 302–320 (1985).
160. D. Baye, C. Sauwens, P. Descouvemont, and S. Keller, Accurate treatment of Coulomb contribution in nucleus-nucleus bremsstrahlung, Nucl. Phys. **A529** (3), 467–484 (1991).
161. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1981), 432 стр.
162. K. Nakayama, High-energy photons in neutron-proton and proton-nucleus collisions, Phys. Rev. **C39** (4), 1475–1487 (1989).
163. V. Herrmann, J. Speth, and K. Nakayama, Nucleon-nucleon bremsstrahlung at intermediate energies, Phys. Rev. **C43** (2), 394–415 (1991).
164. M. K. Liou and Z. M. Ding, Theory of bremsstrahlung amplitudes in the soft photon approximation, Phys. Rev. **C35** (2), 651–667 (1987).
165. M. K. Liou, D. Lin, and B. F. Gibson, Anatomy of the soft photon approximation in hadron-hadron bremsstrahlung, Phys. Rev. **C47** (3), 973–990 (1993).
166. M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, Novel soft-photon analysis of $pp\gamma$ below pion-production threshold, Phys. Lett. **B345** (4), 372–378 (1995).

167. M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, Erratum: Novel soft-photon analysis of $pp\gamma$ below pion-production threshold, *Phys. Lett.* **B355** (3–4), 606(E) (1995).
168. M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, Pauli principle in the soft-photon approach to proton-proton bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C54** (4), 1574–1584 (1996).
169. Yi Li, M. K. Liou, and W. M. Schreiber, Proton-proton bremsstrahlung calculation: Studies of the off-shell proton electromagnetic vertex and of pseudoscalar vs pseudovector πN couplings, *Phys. Rev.* **C57** (2), 507–524 (1998).
170. Yi Li, M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, Noncoplanarity effects in proton-proton bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C58** (4), R1880–R1883 (1998).
171. R. G. E. Timmermans, B. F. Gibson, Yi Li, and M. K. Liou, Noncoplanarity in proton-proton bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C65** (1), 014001 (2001) [15 pages].
172. M. K. Liou, T. D. Penninga, R. G. E. Timmermans, and B. F. Gibson, Soft-photon analysis of nucleon-nucleon bremsstrahlung: Anomalous magnetic moment effects, *Phys. Rev.* **C69** (1), 011001 (2004) [5 pages].
173. Y. Li, M. K. Liou, and W. M. Schreiber, Proton-proton bremsstrahlung calculation: Comparison with recent high-precision experimental results, *Phys. Rev.* **C72** (2), 024005 (2005) [4 pages].
174. R. G. E. Timmermans, T. D. Penninga, B. F. Gibson, and M. K. Liou, Nucleon-nucleon bremsstrahlung: Anomalous magnetic moment effects, *Phys. Rev.* **C73** (3), 034006 (2006) [20 pages].

175. Yi Li, M. K. Liou, W. M. Schreiber, and B. F. Gibson, Proton-proton bremsstrahlung: Consequences of different on-shell-point conditions, *Phys. Rev.* **C84** (3), 034007 (2011) [10 pages].
176. F. E. Low, Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions, *Phys. Rev.* **110** (4), 974–977 (1958).
177. H. Feshbach and D. R. Yennie, Radiation of low energy quanta in nuclear reactions, *Nucl. Phys.* **37**, 150–171 (1962).
178. Н. Ф. Нелипа, *Физика элементарных частиц*, (Высшая школа, Москва, 1977), 608 стр.
179. K. Nakayama and G. Bertsch, High energy photon production in nuclear collisions, *Phys. Rev.* **C34** (6), 2190–2200 (1986).
180. J. Edington and B. Rose, Nuclear bremsstrahlung from 140 MeV protons, *Nucl. Phys.* **89** (3), 523–552 (1966).
181. B. A. Remington, M. Blann, and G. F. Bertsch, n - p bremsstrahlung interpretation of high energy gamma rays from heavy-ion collisions, *Phys. Rev.* **C35** (5), 1720–1729 (1987).
182. M. Kwato Njock, M. Maurel, H. Nifenecker, J. A. Pinston, F. Schussler, D. Barneoud, S. Drissi, J. Kern, and J. P. Vorlet, Nuclear bremsstrahlung production in proton-nucleus reactions at 72 MeV, *Phys. Lett.* **B207** (3), 269–272 (1988).
183. P. F. M. Koehler, K. W. Rothe, and E. H. Thorndike, Neutron-proton bremsstrahlung at 197 MeV, *Phys. Rev. Lett.* **18** (21), 933–936 (1967).
184. J. E. Clayton, High energy gamma ray production in proton induced reactions at energies of 104, 145, and 195 MeV, PhD thesis. – Michigan: Michigan State University, 1991.

185. K. Nakayama and G. F. Bertsch, Potential model calculation of energetic photon production from heavy ion collisions, *Phys. Rev.* **C40** (2), 685–691 (1989).
186. J. Knoll and C. Guet, Sum rules at finite temperature and the limitations of kinetic particle-production models, *Nucl. Phys.* **A494** (2), 334–348 (1989).
187. H. Boie, Bremsstrahlung emission probability in the α decay of ^{210}Po , PhD thesis. – Germany: Ruperto-Carola University of Heidelberg, 2009. – 193 p.
188. Q. K. K. Liu, Y. C. Tang, and H. Kanada, Microscopic calculation of bremsstrahlung emission in $^3\text{He} + \alpha$ collisions, *Phys. Rev.* **C41** (4), 1401–1416 (1990).
189. Q. K. K. Liu, Y. C. Tang, and H. Kanada, Microscopic study of $p + \alpha$ bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C42** (5), 1895–1898 (1990).
190. J. Dohet-Eraly and D. Baye, Microscopic cluster model of $\alpha + n$, $\alpha + p$, $\alpha + ^3\text{He}$, and $\alpha + \alpha$ elastic scattering from a realistic effective nuclear interaction, *Phys. Rev.* **C84** (1), 014604 (2011).
191. J. Dohet-Eraly, J.-M. Sparenberg, and D. Baye, Microscopic calculations of elastic scattering between light nuclei based on a realistic nuclear interaction, *J. Phys.: Conf. Ser.* **321**, 012045 (2011).
192. J. Dohet-Eraly, D. Baye, and P. Descouvemont, Microscopic description of $\alpha + \alpha$ bremsstrahlung from a realistic nucleon-nucleon interaction, *J. Phys.: Conf. Ser.* **436**, 012030 (2013).
193. J. Dohet-Eraly and D. Baye, Siegert approach within a microscopic description of nucleus-nucleus bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C88** (2), 024602 (2013).
194. J. Dohet-Eraly, Microscopic cluster model of elastic scattering and

- bremsstrahlung of light nuclei, PhD thesis. – Universite Libre De Bruxelles, 2013.
195. А. И. Стешенко, Г. Ф. Филипов, Размеры и форма ядер с избытком нейтронов, *Яд. Физ.* **14** (4), 715–723 (1971) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **14**, 715–723 (1971)].
196. G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, and A. V. Nesterov, Excitation of ${}^8\text{Be}$ monopole resonances under $\alpha\alpha$ scattering, *Nucl. Phys.* **A426** (2), 327–352 (1984).
197. А. В. Нестеров, Трехкластерная микроскопическая модель описания свойств легких атомных ядер (рус. яз.). Київ: Інститут Теоретичної Фізики ім. Боголюбова, 2016.
198. Г. Ф. Филиппов, А. В. Нестеров, И. Ю. Рыбкин, С. В. Кореннов, Реализация алгебраической версии метода резонирующих групп для трехкластерных систем, *ЭЧАЯ* **25** (6), 1347–1378 (1994).
199. V. Vasilevsky, A. V. Nesterov, F. Arickx, and J. Broeckhove, Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. I. Theoretical background, *Phys. Rev.* **C63** (3), 034606 (2001).
200. V. Vasilevsky, A. V. Nesterov, F. Arickx, and J. Broeckhove, Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. II. Resonances in the three-cluster continuum of ${}^6\text{He}$ and ${}^6\text{Be}$, *Phys. Rev.* **C63** (3), 034607 (2001).
201. V. Vasilevsky, F. Arickx, W. Vanroose, and J. Broeckhove, A microscopic cluster description of ${}^{12}\text{C}$, *Phys. Rev.* **C85** (3), 034318 (2012).
202. Q. K. K. Liu, H. Kanada, and Y. C. Tang, Microscopic study of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ electric-dipole capture reaction, *Phys. Rev.* **C23** (2), 645–656 (1981).

203. Q. K. K. Liu, Y. C. Tang, and H. Kanada, Microscopic study of $\alpha + \alpha$ bremsstrahlung with resonating-group wave functions, *Few-Body Syst.* **12** (2), 175–189 (1992).
204. J. Dohet-Eraly, Microscopic description of $\alpha + N$ bremsstrahlung by a Siegert approach, *Phys. Rev.* **C89** (2), 024617 (2014).
205. J. Dohet-Eraly and D. Baye, Comparison of potential models of nucleus-nucleus bremsstrahlung, *Phys. Rev.* **C90** (3), 034611 (2014).
206. V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, and J. J. de Swart, Partial-wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350 MeV, *Phys. Rev.* **C48** (2), 792–815 (1993).
207. K. Wildermuth and Y. C. Tang, *A Unified Theory of the Nucleus* (Academic Press, New York - San Francisco - London, 1977), p. 388.
208. Y. C. Tang, M. LeMere, and D. R. Thompson, Resonating-group method for nuclear many-body problems, *Phys. Rep.* **47** (3), 167–223 (1978).
209. Y. C. Tang, in *Topics in Nuclear Physics II*, *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin) **145**, 571–692 (1981).
210. H. Horiuchi, Chapter III. Kernels of GCM, RGM and OCM and their calculation methods, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **62**, 90–190 (1977).
211. R. G. Thomas, A formulation of the theory of alpha-particle decay from time-independent equations, *Prog. Theor. Phys.* **12** (3), 253–264 (1954).
212. D. S. Delion, A. Insolia, and R. J. Liotta, Alpha widths in deformed nuclei: microscopic approach, *Phys. Rev.* **C 46** (4), 1346–1354 (1992).
213. C. Xu and Z. Ren, New deformed model of alpha-decay half-lives with a microscopic potential, *Phys. Rev.* **C 73** (4), 041301(R) (2006).

214. D. S. Delion and R. J. Liotta, Shell-model representation to describe α emission, *Phys. Rev. C* **87** (4), 041302(R) (2013).
215. I. Silisteanu and A. I. Budaca, Structure and α decay properties of heaviest nuclei, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **98** (6), 1096–1108 (2012).
216. М. Ивашку, И. Силиштеану, Времена жизни ядер по отношению к спонтанному распаду с испусканием тяжелых кластеров, *ЭЧАЯ* **21** (6), 1405–1455 (1990).
217. R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga, and D. S. Delion, Microscopic theory of cluster radioactivity, *Phys. Rep.* **294** (5), 265–362 (1998).
218. P. E. Hodgson and E. Betak, Cluster emission, transfer and capture in nuclear reactions, *Phys. Rep.* **374** (1), 1–89 (2003).
219. C. Mazzocchi, Z. Janas, L. Batist, V. Belleguic, J. Döring, M. Gierlik, M. Kapica, R. Kirchner, G. A. Lalazissis, H. Mahmud, E. Roeckl, P. Ring, K. Schmidt, P. J. Woods, and J. Żylicz, Alpha decay of ^{114}Ba , *Phys. Lett. B* **532** (1–2), 29–36 (2002).
220. Z. Janas, C. Mazzocchi, L. Batist, A. Blazhev, M. Górska, M. Kavatsyuk, O. Kavatsyuk, R. Kirchner, A. Korgul, M. La Commara, K. Miernik, I. Mukha, A. Plochocki, E. Roeckl, and K. Schmidt, Measurements of ^{110}Xe and ^{106}Te decay half-lives, *Europ. Phys. Journ.* **A23** (2), 197–200 (2005).
221. D. Seweryniak, K. Starosta, C. N. Davids, S. Gros, A. A. Hecht, N. Hoteling, T. L. Khoo, K. Lagergren, G. Lotay, D. Peterson, A. Robinson, C. Vaman, W. B. Walters, P. J. Woods, and S. Zhu, α decay of ^{105}Te , *Phys. Rev. C* **73** (6), 061301 (2006).
222. Y. Z. Wang, J. Z. Gu, and Z. Y. Hou, Preformation factor for α particles in isotopes near $N = Z$, *Phys. Phys.* **C89** (4), 047301 (2014).

223. S. Misicu and M. Rizea, α -Decay in ultra-intense laser fields, *Journ. Phys.* **G40** (9), 095101 (2013).
224. V. Yu. Denisov and A. A. Khudenko, α -decay half-lives: Empirical relations, *Phys. Rev.* **C79** (5), 054614 (2009).
225. V. Yu. Denisov and A. A. Khudenko, α decays to ground and excited states of heavy deformed nuclei, *Phys. Rev.* **C80** (3), 034603 (2009).
226. V. Yu. Denisov and A. A. Khudenko, α -decay half-lives, α -capture, and α -nucleus potential, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **95** (6), 815–835 (2009).
227. C. Lahiri and G. Gangopadhyay, Microscopic calculation of proton capture reactions in the mass 60 – –80 region and its astrophysical implications, *Europ. Phys. J.* **A47** (7), 87 (2011).
228. C. Lahiri and G. Gangopadhyay, Relativistic mean field in $A \approx 80$ nuclei and low-energy proton reactions, *Phys. Rev.* **C84** (5), 057601 (2011).
229. C. Lahiri and G. Gangopadhyay, Low-energy proton reactions of astrophysical interest in the $A \sim 90 - 100$ region, *Phys. Rev.* **C86** (4), 047601 (2012).
230. S. Dutta, D. Chakraborty, G. Gangopadhyay, and A. Bhattacharyya, Low-energy proton capture reactions in the mass region 55 – –60, *Phys. Rev.* **C91** (2), 025804 (2015).
231. D. Chakraborty, S. Dutta, G. Gangopadhyay, and A. Bhattacharyya, Microscopic study of (p, γ) reactions in the mass region $A = 110 - -125$, *Phys. Rev.* **C91** (5), 057602 (2015).
232. C. Illiadis, *Nuclear Physics of the Stars* (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany, 2007), 665 p.
233. M. Arnould and S. Goriely, The p -process of stellar nucleosynthesis: astrophysics and nuclear physics status, *Phys. Rep.* **384** (1–2), 1–84 (2003).

234. K. Langanke and M. Wiescher, Nuclear reactions and stellar processes, Rep. Progr. Phys. **64** (12), 1657–1701 (2001).
235. E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, and F. Hoyle, Synthesis of the elements in stars, Rev. Mod. Phys. **29** (4), 547–650 (1957).
236. W. Kluge, Pion-nuclear scattering, Rep. Prog. Phys. **54** (10), 1251–1332 (1991).
237. M. Hirata, J. H. Koch, E. J. Moniz, and F. Lenz, Isobar hole doorway states and $\pi - {}^{16}\text{O}$ scattering, Annals Phys **120** (1), 205–248 (1979).
238. E. Oset, H. Toki, and W. Weise, Pionic modes of excitation in nuclei, Phys. Rep. **83** (4), 281–380 (1982).
239. T. Ericson and W. Weise, *Pions and Nuclei* (Clarendon Press, Oxford, 1988), 480 p.
240. F. Binon, P. Duteil, J. P. Garron, J. Gorres, L. Hugon, J. P. Peigneux, C. Schmit, M. Spighel, and J. P. Stroot, Scattering of negative pions on carbon, Nucl. Phys. **B17** (1), 168–188 (1970).
241. R. J. Sobie, T. E. Drake, K. L. Erdman, R. R. Johnson, H. W. Roser, R. Tacik, E. W. Blackmore, D. R. Gill, S. Martin, C. A. Wiedner, and T. Masterson, Elastic and inelastic scattering of 50 MeV pions from ${}^{12}\text{C}$, ${}^{32}\text{S}$, and ${}^{34}\text{S}$, Phys. Rev. **C30** (5), 1612–1621 (1984).
242. C. J. Oram, J. B. Warren, G. M. Marshall, and J. Doornbos, Commissioning of a new low energy $\pi - \mu$ at TRIUMF, Nucl. Instrum. Methods. **179** (1), 95–103 (1981).
243. R. J. Sobie, T. E. Drake, B. M. Barnett, K. L. Erdman, W. Gyles, R. R. Johnson, H. W. Roser, R. Tacik, E. W. Blackmore, D. R. Gill, S. Martin, C. A. Wiedmer, and T. Masterson, The TRIUMF low energy

- pion spectrometer and channel, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. **219** (3), 501–507 (1984).
244. A. S. Clough, G. K. Turner, B. W. Allardyce, C. J. Batty, D. J. Baugh, W. J. McDonald, R. A. J. Riddle, L. H. Watson, M. E. Cage, G. J. Pyle, and G. T. A. Squier, Pion-nucleus total cross sections from 88 to 860 MeV, Nucl. Phys. **B76** (1), 15–28 (1974).
245. B. M. Preedom, S. H. Dam, C. W. Darden, R. D. Edge, D. J. Malbrough, T. Marks, R. L. Burman, M. Hamm, M. A. Moinester, R. P. Redwine, M. A. Yates, F. E. Bertrand, T. P. Cleary, E. E. Gross, N. W. Hill, C. A. Ludemann, M. Blecher, K. Gotow, D. Jenkins, and F. Milder, Positive pion-nucleus elastic scattering at 30 and 50 MeV, Phys. Rev. **C23**, (3), 1134–1140 (1981).
246. K. G. Boyer, W. B. Cottingame, L. E. Smith, S. J. Greene, C. Fred Moore, J. S. McCarthy, R. C. Minehart, J. F. Davis, G. R. Burleson, G. Blanpied, C. A. Goulding, H. A. Thiessen, and C. L. Morris, Pion inelastic scattering to the low-lying states in $^{42,44,48}\text{Ca}$: Determination of the neutron all proton multipole matrix elements, Phys. Rev. **C24** (2), 598–604 (1981).
247. C. L. Morris, K. G. Boyer, C. Fred Moore, C. J. Harvey, K. J. Kallianpur, I. B. Moore, P. A. Seidl, S. J. Seestrom-Morris, D. B. Holtkamp, S. J. Greene, and W. B. Cottingame, Pion inelastic scattering to low-lying states in ^{12}C and ^{40}Ca , Phys. Rev. **C24** (1), 231–235 (1981).
248. J. P. Albanese, J. Arvieux, J. Bolger, E. Boschitz, C. H. Q. Ingram, J. Jansen, and J. Zichy, Elastic scattering of positive pions by ^{16}O between 80 and 340 MeV, Nucl. Phys. **A350** (3–4), 301–331 (1980).
249. B. M. Preedom, R. Corfu, J.-P. Egger, P. Gretillat, C. Lunke, J. Piffaretti, E. Schwarz, J. Jansen, and C. Perrin, A systematic study of π^+ and π^-

- inelastic scattering from ^{28}Si in the region of the $\pi N(3,3)$ resonance, Nucl. Phys. **A326** (2–3), 385–400 (1979).
250. J. P. Albanese, J. Arvieux, E. T. Boschitz, R. Corfu, J. P. Egger, P. Gretillat, C. H. Q. Ingram, C. Lunke, E. Pedroni, C. Perrin, J. Piffaretti, L. Pflug, E. Schwarz, C. Wiedner, and J. Zichy, The SIN high resolution pion channel and spectrometer, Nucl. Instr. Methods. **158**, 363–370 (1979).
251. K. G. Boyer, W. J. Braithwaite, W. B. Cottingham, S. J. Greene, L. E. Smith, C. Fred Moore, C. L. Morris, H. A. Thiessen, G. S. Blanpied, G. R. Burleson, J. F. Davis, J. S. McCarthy, and R. C. Minehart, C. A. Goulding, Pion elastic and inelastic scattering from $^{40,42,44,48}\text{Ca}$ and ^{54}Fe , Phys. Rev. **C29** (1), 182–194 (1984).
252. S. A. E. Khallaf and A. A. Ebrahim, Analysis of π^\pm -nucleus elastic scattering using a local potential, Phys. Rev. **C62** (2), 024603 (2000).
253. S. A. E. Khallaf and A. A. Ebrahim, Elastic and inelastic scattering of pions from nuclei using an equivalent local potential, Phys. Rev. **C65** (6), 064605 (2002).
254. Md. A. E. Akhter, Afroze Sultana Sadia, H. M. Sen Gupta, and R. J. Peterson, Local optical model studies of pion-nucleus scattering, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **27** (4), 755–771 (2001).
255. A. A. Ebrahim, Cluster model analysis of pion elastic and inelastic scattering from ^{12}C , Braz. J. Phys. **41** (2), 146–153 (2011).
256. G. R. Satchler, Local potential model for pion-nucleus scattering and $\pi^+ \pi^-$ excitation ratios, Nucl. Phys. **A540** (3–4), 533–576 (1992).
257. M. B. Johnson and G. R. Satchler, Characteristics of local pion-nucleus

- potentials that are equivalent to Kisslinger-type potentials, *Ann. Phys. (N. Y.)* **248** (1), 134–169 (1996).
258. A. Gil and E. Oset, Coherent γ -production in (p, p') reactions in nuclei in the Δ resonance region, *Phys. Lett.* **B416** (3–4), 257–262 (1998).
259. S. Hofmann, in *Particle emission from nuclei*, edited by D. N. Poenaru and M. Ivascu (CRC, Boca Raton, 1989), Vol. 2, Chap. 2.
260. S. Hofmann, Proton radioactivity, *Radiochim. Acta.* **70–71** (s1), 93–106 (1995).
261. S. Hofmann, Proton Radioactivity, in *Nuclear decay modes*, edited by D. N. Poenaru and W. Greiner (IOP, Bristol, 1996).
262. C. N. Davids, P. J. Woods, H. T. Penttilä, J. C. Batchelder, C. R. Bingham, D. J. Blumenthal, L. T. Brown, B. C. Busse, L. F. Conticchio, T. Davinson, D. J. Henderson, R. J. Irvine, D. Seweryniak, K. S. Toth, W. B. Walters, and B. E. Zimmerman, Proton decay of an intruder state in ^{185}Bi , *Phys. Rev. Lett.* **76** (4), 592–595 (1996).
263. V. S. Olkhovsky and S. P. Maidanyuk, Method of multiple internal reflections in description of tunneling evolution through barriers, *Укр. Фіз. Журн.* **45** (10), 1262–1269 (2000).
264. S. P. Maidanyuk, V. S. Olkhovsky, and A. K. Zaichenko, The method of multiple internal reflections in description of tunneling evolution of nonrelativistic particles and photons, *Журнал Фіз. Досл.* **6** (1), 1–16 (2002).
265. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, and S. V. Belchikov, The method of multiple internal reflections in description of nuclear decay, *Вопросы Атомной Науки и Техники (RFNC-VNIIEF, Саров, Россия)* **1**, 16–19 (2002).

266. J. H. Fermor, Quantum-mechanical tunneling, *Am. Journ. Phys.* **34** (12), 1168–1170 (1966).
267. K. W. McVoy, L. Heller, and M. Bolsterli, Optical analysis of potential well resonances, *Rev. Mod. Phys.* **39** (1), 245–258 (1967).
268. A. Anderson, Multiple scattering approach to one-dimensional potential problems, *Am. Journ. Phys.* **57** (3), 230–235 (1989).
269. В. В. Баби́ков, *Метод фазовых функций в квантовой механике* (Наука, Москва, 1976).
270. D. M. Brink and U. Smilansky, Multiple reflections in the path-integral approach to barrier penetration, *Nucl. Phys.* **A405**, 301–312 (1983).
271. S. Esposito, Multibarrier tunneling, *Phys. Rev.* **E67** (1), 016609 (2003).
272. D. F. Jackson and M. Rhoades-Brown, Theories of alpha-decay, *Ann. Phys.* (N. Y.) **105** (1), 151–186 (1977).
273. S. A. Gurvitz, Novel approach to tunneling problems, *Phys. Rev.* **A38** (4), 1747–1759 (1988).
274. B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, Ground state proton emission from heavy nuclei, *Phys. Rev.* **C45** (4), 1688–1692 (1988).
275. A. B. Balantekin and N. Takigawa, Quantum tunneling in nuclear fusion, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1), 77–100 (1998).
276. S. Hofmann and G. Munzenberg, The discovery of the heaviest elements, *Rev. Mod. Phys.* **72** (3), 733–767 (2000).
277. B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, Ground state to ground state alpha decays of heavy even-even nuclei, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **17** (8), 1223–1235 (1991).

278. B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, Alpha decay calculations with a realistic potential, *Phys. Rev.* **C45** (5), 2247–2253 (1992).
279. S. B. Duarte, O. A. P. Tavares, F. Guzman, A. Dimarco, F. Garcia, O. Rodriguez, and M. Goncalves, Half-lives for proton emission, alpha decay, cluster radioactivity, and cold fission processes calculated in a unified theoretical framework, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **80** (2), 235–299 (2002).
280. N. Dasgupta-Schubert and M. A. Reyes, The generalized liquid drop model alpha-decay formula: Predictability analysis and superheavy element alpha half-lives, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **93** (6), 907–930 (2007).
281. R. B. Firestone and V. S. Shirley, *Table of Isotopes* (Wiley-VCH, 2 Vols, 8th Ed., New York, 1998), 3168 p.
282. Y. A. Akovali, Review of alpha-decay data from doubly-even nuclei, *Nucl. Data Sheets* **84** (1), 1–114 (1998).
283. M. Gupta and T. W. Burrows, Nuclear Data Sheets for $A = 266 - 294$, *Nucl. Data Sheets* **106** (2), 251–366 (2005).
284. P. Belli, R. Bernabei, F. Cappella, R. Cerulli, C. J. Dai, F. A. Danevich, A. D'Angelo, A. Incicchitti, V. V. Kobychhev, S. S. Nagornyy, S. Nisi, F. Nozzoli, D. Prospero, V. I. Tretyak, and S. S. Yurchenko, Search for alpha decay of natural Europium, *Nucl. Phys.* **A 789** (1–4), 15–29 (2007).
285. K. Nishio, H. Ikezoe, S. Mitsuoka, K. Satou, and C. J. Lin, Half-life of ^{228}Pu and alpha decay of ^{228}Np , *Phys. Rev.* **C 68** (6), 064305 (2003).
286. S. A. Karamian, J. J. Carroll, S. Iliev, and S. P. Tretyakova, Weak K hindrance manifested in alpha decay of the $^{178}\text{Hf}^{m2}$ isomer, *Phys. Rev.* **C 75** (5), 057301 (2007).

287. Z. Y. Zhang, Z. G. Gan, L. Ma, L. Yu, H. B. Yang, T. H. Huang, G. S. Li, Y. L. Tian, Y. S. Wang, X. X. Xu, X. L. Wu, M. H. Huang, C. Luo, Z. Z. Ren, S.-G. Zhou, X. H. Zhou, H. S. Xu, and G. Q. Xiao, α decay of the new neutron-deficient isotope ^{205}Ac , *Phys. Rev.* **C89** (1), 014308 (2014).
288. С. Г. Кадменский, С. Д. Кургалин, Ю. М. Чувильский, Кластерные состояния атомных ядер и процессы кластерного распада (рус), *ЭЧАЯ* **38** (6), 699–742 (2007).
289. T. L. Stewart, M. W. Kermode, D. J. Beachey, N. Rowley, I. S. Grant, and A. T. Kruppa, Alpha-particle decay through a deformed barrier, *Nucl. Phys.* **A 611** (2–3), 332–354 (1996).
290. D. S. Delion, A. Insolia, and R. J. Liotta, Microscopic description of the anisotropy in alpha decay, *Phys. Rev.* **C 49** (6), 3024–3028 (1994).
291. D. S. Delion, A. Insolia, and R. J. Liotta, Anisotropic alpha decay in Am, Es, and Fm isotopes, *Phys. Rev.* **C 67** (5), 054317 (2003).
292. R. Id Betan and W. Nazarewicz, α decay in the complex-energy shell model, *Phys. Rev.* **C86** (3), 034338 (2012).
293. I. Silişteanu, W. Scheid, and A. Sandulesku, Proton, alpha and cluster decay rates for nuclei with $52 \leq Z \leq 56$ and $52 \leq N \leq 60$, *Nucl. Phys.* **A 679** (3–4), 317–336 (2001).
294. I. Silişteanu, A. I. Budaca, and A. O. Sileşteanu, Systematics of α -decay half-lives of the heaviest elements, *Rom. Rep. Phys.* **55** (9–10), 1088–1110 (2010).
295. В. М. Струтинский, Доклады Акад. Наук СССР [Reports of Soviet Academy of Sciences] **104**, 524 (1955).

296. V. M. Strutinsky, Excitation of rotational states in α -decay of even-even nuclei, *ЖЭТФ* **32** (6), 1412–1420 (1957).
297. G. Royer, Alpha emission and spontaneous fission through quasi-molecular shapes, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **26** (8), 1149–1170 (2000).
298. R. Moustabchir and G. Royer, Analytic expressions for the proximity energy, the fusion process and the alpha emission, *Nucl. Phys.* **A 683** (1–4), 266–278 (2001).
299. D. N. Basu, Role of effective interaction in nuclear disintegration processes, *Phys. Lett.* **B 566** (1–2), 90–97 (2003).
300. E. L. Medeiros, M. M. N. Rodrigues, S. B. Duarte, and O. A. P. Tavares, Systematics of alpha-decay half-life: new evaluations for alpha-emitter nuclides, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32** (8), B23–B30 (2006).
301. C. Samanta, P. Roy Chowdhury, and D. N. Basu, Predictions of alpha decay half lives of heavy and superheavy elements, *Nucl. Phys.* **A 789** (1–4), 142–154 (2007).
302. A. Bhagwat and Y. K. Gambhir, The alpha-nucleus potential for fusion and decay, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35** (6), 065109 (2008).
303. H. F. Zhang and G. Royer, α -particle preformation in heavy nuclei and penetration probability, *Phys. Rev.* **C 77** (5), 054318 (2008).
304. P. Mohr, α -nucleus potentials for the neutron-deficient p nuclei, *Phys. Rev.* **C61** (4), 045802 (2000).
305. D. N. Poenaru, I. H. Plonski, and W. Greiner, Alpha-decay half-lives of superheavy nuclei, *Phys. Rev.* **C 74** (1), 014312 (2006).
306. J. R. Huizenga and G. Igo, Theoretical reaction cross sections for alpha particles with an optical model, *Nucl. Phys.* **29**, 462–473 (1962).

307. M. Nolte, H. Machner, and J. Bojowald, Global optical potential for α particles with energies above 80 MeV, *Phys. Rev.* **C36** (4), 1312–1316 (1987).
308. U. Atzrott, P. Mohr, H. Abele, C. Hillenmayer, and G. Staudt, Uniform α -nucleus potential in a wide range of masses and energies, *Phys. Rev.* **C53** (3), 1336–1347 (1996).
309. P. Demetriou, C. Grama, and S. Goriely, Improved global α -optical model potentials at low energies, *Nucl. Phys.* **A707** (1–2), 253–276 (2002).
310. M. Avrigeanu, W. von Oertzen, A. J. M. Plompen, and V. Avrigeanu, Optical model potentials for α -particles scattering around the Coulomb barrier on $A \sim 100$ nuclei, *Nucl. Phys.* **A723** (1–2), 104–126 (2003).
311. F. F. Karpeshin, G. La Rana, E. Vardaci, A. Brondi, R. Moro, S. N. Abramovich, V. I. Serov, Resonances in alpha-nuclei interaction, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34** (3), 587–596 (2007).
312. T. Rauscher, F.-K. Thielemann, J. Görres, and M. Wiescher, Capture of α particles by isospin-symmetric nuclei, *Nucl. Phys.* **A675** (3–4), 695–721 (2000).
313. K. A. Eberhard, Ch. Appel, R. Bangert, L. Cleemann, J. Eberth, and V. Zobel, Fusion cross sections for $\alpha + {}^{40,44}\text{Ca}$ and the problem of anomalous large-angle scattering, *Phys. Rev. Lett.* **43** (2), 107–110 (1979).
314. J. M. D’Auria, M. J. Fluss, L. Kowalski, and J. M. Miller, Reaction cross section for low-energy alpha particles on ${}^{59}\text{Co}$, *Phys. Rev.* **168** (4), 1224–1227 (1968).
315. A. R. Barnett and J. S. Lilley, Interaction of alpha particles in the lead region near the Coulomb barrier, *Phys. Rev.* **C9** (5), 2010–2027 (1974).

316. D. Glas and U. Mosel, Limitation on complete fusion during heavy-ion collisions, *Phys. Rev.* **C10** (6), 2620–2622 (1974).
317. D. Glas and U. Mosel, On the critical distance in fusion reactions, *Nucl. Phys.* **A237** (3), 429–440 (1975).
318. D. L. Hill and J. A. Wheeler, Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena, *Phys. Rev.* **89** (5), 1102–1145 (1953).
319. C. Y. Wong, Interaction barrier in charged-particle nuclear reactions, *Phys. Rev. Lett.* **31** (12), 766–769 (1973).
320. Ю. Е. Пенионжкевич, С. М. Лукьянов, Ядра вблизи замкнутых оболочек $N = 20$ и $N = 28$, *ЭЧАЯ* **37** (2), 439–492 (2006).
321. E. F. Aguilera and J. J. Kolata, Angular momentum limit for fusion of halo and weakly bound systems, *Phys. Rev.* **C85** (1), 014603 (2012).
322. R. Kumari, Study of fusion probabilities with halo nuclei using different proximity based potentials, *Nucl. Phys.* **A917**, 85–91 (2013).
323. C. Thibault, R. Klapisch, C. Rigaud, A. M. Poskanzer, R. Prieels, L. Lessard, and W. Reisdorf, Direct measurement of the masses of ^{11}Li and $^{26-32}\text{Na}$ with an on-line mass spectrometer, *Phys. Rev.* **C 12** (2), 644–657 (1975).
324. International Atomic Energy Agency, Nuclear Data Section (Vienna International Centre, Vienna, Austria): <http://www-nds.iaea.org/RIPL-2/>
325. V. Yu. Denisov, O. I. Davidovskaya, and I. Yu. Sedykh, Improved parametrization of the unified model for α decay and α capture, *Phys. Rev.* **C92** (1), 014602 (2015).
326. B. B. Back, H. Esbensen, C. L. Jiang, and K. E. Rehm, Recent developments in heavy-ion fusion reactions, *Rev. Mod. Phys.* **86** (1), 317–360 (2014).

327. J. R. Birkelund, L. E. Tubbs, J. R. Huizenga, J. N. De, and D. Sperber, Heavy-ion fusion: Comparison of experimental data with classical trajectory models, *Phys. Rep.* **56** (3), 107–166 (1979).
328. L. C. Vaz, J. M. Alexander, and G. R. Satchler, Fusion barriers, empirical and theoretical: Evidence for dynamic deformation in subbarrier fusion, *Phys. Rep.* **69** (5), 373–399 (1981).
329. J. R. Birkelund and J. R. Huizenga, Fusion Reactions Between Heavy Nuclei, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **33**, 265–322 (1983).
330. M. Beckerman, Subbarrier fusion of atomic nuclei, *Phys. Rep.* **129** (3), 145–223 (1985).
331. S. G. Steadman and M. J. Rhoades-Brown, Sub-barrier fusion reactions, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **36**, 649–681 (1986).
332. M. Beckerman, Sub-barrier fusion of two nuclei, *Rep. Prog. Phys.* **51** (8), 1047–1103 (1988).
333. N. Rowley, G. R. Satchler, and P. H. Stelson, On the “distribution of barriers” interpretation of heavy-ion fusion, *Phys. Lett. B* **254** (1–2), 25–29 (1991).
334. R. Vandenbosch, Angular momentum distributions in subbarrier fusion reactions, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **42**, 447–481 (1992).
335. W. Reisdorf, Heavy-ion reactions close to the Coulomb barrier, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **20** (9), 1297 (1994).
336. M. Dasgupta, D. J. Hinde, N. Rowley, and A. M. Stefanini, Measuring barriers to fusion, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **48**, 401–461 (1998).
337. J. F. Liang and C. Signorini, Fusion induced by radioactive ion beams, *Int. J. Mod. Phys. E* **14** (8), 1121–150 (2005).

338. L. F. Canto, P. R. S. Gomes, R. Donangelo, and M. S. Hussein, Fusion and breakup of weakly bound nuclei, *Phys. Rep.* **424** (1–2), 1–111 (2006).
339. N. Keeley, R. Raabe, N. Alamanos, and J. L. Sida, Fusion and direct reactions of halo nuclei at energies around the Coulomb barrier, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **59** (2), 579–630 (2007).
340. K. Hagino and N. Takigawa, Subbarrier fusion reactions and many-particle quantum tunneling, *Prog. Theor. Phys.* **128** (6), 1061–1106 (2012).
341. G. Gamow, Zur Quantentheorie des Atomkernes, *Z. Phys.* **51** (3–4), 204–212 (1928).
342. I. Silisteanu and C. I. Anghel, Alpha-decay and spontaneous fission half-lives of super-heavy nuclei around the double magic nucleus ^{270}Hs , *Rom. J. Phys.* **60** (3–4), 444–451 (2015).
343. National Nuclear Data Center (of Brookhaven National Laboratory, Upton, NY): <http://www.nndc.bnl.gov>.
344. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971), 544 стр.
345. T. Vertse, K. F. Pál and Z. Balogh, Gamow, A program for calculating the resonant state solution of the radial Schrödinger equation in an arbitrary optical potential, *Comp. Phys. Comm.* **27** (3), 309–322 (1982).
346. J. Bang and J. Zimányi, Stripping reactions leading to decaying states, *Nucl. Phys. A* **139** (3), 534–544 (1969).
347. B. Gyarmati, T. Vertse, J. Zymányi, and M. Zimányi, Single-particle resonant-state wave functions in a simple description of isobaric analog resonances, *Phys. Rev. C* **1** (1), 1–3 (1970).

348. B. Gyarmati and T. Vertse, Easy method for calculating the resonance parameters of the isobaric analogue resonance, *Nucl. Phys. A* **182** (6), 315–320 (1972).
349. W. R. Coker, Gamow-state analysis of $^{54}\text{Fe}(d, n)$ to proton resonances in ^{55}Co , *Phys. Rev. C* **9** (2), 784–786 (1974).
350. W. R. Coker, Distorted-wave Born-approximation analysis of $^{36,38}\text{Ar}(d, p)$ to neutron resonances in $^{37,39}\text{Ar}$, *Phys. Rev. C* **7** (6), 2426–2431 (1973).
351. G. García-Calderón and R. Peierls, Resonant states and their uses, *Nucl. Phys. A* **265** (3), 443–460 (1976).
352. H. R. Fiebig and A. Weiguny, Gamov states in the generator coordinate method, *Z. Phys. A* **279** (3), 275–282 (1976).
353. M. Pierronne and L. Marquez, On the complex energy eigenvalue theory of alpha decay, *Z. Phys. A* **286** (1), 19–25 (1978).
354. H. S. Bradlow, W. D. M. Rae, P. S. Fisher, N. S. Godwin, G. Proudfoot, and D. Sinclair, A DWBA analysis of heavy ion α -transfer reactions on ^{16}O , *Nucl. Phys. A* **314** (1), 171–206 (1979).
355. Bradlow H. S., W. D. M. Rae, P. S. Fisher, N. S. Godwin, G. Proudfoot, and D. Sinclair, Heavy ion induced α -transfer on targets of mass 12 to 15, *Nucl. Phys. A* **314** (1), 207–231 (1979).
356. T. Berggren, Resonance effects in the binding of a nucleon to an unbound core, *Nucl. Phys. A* **361** (1), 102–116 (1981).
357. B. G. Giraud, M. V. Mihailovic, R. G. Lovas, and M. A. Nagarajan, Variational approach to resonant states of many-particle systems, *Ann. Phys. (N. Y.)* **140** (1), 29–44 (1982).

358. P. Salamon, Á. Baran, and T. Vertse, Distributions of the S -matrix poles in Woods–Saxon and cut-off Woods–Saxon potentials, *Nucl. Phys.* **A 952**, 1–17 (2016).
359. J. B. Hartle and S. W. Hawking, Wave function of the Universe, *Phys. Rev.* **D28** (12), 2960–2975 (1983).
360. Я. Б. Зельдович, Письма в Астрон. Журн. **7**, 579–581 (1981).
361. A. Vilenkin, Creation of universes from nothing, *Phys. Lett.* **B117** (1–2), 25–28 (1982).
362. A. Vilenkin, Birth of inflationary universes, *Phys. Rev.* **D27** (12), 2848–2855 (1983).
363. A. Vilenkin, Quantum creation of universes, *Phys. Rev.* **D 30** (2), 509–511 (1984).
364. A. Vilenkin, Boundary conditions in quantum cosmology, *Phys. Rev.* **D 33** (12), 3560–3569 (1986).
365. A. Vilenkin, Quantum cosmology and the initial state of the Universe, *Phys. Rev.* **D37** (4), 888–897 (1988).
366. A. Vilenkin, Approaches to quantum cosmology, *Phys. Rev.* **D 50** (12), 2581–2594 (1994).
367. A. Vilenkin, Predictions from quantum cosmology, International School of Astrophysics (NATO Advanced Study Institute), Erice, Italy, 8–19 Sep 1995; NATO ASI Series C, Mathematical and Physical Sciences, 476; (Edited by N. Sanchez and A. Zichichi; Boston, MA, Kluwer, 1996, 544 p.). *Proceedings: String Gravity and Physics at the Planck Energy Scale*, p. 345–367; arXiv:gr-qc/9507018.

368. J. Hong, A. Vilenkin, and S. Winitzki, Particle creation in a tunneling universe. II. Massive particles, *Phys. Rev.* **D68** (2), 023521 (2003).
369. A. D. Linde, Quantum creation of the inflationary Universe, *Lett. Nuov. Cim.* **39** (2), 401–405 (1984).
370. S. Weinberg, The cosmological constant problem, *Rev. Mod Phys.* **61** (1), 1–23 (1989).
371. M. Bouhmadi-López, L. J. Garay, and P. F. Gonzalez-Diaz, Quantum behavior of FRW radiation-filled universes, *Phys. Rev.* **D66** (8), 083504 (2002) [18 pages].
372. M. Bouhmadi-López and P. V. Moniz, FRW quantum cosmology with a generalized Chaplygin gas, *Phys. Rev.* **D71** (6), 063521 (2005) [16 pages].
373. R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi, and G. Venturi, Improved WKB analysis of cosmological perturbations, *Phys. Rev.* **D 71** (4), 043517 (2005) [12 pages].
374. R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi, and G. Venturi, Improved WKB analysis of slow-roll inflation, *Phys. Rev.* **D 72** (10), 103516 (2005) [10 pages].
375. M. Luzzi, *Semiclassical approximations to cosmological perturbations* (PhD thesis, Advisor: Prof. Giovanni Venturi, University of Bologna, 2007), 148 p.
376. S. P. Kim, Quantum cosmology for tunneling universes, *J. Korean Phys. Soc.* **45**, S172–S180 (2004).
377. E. W. Kolb and M. S. Turner, *The early universe* (Addison-Wesley, New York, 1990), 547 p.
378. E. Carugno, M. Litterio, F. Occhionero, and G. Pollifrone, Inflaton in multi-dimensional quantum cosmology, *Phys. Rev.* **D53** (12), 6863–6874 (1996).

379. C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prata, Phase-space noncommutative quantum cosmology, *Phys. Rev.* **D78** (2), 023516 (2008) [10 pages].
380. R. Brustein and S. P. De Alwis, Landscape of string theory and the wave function of the universe, *Phys. Rev.* **D73** (4), 046009 (2006) [12 pages].
381. M. Bouhmadi-López and P. V. Moniz, Quantization of parameters and the string landscape problem, *Journ. Cosm. Astr. Phys.* **05**, 005 (2007).
382. S. Lee, The tunneling universe in scalar-tensor theory with matter, *Class. Quant. Grav.* **24** (20), 5247–5255 (2007).
383. S. Lee, The tunneling universe in scalar-tensor theory with matter: II, *Class. Quant. Grav.* **25** (5), 055008 (2008).
384. E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov, Investigations in relativistic cosmology, *Adv. Phys.* **12** (46), 185–249 (1963).
385. P. Ginsparg and M. J. Perry, Semiclassical perdurance of de Sitter space, *Nucl. Phys.* **B222** (2), 245–268 (1983).
386. D. Levkov, C. Rebbi, and V. A. Rubakov, Tunneling in quantum cosmology: numerical study of particle creation, *Phys. Rev.* **D 66** (8), 083516 (2002).
387. B. S. DeWitt, Quantum theory of gravity. I. The canonical theory, *Phys. Rev.* **160** (5), (1967) 1113–1148.
388. J. Acacio de Barros, E. V. Corrêa Silva, G. A. Monerat, G. Oliveira-Neto, L. G. Ferreira Filho, and P. Romildo, Tunneling probability for the birth of an asymptotically de Sitter universe, *Phys. Rev.* **D 75** (10), 104004 (2007).
389. G. A. Monerat, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, L. G. Ferreira Filho, P. Romildo, J. C. Fabris, R. Fractalossi, S. V. B. Gonçalves, and

- F. G. Alvarenga, Dynamics of the early universe and the initial conditions for inflation in a model with radiation and a Chaplygin gas, *Phys. Rev.* **D76** (2), 024017 (2007) [11 pages].
390. A. V. Yurov and S. D. Vereshchagin, The Darboux transformation and exactly solvable cosmological models, *Theor. Math. Phys.* **139** (3), 787–800 (2004).
391. A. Garcia, W. Guzman, M. Sabido, and J. Socorro, Iso-spectral potentials and inflationary quantum cosmology, *Int. Journ. Theor. Phys.* **45** (12), 2529–2541 (2006).
392. A. Kobakhidze and L. Mersini-Houghton, Birth of the Universe from the landscape of string theory, *Europ. Phys. Journ.* **C49** (4), 869–873 (2007).
393. A. A. Starobinsky, Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the Universe, *JETP Lett.* **30**, 682–685 (1979).
394. R. Brout, F. Englert, and E. Gunzig, The causal universe, *Gen. Relativ. Gravit.* **10** (1), 1–10 (1979).
395. A. D. Linde, Chaotic inflation, *Phys. Lett.* **B129** (3–4), 177–181 (1983).
396. A. D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990), 362 pp. (Contemporary Concepts in Physics, Vol. 5); arXiv:hep-th/0503203).
397. R. H. Brandenberger, Inflationary cosmology: Progress and problems, Lectures at the International School on Cosmology (23 January–4 February 1999, Tehran, Iran, Islamic Republic), *Proc. of IPM School on Cosmology 1999 “Large Scale Structure Formation”* (Kluwer, Dordrecht, 2000), p. 48; arXiv:hep-ph/9910410.

398. D. N. Page, Space for both no-boundary and tunneling quantum states of the Universe, *Phys. Rev.* **D56** (4), 2065–2072 (1997).
399. P. J. E. Peebles and B. Ratra, The cosmological constant and dark energy, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2), 559–606 (2003).
400. M. Bouhmadi-López and J. A. J. Madrid, Escaping the Big Rip, *Journ. Cosm. Astr. Phys.* **5**, 005 (2005).
401. M. Bouhmadi-López, P. F. Gonzáles-Díaz, and P. Martín-Moruno, On the generalised Chaplygin gas: worse than a big rip or quieter than a sudden singularity? *Int. Journ. Mod. Phys.* **D17** (4), 2269–2290 (2008).
402. D. Bertacca, N. Bartolo, A. Diaferio, and S. Matarrese, How the scalar field of unified dark matter models can cluster, *Journ. Cosm. Astr. Phys.* **10**, 023 (2008).
403. I. G. Moss and C. Xiong, On the consistency of warm inflation, *Journ. Cosm. Astr. Phys.* **11**, 023 (2008).
404. J. Lu, Yu. Gui, and L. X. Xu, Observational constraint on generalized Chaplygin gas model, *Europ. Phys. Journ.* **C63** (3), 349–354 (2009).
405. A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, An alternative to quintessence, *Phys. Lett.* **B511** (2–4), 265–268 (2001).
406. S. Chaplygin, *Sci. Mém. Moskow Univ. Math. Phys.* **21**, 1 (1904).
407. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля: бозонные теории* (КомКнига, Москва, 2005), 296 стр.
408. W. J. Swiatecki, International Conference on Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions. 1969, Heilderberg (Germany). Proceedings of the International Conference on Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions (edited by R. Bock and W. R. Hering, Notht-Holland, New York), p. 729 (1970).

409. W. J. Swiatecki, Common features and differences between fission and heavy ion physics, *Le Journal de Physique Colloques* **33** (C5), 45–60 (1972).
410. J. Schirmer, S. Knaak, and G. Süssman, Viscosity coefficients for nuclear fission, *Nucl. Phys.* **A199** (3), 31–44 (1973).
411. Y. Boneh and Z. Fraenkel, Dynamic single-particle effects in fission, *Phys. Rev.* **C10** (2), 893–900 (1974).
412. D. H. E. Gross, Theory of nuclear friction, *Nucl. Phys.* **A240** (3), 472–484 (1975).
413. G. Schütte and L. Wilets, Dynamics and non-adiabaticity in the fission process, *Nucl. Phys.* **A252** (1), 21–41 (1975).
414. K. T. R. Davies, A. J. Sierk, and J. R. Nix, Effect of viscosity on the dynamics of fission, *Phys. Rev.* **C13** (6), 2385–2403 (1976).
415. K. T. R. Davies, R. A. Managan, J. R. Nix, and A. J. Sierk, Rupture of the neck in nuclear fission, *Phys. Rev.* **C16** (5), 1890–1901 (1977).
416. G. Wegmann, Static viscosity of nuclear matter, *Phys. Lett.* **B50** (3), 327–329 (1974).
417. S. E. Koonin, R. L. Hatch, and J. Randrup, One-body dissipation in a linear response approach, *Nucl. Phys.* **A283** (1), 87–107 (1977).
418. S. E. Koonin and J. Randrup, Classical theory for one-body nuclear dynamics, *Nucl. Phys.* **A289** (2), 475–510 (1977).
419. A. J. Sierk, S. E. Koonin, and J. R. Nix, Modified one-body nuclear dissipation, *Phys. Rev.* **C17** (2), 646–653 (1978).
420. D. Glas and U. Mosel, Viscosity in heavy ion reactions demonstrated for $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$, *Phys. Lett.* **B49** (4), 301–304 (1974).

421. D. Glas and U. Mosel, Microscopic description of nuclear friction in heavy ion collisions, *Nucl. Phys.* **A264** (2), 268–290 (1976).
422. S. E. Koonin and J. R. Nix, Microscopic calculation of nuclear dissipation, *Phys. Rev.* **C13** (1), 209–228 (1976).
423. D. H. E. Gross and H. Kalinowski, Friction model of heavy-ion collisions, *Phys. Rep.* **45** (3), 175–210 (1978).
424. K. Möhring, T. Srokowski, and D. H. E. Gross, Modelling dissipative break-up of heavy ions, *Nucl. Phys.* **A533** (2), 333–358 (1991).
425. J.-L. Tian, X. Li, S.-W. Yan, X.-Z. Wu, and Z.-X. Li, Probing the dissipation mechanism in ternary reactions of $^{197}\text{Au}+^{197}\text{Au}$ by mean free path of nucleons, *Chin. Phys. Lett.* **26** (8), 082504 (2009).
426. P. Fröbrich and S. Y. Xu, The treatment of heavy-ion collisions by Langevin equations, *Nucl. Phys.* **A477** (1), 143–161 (1988).
427. P. Fröbrich and J. Richert, Langevin approach to heavy-ion fusion cross sections and spin distributions above and below the barrier, *Phys. Lett.* **B237** (3–4), 328–333 (1990).
428. J. Marten and P. Fröbrich, Langevin description of heavy-ion collisions within the surface friction model, *Nucl. Phys.* **A545** (4), 854–870 (1992).
429. P. Fröbrich, I. I. Gontchar, and N. D. Mavlitov, Langevin fluctuation-dissipation dynamics of hot nuclei: Rescission neutron multiplicities and fission probabilities, *Nucl. Phys.* **A556** (2), 281–306 (1993).
430. P. Fröbrich and I. I. Gontchar, Langevin description of fusion, deep-inelastic collisions and heavy-ion-induced fission, *Phys. Rep.* **292** (3–4), 131–237 (1998).

431. P. Ván and T. Fülöp, Stability of stationary solutions of the Schrödinger-Langevin equation, *Phys. Lett.* **A323** (5–6), 374–381 (2004).
432. W. Ye, Excitation energy and nuclear dissipation probed with evaporation-residue cross sections, *Phys. Rev.* **C83** (4), 044611 (2011).
433. D. Naderi, Calculation of fission probability using one- and two-body dissipation in fusion-fission reactions, *Phys. Rev.* **C86** (4), 044609 (2012).
434. M. R. Pahlavani and D. Naderi, Study of fusion cross-section in heavy-ion fusion-fission reactions at around fusion barrier energies using the Langevin dynamical approach, *Europ. Phys. J.* **A48** (9), 129 (2012).
435. Y. Aritomo and S. Chiba, Fission process of nuclei at low excitation energies with a Langevin approach, *Phys. Rev.* **C88** (4), 044614 (2013).
436. V. M. Kolomietz and S. V. Lukyanov, Diffuse approximation to the kinetic theory in a Fermi system, *Int. J. Mod. Phys.* **E24** (04), 1550023 (2015).
437. V. M. Kolomietz and S. V. Radionov, Nuclear fission dynamics within a generalized Langevin approach, *Phys. Rev.* **C80** (2), 024308 (2009) [6 pages].
438. V. L. Litnevsky, V. V. Pashkevich, G. I. Kosenko, and F. A. Ivanyuk, Description of synthesis of super-heavy elements within the multidimensional stochastic model, *Phys. Rev.* **C89** (3), 034626 (2014).
439. P. Fröbrich, Fusion and capture of heavy ions above the barrier: Analysis of experimental data with the surface friction model, *Phys. Rep.* **116** (6), 337–400 (1984).
440. N. Loeb, J. A. Maruhn, and P.-G. Reinhard, Equilibration in the time-dependent Hartree-Fock approach probed with the Wigner distribution function, *Phys. Rev.* **C84** (3), 034608 (2011).

441. N. LoebI, A. S. Umar, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard, P. D. Stevenson, and V. E. Oberacker, Single-particle dissipation in a time-dependent Hartree-Fock approach studied from a phase-space perspective, *Phys. Rev.* **C86** (2), 024608 (2012).
442. I. I. Gontchar, R. Bhattacharya, and M. V. Chushnyakova, Quantitative analysis of precise heavy-ion fusion data at above-barrier energies using Skyrme-Hartree-Fock nuclear densities, *Phys. Rev.* **C89** (3), 034601 (2014).
443. M. V. Chushnyakova and I. I. Gontchar, Heavy ion fusion: Possible dynamical solution of the problem of the abnormally large diffuseness of the nucleus-nucleus potential, *Phys. Rev.* **C87** (1), 014614 (2013).
444. A. G. Magner, D. V. Gorpichenko, and J. Bartel, Semiclassical approaches to nuclear dynamics, *Phys. Atom. Nucl.* **80** (1), 122–202 (2017).
445. E. P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* **40** (5), 749–759 (1932).
446. K. V. Pavlii, Dynamical description of fusion-quasifission of heavy nuclei as open quantum system, *Prob. At. Sci. Tech.* **3** (85), 168–174 (2013).
447. V. Blum, G. Lauritsch, J. Maruhn, and P.-G. Reinhard, Comparison of coordinate-space techniques in nuclear mean-field calculations, *J. Comp. Phys.* **100** (2), 364–376 (1992).
448. P.-G. Reinhard and R. Y. Cusson, A comparative study of Hartree-Fock iteration techniques, *Nucl. Phys.* **A378** (3), 418–442 (1982).
449. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems, *Phys. Rev. Lett.* **46** (4), 211–214 (1981).
450. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Quantum tunneling in a dissipative system, *Ann. Phys.* **149** (2), 374–456 (1983).

451. P. Caldirola, Forze non conservative nella meccanica quantistica, *Nuovo Cim.* **18**, 393–400 (1941).
452. E. Kanai, On the quantization of the dissipative systems, *Progr. Theor. Phys.* **3** (4), 440–442 (1948).
453. S. Baskoutas and A. Jannussis, Quantum mechanics of the inverted Caldirola-Kanai oscillator, *Nuov. Cimento* **B 107**, 255–267 (1992).
454. S. Baskoutas and A. Jannussis, Quantum tunnelling effect for the inverted Caldirola-Kanai Hamiltonian, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **25** (23), L1299–L1304 (1992).
455. S. Baskoutas, A. Jannussis, and R. Mignani, Quantum tunneling of a damped and driven, inverted harmonic oscillator, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **26** (24), 7137–7147 (1993).
456. S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani, and V. Papatheou, Tunneling process for non-Hermitian systems: the complex-frequency inverted oscillator, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **26** (17), L819–L824 (1993).
457. S. Baskoutas, A. Jannussis, and R. Mignani, Dissipative tunnelling of the inverted Caldirola-Kanai oscillator, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **27** (6), 2189–2196 (1994).
458. S. Baskoutas, Dissipative tunnelling of coherent states, *Quantum and Semi-class. Opt.: Journ. Europ. Opt. Soc. Part B.* **8** (5), 989–997 (1996).
459. J.-R. Choi, Exact quantum state for the time-dependent repulsive oscillator with a driving force and with a singular perturbation, *Phys. Scripta* **70** (5), 271–275 (2004).
460. J. R. Choi and K. H. Yeon, Time dependent Wigner distribution function

- employed in coherent Schrödinger cat states $|\Psi(t)\rangle = N^{-1/2} (|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle)$, *Phys. Scripta* **78** (4), 045001 (2008).
461. G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, and X.-Y. Guo, Quantum tunneling effect of a time-dependent inverted harmonic oscillator, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **44** (18), 185301 (2011).
462. G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, and X.-Y. Guo, Quantum tunneling effect of a driven inverted harmonic oscillator, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **44** (30), 305301 (2011).
463. G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, and C.-Y. Long, The sojourn time of the inverted harmonic oscillator on the noncommutative plane, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **44** (42), 425301 (2011).
464. G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, and X.-Y. Guo, Time evolution of a time-dependent inverted harmonic oscillator in arbitrary dimensions, *Journ. Phys. A: Math. Theor.* **45** (11), 115301 (2012).
465. D. Schuch, Connection between quantum mechanical and classical time evolution of certain dissipative systems via a dynamical invariant, *Journ. Math. Phys.* **48** (12), 122701 (2007).
466. M. D. Kostin, On the Schrödinger-Langevin equation, *Journ. Chem. Phys.* **57** (9), 3589–3591 (1972).
467. K. Albrecht, A new class of Schrodinger operators for quantized friction, *Phys. Lett.* **B56** (2), 127–129 (1975).
468. R. Hasse, On the quantum mechanical treatment of dissipative systems, *Journ. Math. Phys.* **16** (10), 2005–2011 (1975).
469. N. Gisin, Microscopic derivation of a class of non-linear dissipative schrodinger-like equations, *Physica A* **111** (1–2), 364–370 (1982).

470. P. Exner, Complex-potential description of the damped harmonic oscillator, Journ. Math. Phys. **24** (5), 1129–1135 (1983).
471. A. P. Polychronakos and R. Tzani, Schrödinger equation for particle with friction, Phys. Lett. **B302** (2–3), 255–260 (1993).

ДОДАТОК А

МАТЕМАТИЧНІ ДОДАТКИ

А.1. Поліноми Лежандра

Ми визначаємо *поліноми Лежандра* $P_l(\cos \theta)$ та *приєднані поліноми Лежандра* $P_l^m(\cos \theta)$, відповідно до [43] [див. стор. 752–754, (с,1)–(с,4); також див. [116] (2.6), стор. 34]:

$$\begin{aligned}
 P_l(\cos \theta) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l, \\
 P_l^m(\cos \theta) &= \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m} = \frac{1}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m}}{(d \cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l = \\
 &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)! 2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{d^{l-m}}{(d \cos \theta)^{l-m}} (\cos^2 \theta - 1)^l.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

де $m = 0 \dots l$. Ці поліноми підлягають умовам нормування, які можна застосувати для перевірки знаходження поліномів ($\mu = \cos \theta$; див. [43], (с,6)–(с,9) стор. 753–754):

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [P_l(\mu)]^2 d\mu &= \frac{2}{2l+1}, & \int_{-1}^1 P_l(\mu) P_{l'}(\mu) d\mu &= 0, \\
 \int_{-1}^1 [P_l^m(\mu)]^2 d\mu &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, & \int_{-1}^1 P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu) d\mu &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Знайдемо поліноми Лежандра P_l :

$$\begin{aligned}
 P_0(\cos \theta) &= 1, \\
 P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\
 P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \\
 P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), \\
 P_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3), \\
 P_5(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta).
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Випишемо приєднані поліноми Лежандра при перших значеннях l та m :

$$\begin{aligned}
 P_0^0(\cos \theta) &= 1, & P_1^0(\cos \theta) &= \cos \theta, & P_1^1(\cos \theta) &= \sin \theta, \\
 P_2^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), & P_2^1(\cos \theta) &= 3 \sin \theta \cos \theta, & P_2^2(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 P_3^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), & P_3^1(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1), \\
 P_3^2(\cos \theta) &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta, & P_3^3(\cos \theta) &= 15 \sin^3 \theta,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^0(\cos \theta) &= \frac{1}{8}[35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3], & P_4^3(\cos \theta) &= 105 \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 P_4^1(\cos \theta) &= \frac{1}{2} \sin \theta (35 \cos^3 \theta - 15 \cos \theta), & P_4^4(\cos \theta) &= 105 \sin^4 \theta, \\
 P_4^2(\cos \theta) &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta (105 \cos^2 \theta - 15),
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 P_5^0(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta), & P_5^4(\cos \theta) &= 945 \sin^4 \theta \cos \theta, \\
 P_5^1(\cos \theta) &= \frac{15}{8} \sin \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1), & P_5^5(\cos \theta) &= 945 \sin^5 \theta, \\
 P_5^2(\cos \theta) &= \frac{105}{2} \sin^2 \theta (3 \cos^3 \theta - \cos \theta), \\
 P_5^3(\cos \theta) &= \frac{105}{2} \sin^3 \theta (9 \cos^2 \theta - 1),
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

А.2. Сферичні функції Y_{lm}

Сферичні функції $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ визначаємо, відповідно до [43] (див. стор. 119, (28,7)–(28,8), стор. 752–755):

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}, \quad (\text{A.8})$$

де $P_l^m(\cos \theta)$ — приєднані поліноми Лежандра (див. Додаток А.1). Для функцій $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ виконується умова нормування (див. [43], (28,3), стор. 118):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.9})$$

Функції $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, що відрізняються знаком індекса m , пов'язані друг з другом співвідношеннями (див. (28,9), стор. 119 у [43]):

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^{l-m} Y_{l-m}(\theta, \varphi). \quad (\text{A.10})$$

Випишемо вирази для декількох перших нормованих сферичних функцій $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (див. [43], стор. 754–755):

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), \\ Y_{2,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}, & Y_{2,\pm 2} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} Y_{30} &= -i \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3), \\ Y_{3,\pm 1} &= \pm i \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cdot e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{3,\pm 2} &= -i \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, \\ Y_{3,\pm 3} &= \pm i \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta \cdot e^{\pm 3i\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

А.3. Сферичні функції Бесселя

Визначимо сферичні функції Бесселя (функції Бесселя напівцілого порядку), відповідно до (33,9), (33,10) та (33,11) у [43] (див. стор. 139), так:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^n \left(\frac{d}{x dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}. \quad (\text{A.13})$$

Знайдемо рекурентне співвідношення:

$$J_{n+1/2}(x) = (n - 1/2) \frac{J_{(n-1)+1/2}(x)}{x} - \frac{d J_{(n-1)+1/2}(x)}{dx}. \quad (\text{A.14})$$

Для перших індексів отримаємо

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x}, \\ J_{1+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right\}, \\ J_{2+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x \right\}, \\ J_{3+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2} \right) \sin x + \left(\frac{1}{x} - \frac{15}{x^3} \right) \cos x \right\}, \\ J_{4+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \left(\frac{105}{x^5} - \frac{45}{x^3} + \frac{1}{x} \right) \sin x + \left(-\frac{105}{x^4} + \frac{10}{x^2} \right) \cos x \right\}, \\ J_{5+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \left(\frac{945}{x^6} - \frac{420}{x^4} + \frac{15}{x^2} \right) \sin x + \left(-\frac{945}{x^5} + \frac{105}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x \right\}, \\ J_{6+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left\{ \left(\frac{10395}{x^7} - \frac{4725}{x^5} + \frac{210}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{10395}{x^6} + \frac{1260}{x^4} - \frac{21}{x^2} \right) \cos x \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

А.4. Коефіцієнти Клебша-Гордона

Визначимо коефіцієнти Клебша-Гордона, відповідно до Таблиці ПА.1 з [116] (див. стор. 317, також див. Табл. А.1):

	$(j_a 1 j m_a m_b m)$	
	$m_b = 1$	$m_b = -1$
$j = j_a + 1$	$\left(\frac{(j_a + m)(j_a + m + 1)}{(2j_a + 2)(2j_a + 2)} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a - m)(j_a - m + 1)}{(2j_a + 1)(2j_a + 2)} \right)^{1/2}$
$j = j_a$	$-\left(\frac{(j_a + m)(j_a - m + 1)}{2j_a(j_a + 1)} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a - m)(j_a + m + 1)}{2j_a(j_a + 1)} \right)^{1/2}$
$j = j_a - 1$	$\left(\frac{(j_a - m)(j_a - m + 1)}{2j_a(2j_a + 1)} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a + m + 1)(j_a + m)}{2j_a(2j_a + 1)} \right)^{1/2}$

Табл. А.1. Коефіцієнти Клебша-Гордона.

$$\begin{aligned}
 (011 | 2, -1, 1) &= 0, & (011 | 0, 1, 1) &= \sqrt{\frac{1}{2}}, \\
 (011 | 0, -1, -1) &= \sqrt{\frac{1}{2}}, & (011 | -2, 1, -1) &= 0;
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 (111 | 2, -1, 1) &= 0, & (111 | 0, 1, 1) &= -\sqrt{\frac{1}{2}}, \\
 (111 | 0, -1, -1) &= \sqrt{\frac{1}{2}}, & (111 | -2, 1, -1) &= 0;
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 (211 | 2, -1, 1) &= \sqrt{\frac{3}{5}}, & (211 | 0, 1, 1) &= \sqrt{\frac{1}{10}}, \\
 (211 | 0, -1, -1) &= \sqrt{\frac{1}{10}}, & (211 | -2, 1, -1) &= \sqrt{\frac{3}{5}}.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

А.5. Коефіцієнти $C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m \mu'}$ при $l_i = 0$

Розглянемо коефіцієнти $C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m \mu'}$ при $l_i = 0$:

$$\begin{aligned}
 C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m \mu'} &= (-1)^{l_f + n + 1 - \mu' + \frac{|m + \mu'|}{2}} (n, 1, l_{\text{ph}} | -m - \mu', \mu', -m) \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(2l_f + 1)(2n + 1)(l_f - 1)!(n - |m + \mu'|)!}{32\pi (l_f + 1)!(n + |m + \mu'|)!}}.
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Відповідно до (??), при $l_f = 1$, $l_{\text{ph}} = 1$ та $n = 0$ ми маємо

$$m = -\mu' = \pm 1. \tag{A.20}$$

Коефіцієнт $C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'}$ приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
C_{110}^{m\mu'} &= \\
&= (-1)^{1+0+1-\mu'+0} (011|0, \mu', -m) \sqrt{\frac{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 0 + 1)}{32\pi} \frac{(1-1)! (0-0)!}{(1+1)! (0+0)!}} = \\
&= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|0, \mu', -m).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Враховуючи значення (A.16) для наступних коефіцієнтів Клебша-Гордона:

$$(011|0, 1, 1) = (011|0, -1, -1) = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
C_{110}^{-1-1} &= 0, \\
C_{110}^{-11} &= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|0, 1, 1) = -\sqrt{\frac{3}{128\pi}} = -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \\
C_{110}^{1-1} &= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|0, -1, -1) = -\sqrt{\frac{3}{128\pi}} = -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \\
C_{110}^{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

При $l_f = 1$, $l_{ph} = 1$ та $n = 1$ властивість (A.20) виконується також. Коефіцієнти $C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'}$ приймають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
C_{111}^{m\mu'} &= \\
&= (-1)^{1+1+1-\mu'+0} (111|0, \mu', -m) \sqrt{\frac{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{32\pi} \frac{(1-1)! (1-0)!}{(1+1)! (1+0)!}} = \\
&= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|0, \mu', -m).
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Враховуючи значення (A.17) для наступних коефіцієнтів Клебша-Гордона:

$$(111|0, 1, 1) = -\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (111|0, -1, -1) = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ми отримаємо

$$\begin{aligned}
C_{111}^{-1-1} &= 0, \\
C_{111}^{-11} &= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|0, 1, 1) = -\frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \\
C_{111}^{1-1} &= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|0, -1, -1) = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \\
C_{111}^{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

При $l_f = 1$, $l_{ph} = 1$ та $n = 2$ властивість (A.20) не виконується. Маємо

$$\begin{aligned}
C_{112}^{m\mu'} &= (-1)^{1+2+1-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}} (211|-m-\mu', \mu', -m) \times \\
&\times \sqrt{\frac{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1)(1-1)!(2-|m+\mu'|)!}{32\pi(1+1)!(2+|m+\mu'|)!}} = \\
&= (-1)^{-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|m+\mu'|)!}{(2+|m+\mu'|)!}} \cdot (211|-m-\mu', \mu', -m).
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Розпишемо при різних $m = \pm 1$ та $\mu' = \pm 1$:

$$\begin{aligned}
C_{112}^{-1-1} &= (-1)^{1+\frac{|-1-1|}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|-1-1|)!}{(2+|-1-1|)!}} \cdot (211|1+1, -1, 1) = \\
&= \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{1}{4!}} \cdot (211|2, -1, 1) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211|2, -1, 1), \\
C_{112}^{-11} &= (-1)^{-1+\frac{|-1+1|}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|-1+1|)!}{(2+|-1+1|)!}} \cdot (211|1-1, 1, 1) = \\
&= -\sqrt{\frac{15}{64\pi}} \cdot (211|011) = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211|011), \\
C_{112}^{1-1} &= (-1)^{1+\frac{|1-1|}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|1-1|)!}{(2+|1-1|)!}} \cdot (211|-1+1, -1, -1) = \\
&= -\sqrt{\frac{15}{64\pi}} \cdot (211|0, -1, -1) = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211|0, -1, -1), \\
C_{112}^{11} &= (-1)^{-1+\frac{|1+1|}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|1+1|)!}{(2+|1+1|)!}} \cdot (211|-1-1, 1, -1) = \\
&= \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{1}{4!}} \cdot (211|-2, 1, -1) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211|-2, 1, -1).
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Використовуючи знайдені значення (А.18) для коефіцієнтів Клебша-Гордона:

$$\begin{aligned} (211|2, -1, 1) &= \sqrt{\frac{3}{5}}, & (211|0, 1, 1) &= \sqrt{\frac{1}{10}}, \\ (211|0, -1, -1) &= \sqrt{\frac{1}{10}}, & (211|-2, 1, -1) &= \sqrt{\frac{3}{5}}, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} C_{112}^{-1-1} &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211|2, -1, 1) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \\ C_{112}^{-11} &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211|011) = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \\ C_{112}^{1-1} &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211|0, -1, -1) = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \\ C_{112}^{11} &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211|-2, 1, -1) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Випишемо значення знайдених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} C_{110}^{-1-1} &= 0, & C_{110}^{-11} &= -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, & C_{110}^{1-1} &= -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, & C_{110}^{11} &= 0; \\ C_{111}^{-1-1} &= 0, & C_{111}^{-11} &= -\frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, & C_{111}^{1-1} &= \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, & C_{111}^{11} &= 0; \\ C_{112}^{-1-1} &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, & C_{112}^{-11} &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, & C_{112}^{1-1} &= -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, & C_{112}^{11} &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}. \end{aligned} \tag{A.28}$$

А.6. Функції $f_{lfn}^{m\mu'}(\theta)$

Розглянемо функцію $f_{lfn}^{m\mu'}(\theta)$:

$$f_{lfn}^{m\mu'}(\theta) = P_{l_f}^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos \theta). \tag{A.29}$$

При $l_f = 1$ та $n = 0, 1, 2$ маємо

$$\begin{aligned} f_{10}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_0^{|m+\mu'|}(\cos \theta), \\ f_{11}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_1^{|m+\mu'|}(\cos \theta), \\ f_{12}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_2^{|m+\mu'|}(\cos \theta). \end{aligned} \tag{A.30}$$

Розпишемо цю функцію при різних $m = \pm 1$ та $\mu' = \pm 1$:

$$\begin{aligned}
 f_{10}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_0^2(\cos \theta) = 0, \\
 f_{10}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_0^0(\cos \theta) = \sin^2 \theta, \\
 f_{10}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_0^0(\cos \theta) = \sin^2 \theta, \\
 f_{10}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_0^2(\cos \theta) = 0; \\
 \\
 f_{11}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_1^2(\cos \theta) = 0, \\
 f_{11}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_1^0(\cos \theta) = \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 f_{11}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_1^0(\cos \theta) = \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 f_{11}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_1^2(\cos \theta) = 0; \\
 \\
 f_{12}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^4 \theta, \\
 f_{12}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1), \\
 f_{12}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1), \\
 f_{12}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^4 \theta.
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

ДОДАТОК Б
ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛІ ГАЛЬМІВНОГО
ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ
СФЕРИЧНИХ ЯДЕР

Б.1. Перші корекції амплітуд у теорії збурень квазістаціонарних станів

Відповідно до (1.8) та (1.9) (див. стор. 41), часове рівняння Шредінгера зі збуреним гамільтоніаном та хвильова функція мають вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = (\hat{H}_0(t) + \hat{W}(t)) \Psi(t), \quad (\text{Б.1})$$

$$\Psi(t) = \int_{k_{\min}} a_k(t) \Psi_k^{(0)}(t) dk. \quad (\text{Б.2})$$

Підставляючи (Б.2) у (Б.1), запишемо

$$\begin{aligned} i\hbar \int_{k_{\min}} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} \Psi_k^{(0)} dk + i\hbar \int_{k_{\min}} a_k(t) \frac{\partial \Psi_k^{(0)}}{\partial t} dk = \\ = \hat{H}_0 \int_{k_{\min}} a_k(t) \Psi_k^{(0)} dk + \hat{W}(t) \int_{k_{\min}} a_k(t) \Psi_k^{(0)} dk. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Враховуючи (1.5), отримаємо

$$i\hbar \int_{k_{\min}} \Psi_k^{(0)} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} dk = \int_{k_{\min}} \hat{W}(t) a_k(t) \Psi_k^{(0)} dk. \quad (\text{Б.4})$$

Тут ми вводимо оператор $\hat{W}(t)$ під знак інтеграла, використовуючи *властивість лінійності (суперпозиції)* його дії на функції $\Psi_k^{(0)}$ при різних k . Уважаючи вагові амплітуди $a(t)$ залежними від часу, на які не діє оператор $\hat{W}(t)$, отримаємо

$$i\hbar \int_{k_{\min}} \Psi_k^{(0)} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} dk = \int_{k_{\min}} a_k(t) \hat{W}(t) \Psi_k^{(0)} dk. \quad (\text{Б.5})$$

Домножуючи обидві сторони цієї рівності зліва на $\Psi_m^{(0),*}$ і інтегруючи за змінною \mathbf{r} по усьому простору, отримаємо

$$\begin{aligned} & i\hbar \int \left(\int \Psi_m(0), * \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \right) \cdot \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} dk = \\ & = \int_{k_{\min}}^{k_{\min}} a_k(t) \cdot \left(\int \Psi_m(0), * \hat{W}(t) \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \right) dk. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Припустимо, що для опису розпадаючої системи можна вибрати систему квазістаціонарних хвильових функцій $\Psi_k^{(0)}$ такою, щоб вона задовольняла наступній умові нормування (для станів у неперервному спектрі) (див. [43], п. 5, стор. 30–35):

$$\int \Psi_m^{(0),*}(t) \Psi_k^{(0)}(t) \mathbf{dr} = \delta(k - m). \quad (\text{Б.7})$$

З врахуванням цього, перепишемо (Б.6) у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = \int_{k_{\min}} a_k(t) W_{mk}(t) dk, \quad (\text{Б.8})$$

де

$$W_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0),*} \hat{W}(t) \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \quad (\text{Б.9})$$

— матричні елементи збурення, що включають часовий множник.

У якості незбуреної хвильової функції виберемо хвильову функцію квазістаціонарного i -стану до випромінювання, чому відповідають значення коефіцієнтів у (Б.2): $a_i^{(0)} = \delta(k - i)$ (тобто $a_k^{(0)} = 0$ при $k \neq i$). Для визначення першого наближення шукаємо a_k у вигляді $a_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)}$, причому в праву сторону рівняння (Б.8) (де маємо малі величини V_{mk}) підставляємо $a_k = a_k^{(0)}$.

Це дає

$$i\hbar \frac{\partial a_k^{(1)}(t)}{\partial t} = W_{ki}(t), \quad (\text{Б.10})$$

Для того щоб вказати, до якої з незбурених функцій обчислюється корекція, додамо другого індексу до коефіцієнтів a_k як

$$\Psi_i(t) = \int_{k_{\min}} a_{ki}(t) \Psi_k^{(0)}(t) dk. \quad (\text{Б.11})$$

Відповідно до цього, напишемо результат інтегрування рівняння (Б.10) у вигляді:

$$a_{ki}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int W_{ki}(t) dt. \quad (\text{Б.12})$$

За допомогою таких вагових множників визначаються хвильові функції у першому наближенні.

Б.2. Матричний елемент переходу

Використовуючи хвильові функції у вигляді (1.12) (див. стор. 42), запишемо матричний елемент переходу $i \rightarrow f$ як першу корекцію (1.10):

$$a_{fi}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle k_f, n_k + 1 | \hat{W}(\mathbf{r}, t') | k_i, n_k \rangle dt', \quad (\text{Б.13})$$

де $\Psi_i(\mathbf{r}, t) = |k_i\rangle$ і $\Psi_f(\mathbf{r}, t) = |k_f\rangle$ — нестационарні хвильові функції системи у початковому i -стані й у кінцевому f -стані, які не враховують випромінювання фотонів; n_k — число фотонів одного сорту з імпульсом \mathbf{k} у початковому i -стані. Якщо $n_k = 0$, тоді випромінювання називається *спонтанним*. Якщо $n_k > 0$, тоді випромінювання називається *змушеним (індукованим)*. Наявність фотонів у початковому стані стимулює додаткове випромінювання фотонів цього ж сорту (що буде видно далі з формули для ймовірності випромінювання). Матричний елемент (Б.13) визначено у першому наближенні

по теорії збурень:

$$\begin{aligned}
a_{fi}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \left\langle \Psi_f(\mathbf{r}, t'), n_k + 1 \left| \hat{W}(\mathbf{r}, t') \right| \Psi_i(\mathbf{r}, t'), n_k \right\rangle dt' = \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \left\langle \int_0^{+\infty} g(k_2 - k_f) \psi_f(k_2, \mathbf{r}) e^{-iw(k_2)t} dk_2, n_k + 1 \left| \hat{W}(\mathbf{r}, t') \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \int_0^{+\infty} g(k_1 - k_i) \psi_i(k_1, \mathbf{r}) e^{-iw(k_1)t} dk_1, n_k \right\rangle dt' = \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{+\infty} dk_2 \int_0^{+\infty} dk_1 g^*(k_2 - k_f) g(k_1 - k_i) \times \\
&\times \left\langle \psi_f(k_2, \mathbf{r}), n_k + 1 \left| \int_{t_0}^t e^{iw(k_2)t'} \hat{W}(\mathbf{r}, t') e^{-iw(k_1)t'} dt' \right| \psi_i(k_1, \mathbf{r}), n_k \right\rangle
\end{aligned}$$

або

$$a_{fi}(t) = \int_0^{+\infty} dk_2 \int_0^{+\infty} dk_1 \cdot g^*(k_2 - k_f) g(k_1 - k_i) \cdot \langle k_2, n_k + 1 | \tilde{W}(\mathbf{r}, t) | k_1, n_k \rangle, \quad (\text{Б.14})$$

де

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{iw_2 t'} \hat{W}(\mathbf{r}, t') e^{-iw_1 t'} dt'. \quad (\text{Б.15})$$

У кулонівському калібруванні оператор випромінювання $\hat{W}(\mathbf{r}, t)$ має вигляд (1.4) (див. стор. 40).

Враховуючи векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ електромагнітного поля дочірнього ядра у вигляді (1.14) [див. стор. 42], запишемо

$$\begin{aligned}
\hat{W}(\mathbf{r}, t) &= -Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sum_{k, \alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \times \\
&\times \left(\hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - wt)} + \hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha}^+ \mathbf{e}^{(\alpha)*} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - wt)} \right) (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (\text{Б.16})
\end{aligned}$$

де $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації випроміненого фотона, \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона й $w = k = |\mathbf{k}|$. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} у

кулоновському калібруванні. Ми маємо дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ і $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k} ($\alpha = 1, 2$). Підставляючи цей вираз у (Б.15), отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\mathbf{r}, t) &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sum_{k, \alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \int_{t_0}^t e^{iw_2 t'} \times \\ &\times \left(\hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - wt)} + \hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha}^+ \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - wt)} \right) e^{-iw_1 t'} dt' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Матричний елемент переходу перетвориться до наступного:

$$\begin{aligned} &\langle k_2, n_k + 1 | \tilde{W}(t) | k_1, n_k \rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle k_2, n_k + 1 \left| \int_{t_0}^t e^{iw_2 t'} \hat{W}(\mathbf{r}, t') e^{-iw_1 t'} dt' \right| k_1, n_k \right\rangle = \\ &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sum_{k, \alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \cdot \left\langle k_2, n_k + 1 \left| \hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_{t_0}^t e^{i(w_2 - w_1 - w)t'} dt' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \right. \right. \\ &+ \left. \hat{c}_{\mathbf{k}, \alpha}^+ \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_{t_0}^t e^{i(w_2 - w_1 + w)t'} dt' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1, n_k \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

Фотони відповідають статистиці Бозе, відповідно до якої маємо:

$$\begin{aligned} \langle n_k + 1 | \hat{c}_{k, \alpha}^+ | n_k \rangle &= \sqrt{n_k + 1}, \\ \langle n_k + 1 | \hat{c}_{k, \alpha} | n_k \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Відповідно до (Б.19), перший доданок у (Б.18) зводиться до нуля й ми отримуємо

$$\begin{aligned} &\langle k_2, n_k + 1 | \tilde{W}(t) | k_1, n_k \rangle = \\ &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{k, \alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \sqrt{n_k + 1} \int_{t_0}^t e^{i(w_2 - w_1 + w)t'} dt'. \end{aligned} \quad (\text{Б.20})$$

Далі ми будемо вивчати спонтанне випромінювання, тобто випромінювання лише першого фотона з імпульсом \mathbf{k} , до випромінювання якого фотонів цього

сорту не було ($n_k = 0$). Тоді сумування по n_k можна усунути та вираз (Б.20) спрощується:

$$\begin{aligned} & \langle k_2, 1 | \tilde{W}(t) | k_1, 0 \rangle = \\ & = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot \int_{t_0}^t e^{i(w_2-w_1+w)t'} dt'. \end{aligned} \quad (\text{Б.21})$$

Б.3. Осциляції у спектрах випромінювання у нестационарному розгляді

Якщо на систему (α -частинка й дочірнє ядро) діє збурення протягом деякого скінченного часового інтервалу t , то ми маємо (при $w_1 - w_2 \neq w$):

$$\begin{aligned} & \langle k_2, 1 | \tilde{W}(t) | k_1, 0 \rangle = \\ & = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot \frac{e^{i(w_2-w_1+w)t'}}{i(w_2-w_1+w)} \Bigg|_{t'=0}^{t'=t} = \\ & = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \times \\ & \times \frac{\sin(w_2-w_1+w)t - i \cos(w_2-w_1+w)t + i}{w_2-w_1+w} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \langle k_2, 1 | \tilde{W}(t) | k_1, 0 \rangle = \\ & = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot \frac{i}{w_2-w_1+w} + \\ & + Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \times \\ & \times \frac{\sin(w_2-w_1+w)t - i \cos(w_2-w_1+w)t}{w_2-w_1+w}. \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Перший доданок у цій формулі — це незалежна від часового інтервалу t функція, яка визначає ймовірність випромінювання фотона при α -розпаді у стаціонарному підході. Другий доданок вносить у матричний елемент осциляції,

період яких безпосередньо пов'язаний із тривалістю t дії збурення. Отже, ми одержали ймовірність гальмівного випромінювання, що містить як монотонну, так і осцилюючу складові.

Тепер можна врахувати, що α -частинка при вильоті проходить через усі атомні оболонки. Можна виділити деяку границю R_{at} зовнішньої оболонки, де закінчується її вплив на α -частинку. При визначенні ймовірностей випромінювання фотонів слід включити всі ці оболонки у сумарний електромагнітний заряд (що вже залежить від відстані між центрами мас α -частинки й дочірнього ядра): якщо при старті α -частинки цей заряд практично дорівнює числу протонів дочірнього ядра (тобто його зарядовому числу, яке є досить великим, оскільки α -розпадні ядра важкі), то при проходженні α -частинки крізь границю R_{at} цей заряд знизиться до -2 . Якщо за межами зовнішньої границі R_{at} впливом такого сумарного електромагнітного поля на α -частинку можна знехтувати, то область з відстанню до R_{at} можна розглядати, як область реального впливу електромагнітного поля атома на α -частинку. У такому розгляді період осциляцій несе інформацію про часову тривалість прольоту α -частинки, починаючи від моменту її формування у ядрі й закінчуючи її покиданням просторової області, обмеженої зовнішньою атомною оболонкою із границею R_{at} .

Б.4. Стаціонарне наближення

Розглянемо межі інтегрування:

$$t_0 = -\infty, \quad t_1 = +\infty. \quad (\text{Б.23})$$

Враховуючи властивість

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} dt = 2\pi \delta(\alpha), \quad (\text{Б.24})$$

з (Б.21) отримаємо

$$\langle k_2, 1 | \tilde{W} | k_1, 0 \rangle = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha)*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \quad (\text{Б.25})$$

Нехай

$$F_{fi} = Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} p(k_i, k_f), \quad (\text{Б.26})$$

$$p(k_i, k_f) = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \mathbf{p}(k_i, k_f), \quad \mathbf{p}(k_i, k_f) = \left\langle k_2 \left| e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle.$$

Тоді перепишемо вирази (Б.25) так:

$$\langle k_2, 1 | \tilde{W} | k_1, 0 \rangle = F_{21} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \quad (\text{Б.27})$$

Матричний елемент (Б.14) приймає наступного вигляду:

$$a_{fi} = \int dk_2 \int dk_1 g^*(k_2 - k_f) g(k_1 - k_i) \cdot F_{21} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \quad (\text{Б.28})$$

Для квазімонохроматичних пакетів маємо

$$a_{fi} = (\Delta k)^2 |C|^2 \cdot F_{fi} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w), \quad (\text{Б.29})$$

де C — постійна. Виберемо її, увівши нормування для пакетів

$$(\Delta k)^2 c^2 = 1. \quad (\text{Б.30})$$

Отримаємо остаточний вираз для матричного елемента

$$a_{fi} = F_{fi} \cdot 2\pi\delta(w_f - w_i + w). \quad (\text{Б.31})$$

Такий вираз збігається (з точністю до множника 2π) із загальною структурою матричного елемента у підході квантової теорії поля (наприклад, див. [113] (21.2) п. 21, стор. 168–169, де функція F_{fi} для діаграм є гладкою, не містить інших δ -функцій). Наявність сингулярного множника у (Б.31) відповідає закону збереження енергії системи з випромінюванням.

Далі нас будуть цікавити *ймовірності переходів*, що визначаються на основі квадрата матричного елемента a_{fi} . У квантовій механіці використовують ймовірності переходів, що відносяться до одиничного інтервалу часу й одиничного просторового об'єму. Такі ймовірності можна визначити, наприклад, у квантовій теорії поля, якщо матричний елемент включає 4-вимірну δ -функцію. У нашому випадку безпосереднє обчислення квадрата матричного елемента (Б.31) не дозволяє визначити ймовірність переходу в одиничному просторовому об'ємі. Однак, цю проблему можна розв'язати, нормуючи ймовірність на потік частинок, що вилітають.

При обчисленні квадрата матричного елемента доводиться мати справу з добутком двох дельта функцій, що є сингулярними функціями. Розглянемо два способи обчислення такого добутку. Перший спосіб ми беремо з [113] (див. п. 21, стор. 169), який використовується при побудові ймовірності переходу на основі матричного елемента у підході квантової теорії поля. Беручи до уваги, що одновимірна δ -функція виникає у результаті інтегрування по всьому часовому інтервалу ($T \rightarrow \infty$), знаходимо *формулу пониження ступеня δ -функції* (див. [113], § 21, стор. 169):

$$[\delta(w)]^2 = \delta(w) \delta(0) = \delta(w) (2\pi)^{-1} \int dt = \delta(w) (2\pi)^{-1} T. \quad (\text{Б.32})$$

Звідки отримаємо

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w), \quad (\text{Б.33})$$

що подібно виразу (4.21) у [113] (з точністю до множника $(2\pi)^2$, див. п. 21, стор. 169) і збігається з (42,5) у [43] (точно, див. § 42, стор. 189). Сингулярний множник T зникає при переході виразу (Б.33) до ймовірності в одиницю часу.

Другий спосіб можна взяти з [43] (див. п. 42, стор. 188-189). Запишемо матричний елемент до накладення стаціонарної межі у вигляді:

$$a_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V_{fi}(t) dt, \quad (\text{Б.34})$$

де $V_{fi}(t)$ — оператор нестационарного збурення. Виберемо вигляд функції $V_{fi}(t)$ для квазімонохроматичних пакетів при спонтанному випромінюванні. З (Б.14), (Б.21) і (Б.30) отримаємо (виберемо $t_0 = 0$, $t_1 = T$):

$$\begin{aligned} V_{fi}(t) &= i\hbar \cdot F_{fi} \cdot e^{i(w_2 - w_1 + w)t} = \\ &= i\hbar \cdot Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \left\langle k_2 \left| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_1 \right\rangle \cdot e^{i(w_2 - w_1 + w)t}, \end{aligned} \quad (\text{Б.35})$$

де функція F_{fi} визначена у (Б.26). Підставляючи V_{fi} у (Б.34), отримаємо

$$a_{fi} = -i F_{fi} \frac{e^{i(w_f - w_i + w)T} - 1}{w_f - w_i + w}. \quad (\text{Б.36})$$

Звідси знаходимо квадрат матричного елемента:

$$|a_{fi}|^2 = |F_{fi}|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{(w_f - w_i + w)T}{2}}{(w_f - w_i + w)^2}. \quad (\text{Б.37})$$

Використовуючи наступну формулу (див. [43], стор. 188):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha T}{\alpha^2 T} = \pi \delta(\alpha), \quad (\text{Б.38})$$

при великих $T \rightarrow +\infty$ отримаємо

$$|a_{fi}|^2 = \pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta\left(\frac{w_f - w_i + w}{2}\right). \quad (\text{Б.39})$$

Використовуючи формулу:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad (\text{Б.40})$$

отримаємо

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w).$$

Отже, ми одержали формулу (Б.33), що збігається з формулою (42,5) у [43] (див. стор. 189) з точністю до множника \hbar . Однак, множник \hbar [що з'являється при введенні оператора випромінювання (Б.30)] входить явно у матричний елемент F_{fi} , що робить збіг між (Б.33) і формалізмом у п. 42 у [43] повним.

Б.5. Мультипольний підхід до визначення матричного елемента

Б.5.1. Наближення сферично симетричного α -розпаду

Будемо вважати, що взаємодія між α -частинкою й дочірнім ядром при розпаді може бути описана за допомогою потенціалу, що повністю залежить лише від відстані між центрами мас α -частинки й дочірнього ядра. У такому випадку застосовується сферично симетричний опис розпаду. Ми зорієнтуємо систему координат так, щоб вісь z була співнаправлена з вектором \mathbf{k} , і отримаємо

$$D_{\nu\mu}l(\varphi, \theta, 0) = \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{Б.41})$$

Хвильові функції розпадаючої системи в початковому й кінцевому станах розділяються на радіальну й кутову компоненти, такі стани характеризуються квантовими числами l і m . Нас буде цікавити випромінювання фотона, при якому система переходить у суперпозицію по всіх можливих кінцевих станах з різними числами m_f при однаковому l_f . Нехай у початковому стані ми маємо $l_i = m_i = 0$ і радіальна компонента хвильової функції $\varphi_f(r)$ не залежить від m_f при обраному l_f . Маємо

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \varphi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r^i), \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= \varphi_f(r) \sum_{m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r^f). \end{aligned} \quad (\text{Б.42})$$

Тоді матричний елемент (1.26) перетвориться до такого

$$p(k_i, k_f) = \sqrt{2\pi} \sum_{l=1} (-i)l \sqrt{2l+1} \left[p_l^M - i p_l^E \right], \quad (\text{Б.43})$$

де

$$p_l^M = \sum_{\mu=-1,1} \mu h_\mu p_{l\mu}^M, \quad p_l^E = \sum_{\mu=-1,1} \mu^2 h_\mu p_{l\mu}^E \quad (\text{Б.44})$$

i

$$\begin{aligned}
p_{l\mu}^M &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, M), \\
p_{l\mu}^E &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, E).
\end{aligned} \tag{Б.45}$$

Використовуючи *градієнтну формулу* (див. (2.56), стор. 46 у [116]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(r) Y_{lm}(\mathbf{n}_r) = \\
&= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) \mathbf{T}_{l-1,m}(\mathbf{n}_r) - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) \mathbf{T}_{l+1,m}(\mathbf{n}_r),
\end{aligned} \tag{Б.46}$$

знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) = - \frac{d\varphi_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i), \tag{Б.47}$$

і тоді матричні елементи здобувають вигляду:

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}}^M &= - I_M(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}), \\
p_{l_{\text{ph}}}^E &= - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} I_E(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}-1) + \\
&+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} I_E(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}+1),
\end{aligned} \tag{Б.48}$$

де

$$\begin{aligned}
J(l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l, r) \frac{d\varphi_i(r)}{dr} j_n(kr) r^2 dr, \\
I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
I_E(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{Б.49}$$

Обчислимо наступні коефіцієнти Клебша-Гордона (див. Додаток А.4):

$$(110 | 1, -1, 0) = (110 | -1, 1, 0) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \tag{Б.50}$$

з (1.31) і (Б.47) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) &= \sum_{\mu=\pm 1} (110 | -\mu\mu 0) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_\mu = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_\mu, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{d\varphi_i(r)}{dr} \sum_{\mu=-1,1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_\mu \end{aligned} \quad (\text{Б.51})$$

і для кутових інтегралів для переходу у суперпозицію за всіма можливими кінцевими f -станами з різними m_f при обраному l_f з (Б.49) знаходимо

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{Б.52})$$

Б.5.2. Матричний елемент при $l_i \neq 0$

Якщо, ядро при розпаді у початковому стані має $l_i \neq 0$, то хвильову функцію такого стану можна записати так:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \varphi_i(r) \sum_{m_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i). \quad (\text{Б.53})$$

Використовуючи градієнтну формулу (Б.46), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \varphi_i(r) \sum_{m_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i + 1}{r} \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i - 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \\ &- \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i + 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i). \end{aligned} \quad (\text{Б.54})$$

Тепер знайдемо магнітну й електричну матричні компоненти при $l_i \neq 0$. Для магнітної компоненти p_l^M маємо

$$\begin{aligned}
p_l^M &= \sum_{\mu=-1,1} \mu h_\mu \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, M) = \\
&= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i m_f} \mu h_\mu \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \varphi_f^*(r) Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r} \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} j_{l_{\text{ph}}}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}),
\end{aligned}$$

а для електричної компоненти $p_{l_{\text{ph}}}^E$ отримаємо

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}}^E &= \sum_{\mu=\pm 1} \mu^2 h_\mu \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}} \mu}^*(\mathbf{r}, E) = \\
&= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i m_f} h_\mu \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \varphi_f^*(r) Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r} \varphi_i(r) \right) \cdot \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} \varphi_i(r) \right) \cdot \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) \cdot \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}-1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) - \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) \cdot \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}+1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Ці компоненти можна представити у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}}^M &= \sqrt{\frac{1}{2l_i + 1}} \left\{ \sqrt{l_i} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1) \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i + 1} I_M(l_f, l_i, l_{\text{ph}}, l_i - 1) \cdot \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} \left. \right\}, \\
p_{l_{\text{ph}}}^E &= \sqrt{\frac{1}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} \cdot \left\{ \sqrt{l_i(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} - 1) \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} + 1) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} + \\
&+ \sqrt{(l_i + 1)(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} - 1) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{(l_i + 1)l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} + 1) \times \\
&\times \left. \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} \right\},
\end{aligned} \tag{Б.55}$$

де введені наступні позначення:

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \frac{d\varphi_i(r, l_i)}{dr} j_n(kr) r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \varphi_i(r, l_i) j_n(kr) r dr, \\
I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \mu h_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, l_2) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} h_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_2, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{Б.56}$$

Б.5.3. Фізичний зміст векторів \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_r^f , \mathbf{n}_{ph} і розрахунок кутових інтегралів при $l_i = 0$

Проаналізуємо фізичний зміст векторів \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_r^f і \mathbf{n}_{ph} . Спочатку розглянемо вектор \mathbf{n}_r^i . Відповідно до визначення (Б.53) хвильової функції $\varphi_i(\mathbf{r})$, він показує напрямок радіус-вектора \mathbf{r} від центру системи координат до точки простору, де квадрат модуля хвильової функції характеризує ймовірність появи (знаходження) частинки до випромінювання фотона. Такий опис появи частинки у точці, зазначеної радіус-вектором \mathbf{r} , має ймовірнісний сенс і виконується по всьому просторі. Кути θ_i і φ_i визначають орієнтацію вектора \mathbf{n}_r^i та його положення відносно осі Oz системи координат (осі аксіальної симетрії дочірнього ядра).

Вектор \mathbf{n}_r^f визначає напрямок радіус-вектора \mathbf{r} від центру системи координат до точки простору, де квадрат модуля хвильової функції $\varphi_f(\mathbf{r})$ характеризує ймовірність появи (знаходження) частинки після випромінювання фотона. Такий опис знаходження частинки також виконується по всьому просторі й знову має ймовірнісний сенс. Зміна напрямку руху (або тунелювання) частинки у результаті випромінювання фотона може бути описана зміною квантових чисел l і m у кутовій хвильовій функції: $Y_{00}(\mathbf{n}_r^i) \rightarrow Y_{lm}(\mathbf{n}_r^f)$ (модулі квадратів яких характеризують ймовірність знаходження цієї частинки по різних напрямках, вносячи асиметрію). Кути θ_f і φ_f від \mathbf{n}_r^f знову визначають орієнтацію радіус-вектора \mathbf{r} відносно осі Oz системи координат. Тобто, обидва вектори \mathbf{n}_r^i і \mathbf{n}_r^f у кутових інтегралах (Б.56) мають однаковий сенс і тому збігаються. Ми маємо

$$\mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f. \quad (\text{Б.57})$$

Вектор \mathbf{n}_{ph} визначає напрямок радіус-вектора \mathbf{r} від центру системи координат до точки простору, де хвильова функція фотона описує його “появу”. Тому можна записати:

$$\mathbf{n}_{ph} = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f = \mathbf{n}_r. \quad (\text{Б.58})$$

Оскільки ми вибрали систему координат так, щоб вісь z була співнаправлена з вектором випромінювання фотона \mathbf{k} , тоді підінтегральна функція з вектором \mathbf{r} у матричному елементі являє собою амплітуду (а її квадрат — ймовірність) появи у точці простору \mathbf{r} частинки після випромінювання фотона, коли цей фотон випромінений уздовж осі z . Тоді кут θ (від вектора \mathbf{n}_r) саме й виявляється розташованим між напрямками руху частинки (з врахуванням тунелювання) і напрямком випромінювання фотона.

Знайдемо явний вигляд кутових інтегралів I_M , I_E і матричних елементів $\mathbf{p}(k_i, k_f, \varphi, \theta)$, $\mathbf{p}(k_i, k_f, \theta)$ при $l_i = 0$. З врахуванням (Б.58), перепишемо кутові інтеграли (Б.52) так:

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{Б.59})$$

Підставляючи сюди вигляд (1.31) для векторної сферичної гармоніки у потрібних індексах

$$\mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu) Y_{n, \mu - \mu''}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu''}, \quad (\text{Б.60})$$

отримаємо

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \boldsymbol{\xi}_{\mu''}^* \times \\ &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu''}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \boldsymbol{\xi}_{\mu''}^* \times \\ &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu''}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega \end{aligned}$$

або (враховуючи ортогональність векторів $\xi_{\pm 1}$)

$$\begin{aligned}
 I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu, \mu' = \pm 1} \mu h_\mu(n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \times \\
 &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\
 I_E(l_f, l_{\text{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu, \mu' = \pm 1} h_\mu(n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \times \\
 &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{B.61}$$

Тепер розглянемо кутовий інтеграл у цих виразах. Підставляючи сюди сферичні функції (визначивши їх, відповідно до (A.8) у Додатку A.2)

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}, \tag{B.62}$$

де $P_l^m(\cos \theta)$ — приєднані поліноми Лежандра (див. Додаток A.1), отримаємо

$$\begin{aligned}
 &\int Y_{lm}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega = \\
 &= \int (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} (-1)^l i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{-im\varphi} \times \\
 &\times (-1)^{\frac{-\mu'+|\mu'|}{2}} i^1 \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1}{4\pi} \frac{(1-|\mu'|)!}{(1+|\mu'|)!}} P_1^{|\mu'|}(\cos \theta) \cdot e^{-i\mu'\varphi} \times \\
 &\times (-1)^{\frac{\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}} (-1)^n i^n \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}} \times \\
 &\times P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos \theta) \cdot e^{i(-\mu+\mu')\varphi} \cdot \sin \theta d\theta d\varphi =
 \end{aligned}$$

та нарешті

$$\begin{aligned}
 &\int Y_{lm}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega = \\
 &= (-1)^{\frac{m+|m|-\mu'+1+\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}} (-1)^{l+n} i^{l+n+1} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{3}{8\pi} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}} \int_0^{2\pi} e^{i(-m-\mu'+\mu+\mu')\varphi} d\varphi \times \\
 &\times \int_0^\pi P_l^{|m|}(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos \theta) \cdot \sin \theta d\theta d\varphi.
 \end{aligned} \tag{B.63}$$

Інтеграл по φ відмінний від нуля лише при виконанні умови:

$$m = -\mu.$$

Враховуючи $\mu = \pm 1$, одержуємо обмеження на можливі значення чисел m і l_f :

$$m = -\mu = \pm 1, \quad l_f \geq 1, \quad n \geq |\mu - \mu'| = |m + \mu'|. \quad (\text{Б.64})$$

Отже, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int Y_{lm}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r) Y_{n,\mu-\mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega = \\ & = (-1)^{l+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}} i^{l+n+1} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \times \\ & \times \int_0^\pi P_l^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{Б.65})$$

Тепер розпишемо повний кутовий інтеграл $I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n)$ у (Б.61), виконуючи інтегрування по куту φ :

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\text{ph}}, n) & = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} (n, 1, l_{\text{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) i^{l_f+n+1} \times \\ & \times (-1)^{l_f+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}} \sqrt{\frac{3(2l_f+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \times \\ & \times \int_0^\pi P_{l_f}^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = \\ & = \sum_{m_f} -m h_{-m} i^{l_f+n+1} (-1)^{l_f+n+1} \sqrt{\frac{(2l_f+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}} \times \\ & \times \sum_{\mu'=\pm 1} (-1)^{-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}} (n, 1, l_{\text{ph}} | -m - \mu', \mu', -m) \sqrt{\frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \times \\ & \times \int_0^\pi P_{l_f}^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Уведемо коефіцієнт

$$C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m\mu'} = (-1)^{l_f+n+1-\mu+\frac{|m+\mu'|}{2}} (n, 1, l_{\text{ph}} | -m - \mu', \mu', -m) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(2l_f+1)(2n+1)(l_f-1)!(n-|m+\mu'|)!}{32\pi(l_f+1)!(n+|m+\mu'|)!}} \quad (\text{Б.66})$$

і функцію

$$f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) = P_{l_f}^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos \theta). \quad (\text{Б.67})$$

У результаті ми отримуємо повні кутові інтеграли

$$I_M(l_f; l_{\text{ph}}, n) = \sum_{m_f} -m h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m\mu'} \int_0^\pi f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) \sin \theta d\theta,$$

$$I_E(l_f; l_{\text{ph}}, n) = \sum_{m_f} h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m\mu'} \int_0^\pi f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{Б.68})$$

Визначимо диференціальні вирази від цих кутових інтегралів по куту θ так:

$$\frac{d I_M(l_f; l_{\text{ph}}, n)}{\sin \theta d\theta} = \sum_{m_f} -m h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m\mu'} f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta),$$

$$\frac{d I_E(l_f; l_{\text{ph}}, n)}{\sin \theta d\theta} = \sum_{m_f} h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} n}^{m\mu'} f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) \quad (\text{Б.69})$$

і диференціальні матричні елементи p_l^M і p_l^E , що залежать від кута θ , так:

$$\frac{d p_{l_{\text{ph}}}^M}{\sin \theta d\theta} = - \frac{d I_M(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}})}{\sin \theta d\theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}),$$

$$\frac{d p_{l_{\text{ph}}}^E}{\sin \theta d\theta} = - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} \cdot \frac{d I_E(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1)}{\sin \theta d\theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}-1) +$$

$$+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} \cdot \frac{d I_E(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1)}{\sin \theta d\theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}+1)$$

або

$$\begin{aligned}
\frac{d p_{l_{\text{ph}}}^M}{\sin \theta d \theta} &= \sum_{m_f} m h_{-m} i^{l_f+l_{\text{ph}}+1} J(l_f, l_{\text{ph}}) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}}^{m \mu'} f_{l_f l_{\text{ph}}}^{m \mu'}(\theta), \\
\frac{d p_{l_{\text{ph}}}^E}{\sin \theta d \theta} &= \sum_{m_f} -h_{-m} i^{l_f+l_{\text{ph}}} \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2 l_{\text{ph}}+1}} J(l_f, l_{\text{ph}}-1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1}^{m \mu'} f_{l_f, l_{\text{ph}}-1}^{m \mu'}(\theta) - \\
&\quad - h_{-m} i^{l_f+l_{\text{ph}}} \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2 l_{\text{ph}}+1}} J(l_f, l_{\text{ph}}+1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1}^{m \mu'} f_{l_f, l_{\text{ph}}+1}^{m \mu'}(\theta).
\end{aligned} \tag{B.70}$$

Можна бачити, що інтегрування цих функцій (Б.70) по куту θ за межами від 0 до π дає повні матричні елементи p_i^M і p_i^E у точності.

Б.5.4. Розрахунок кутових і повних матричних елементів при перших числах l_f, l_{ph}

Знайдемо матричні елементи при перших числах l_f і l_{ph} . Нехай

$$l_f = 1, \quad l_{\text{ph}} = 1. \tag{B.71}$$

При таких числах матричні елементи (Б.70) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{d p_1^M}{\sin \theta d \theta} &= -i J(1, 1) \cdot \sum_{m=\pm 1} m h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{111}^{m \mu'} f_{11}^{m \mu'}(\theta), \\
\frac{d p_1^E}{\sin \theta d \theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} J(1, 0) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{110}^{m \mu'} f_{10}^{m \mu'}(\theta) + \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} J(1, 2) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{112}^{m \mu'} f_{12}^{m \mu'}(\theta).
\end{aligned} \tag{B.72}$$

Обчисливши коефіцієнти $C_{11n}^{m\mu'}$ і функції $f_{1n}^{m\mu'}(\theta)$ для перших чисел l_f і l_{ph} (див. Додаток А.5), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dp_1^M}{\sin \theta d\theta} &= -i J(1, 1) \cdot \left(-h_1 C_{111}^{-1,1} f_{11}^{-1,1}(\theta) + h_{-1} C_{111}^{1,-1} f_{11}^{1,-1}(\theta) \right) = \\ &= -i J(1, 1) \cdot \left(h_1 \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta + h_{-1} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \right) = \\ &= -i J(1, 1) \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot (h_1 + h_{-1}) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta = \\ &= -i J(1, 1) \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot (-i\sqrt{2}) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1^E}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} J(1, 0) \left(h_1 C_{110}^{-1,1} f_{10}^{-1,1}(\theta) + h_{-1} C_{110}^{1,-1} f_{10}^{1,-1}(\theta) \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{3}} J(1, 2) \cdot \left(h_1 C_{112}^{-1,-1} f_{12}^{-1,-1}(\theta) + h_1 C_{112}^{-1,1} f_{12}^{-1,1}(\theta) + \right. \\ &+ \left. h_{-1} C_{112}^{1,-1} f_{12}^{1,-1}(\theta) + h_{-1} C_{112}^{1,1} f_{12}^{1,1}(\theta) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} J(1, 0) \left(-h_1 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \sin^2 \theta - h_{-1} \cdot \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \sin^2 \theta \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{3}} J(1, 2) \left(h_1 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot 3 \sin 4\theta - h_1 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) - \right. \\ &- \left. h_{-1} \cdot \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) + h_{-1} \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot 3 \sin^4 \theta \right) = \\ &= i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1, 0) \cdot \sin^2 \theta + \\ &+ i \frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 2) \cdot \left(-3 \sin^4 \theta + \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dp_1^M}{\sin \theta d\theta} &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 1) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \frac{dp_1^E}{\sin \theta d\theta} &= i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1, 0) \cdot \sin^2 \theta + i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 2) \cdot \sin^2 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta). \end{aligned} \tag{Б.73}$$

Знайдемо тепер повні матричні елементи. Інтегруючи (Б.73) по куту θ , отримаємо

$$\begin{aligned}
 p_1^M &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} J(1, 1) \cdot \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta = \\
 &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} J(1, 1) \cdot \int_0^\pi \sin 3\theta d\sin \theta = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} J(1, 1) \cdot \frac{\sin 4\theta}{4} \Big|_0^\pi = 0, \\
 p_1^E &= i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} J(1, 0) \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta + \\
 &+ i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} J(1, 2) \int_0^\pi \sin^2 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta) \cdot \sin \theta d\theta = \\
 &= -i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} J(1, 0) \left\{ \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{3} \right\} \Big|_0^\pi - \\
 &- i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} J(1, 2) \left\{ -2 \cos \theta + \frac{5 \cos 3\theta}{3} - \frac{3 \cos 5\theta}{5} \right\} \Big|_0^\pi
 \end{aligned}$$

або

$$p_1^M = 0, \quad p_1^E = i \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\}. \quad (\text{Б.74})$$

Б.6. Дипольне наближення

Б.6.1. Розрахунок матричного елемента

При розрахунку матричного елемента у дипольному наближенні зручно використовувати наступне співвідношення:

$$\langle f | \mathbf{p} | i \rangle = -\frac{i\hbar}{E_i - E_f} \left\langle f \left| \frac{\partial V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle + \frac{i\hbar}{E_i - E_f} \left\langle f \left| V_{l,f}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle \quad (\text{Б.75})$$

або

$$\left\langle f \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle = \frac{1}{w_{fi}} \left\langle f \left| \frac{\partial V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle - \frac{1}{w_{fi}} \left\langle f \left| V_{l,f}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle. \quad (\text{Б.76})$$

Доведемо це співвідношення.

Розглянемо наступний комутатор:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \mathbf{p}] \varphi(\mathbf{r}) &= \hat{H} \mathbf{p} \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p} \hat{H} \varphi(\mathbf{r}) = \\
&= \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{p} \cdot \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \cdot \varphi(\mathbf{r}) = \\
&= V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} \cdot \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p} \cdot V(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) + i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = \\
&= i\hbar \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

або

$$[\hat{H}, \mathbf{p}] = i\hbar \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (\text{Б.77})$$

Ми врахуємо, що при переході з початкового у кінцевий стан змінюється орбітальне квантове число системи ($l_i \neq l_f$). Тому гамільтоніани розпадаючої системи у початковому й кінцевому станах відрізняються відцентровою компонентою потенціалу, та ми отримуємо (маємо $l_i = 0$):

$$\hat{H}_f = \hat{H}_i + V_{l,f}. \quad (\text{Б.78})$$

Звідси запишемо

$$\begin{aligned}
\hat{H}_f \mathbf{p} - \mathbf{p} \hat{H}_i &= \hat{H}_i \mathbf{p} + V_{l,f} \mathbf{p} - \mathbf{p} \hat{H}_i = \\
&= [\hat{H}_i, \mathbf{p}] + V_{l,f} \mathbf{p} = i\hbar \frac{\partial V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + V_{l,f} \mathbf{p}.
\end{aligned} \quad (\text{Б.79})$$

Також запишемо

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}_f \mathbf{p} | i \rangle &= \langle f | E_f \mathbf{p} | i \rangle = E_f \cdot \langle f | \mathbf{p} | i \rangle, \\
\langle f | \mathbf{p} \hat{H}_i | i \rangle &= \langle f | \mathbf{p} E_i | i \rangle = E_i \cdot \langle f | \mathbf{p} | i \rangle.
\end{aligned} \quad (\text{Б.80})$$

Звідси знайдемо

$$\langle f | \hat{H}_f \mathbf{p} | i \rangle - \langle f | \mathbf{p} \hat{H}_i | i \rangle = E_f \cdot \langle f | \mathbf{p} | i \rangle - E_i \cdot \langle f | \mathbf{p} | i \rangle = (E_f - E_i) \cdot \langle f | \mathbf{p} | i \rangle. \quad (\text{Б.81})$$

Враховуючи (Б.79), звідси отримуємо співвідношення (Б.75):

$$\begin{aligned}
\langle f | \mathbf{p} | i \rangle &= \frac{\langle f | \hat{H}_f \mathbf{p} | i \rangle - \langle f | \mathbf{p} \hat{H}_i | i \rangle}{E_f - E_i} = \\
&= - \frac{i\hbar}{E_i - E_f} \left\langle f \left| \frac{\partial V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} - V_{l,f}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| i \right\rangle.
\end{aligned}$$

Б.6.2. Векторний потенціал \mathbf{A} і матричний елемент

Матричний елемент $p(k_i, k_f)$ у дипольному наближенні векторного потенціалу \mathbf{A} набуває вигляду:

$$p(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (\text{Б.82})$$

Застосовуючи перетворення (Б.76), отримаємо

$$p(k_i, k_f) = \frac{1}{w_{fi}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \left\{ \frac{\partial V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) - V_{l,f}(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\} d\mathbf{r}. \quad (\text{Б.83})$$

У наближенні сферично-симетричного α -розпаду, що описується радіальним потенціалом $V(r)$, ми скористаємося представленням хвильових функцій у вигляді (Б.42)

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \varphi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r), \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= \varphi_f(r) \sum_{m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r^f). \end{aligned}$$

і тоді матричний елемент у (Б.83) перепишемо так:

$$\begin{aligned} p(k_i, k_f) &= \frac{1}{w_{fi}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} r^2 dr \int d\Omega \cdot \varphi_f^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial V_i(r)}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(r) - V_{l,f}(r) \frac{\partial \varphi_i(r)}{\partial \mathbf{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.84})$$

Застосовуючи градієнтну формулу (Б.46) при $l = 0$ (де $f(r)$ — довільна радіальна функція)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(r) = -\frac{df(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r) \quad (\text{Б.85})$$

і враховуючи вигляд (Б.51) для сферичної функції $\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r)$

$$\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu'=\pm 1} (110 | -\mu' \mu' 0) Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu'},$$

з (Б.84) отримаємо

$$p(k_i, k_f) = -\frac{1}{w_{fi}} \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \sum_{\mu'=\pm 1} \xi_{\mu}^* \xi_{\mu'} \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(r) \left\{ \varphi_i(r) \frac{dV_i(r)}{dr} - \frac{d\varphi_i(r)}{dr} V_{i,f}(r) \right\} r^2 dr \cdot \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r) d\Omega. \quad (\text{Б.86})$$

Уведемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} J_{1, \text{dip}}(l_f) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \varphi_i(r) \frac{dV_i(r)}{dr} r^2 dr, \\ J_{2, \text{dip}}(l_f) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l_f, r) \frac{d\varphi_i(r)}{dr} V_{i,f}(r) r^2 dr, \\ I_{\text{dip}}(l_f, m_f) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_m h_{\mu} \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{Б.87})$$

Тоді враховуючи умову ортогональності векторів $\xi_{\pm 1}$, матричний елемент у (Б.86) можна переписати так:

$$p(k_i, k_f) = -\frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(l_f) - J_{2, \text{dip}}(l_f) \right\} \cdot I_{\text{dip}}(l_f, m_f). \quad (\text{Б.88})$$

Далі будемо вважати, що виконується співвідношення (Б.58):

$$\mathbf{n}_{\text{ph}} = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f = \mathbf{n}_r.$$

Тоді кутовий інтеграл (Б.87) є відмінним від нуля тільки при наступних співвідношеннях між квантовими числами:

$$m_f = -\mu = \pm 1, \quad l_f = 1 \quad (\text{Б.89})$$

та інтеграл дорівнює:

$$I_{\text{dip}}(l_f = 1) = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{3}} (h_{-1} + h_{+1}) = \sqrt{\frac{1}{3}} (-i\sqrt{2}) = -i \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (\text{Б.90})$$

Тоді матричний елемент (Б.88) прийме вигляду:

$$p(k_i, k_f) = i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right\}. \quad (\text{Б.91})$$

Ми будемо називати співвідношення (Б.89) *правилами відбору для квантових чисел у дипольному наближенні*. Порівнюючи їх із правилами відбору у мультипольному наближенні (Б.64), ми бачимо, що: 1) вони не накладають ніяких обмежень на випромінювання фотона; 2) перехід системи до стану після випромінювання фотона можливий тільки при $l_f = 1$.

Б.6.3. Диференціальний матричний елемент

Запишемо наступний диференціальний вираз для інтеграла I_{dip} по куту θ :

$$\frac{d I_{\text{dip}}(l_f)}{\sin \theta d\theta} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_m h_\mu \cdot \int_0^{2\pi} Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r) d\varphi. \quad (\text{Б.92})$$

Вимагаючи виконання правил відбору (Б.89) і підставляючи вираз (Б.62) для сферичних функцій $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{d I_{\text{dip}}(l_f)}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{1}{3}} \int_0^{2\pi} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot Y_{1,-\mu}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r) d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot \int_0^{2\pi} (-1)^{\frac{-\mu+|\mu|}{2}} i^{-1} \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1 (1-1)!}{4\pi (1+1)!}} P_1^1(\cos \theta) \cdot e^{i\mu\varphi} \times \\ &\times (-1)^{\frac{-\mu+|\mu|}{2}} i^1 \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1 (1-1)!}{4\pi (1+1)!}} P_1^1(\cos \theta) \cdot e^{-i\mu\varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot \frac{3}{4} \cdot P_1^1(\cos \theta) \cdot P_1^1(\cos \theta) = \\ &= \sqrt{3} (-i \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \theta = -i \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{Б.93})$$

Визначимо диференціальний матричний елемент по куту θ так:

$$\begin{aligned} \frac{d p_{\text{dip}}(l_f = 1)}{\sin \theta d\theta} &= -\frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right\} \frac{d I_{\text{dip}}(l_f)}{\sin \theta d\theta} = \\ &= i \frac{\sqrt{6}}{4 w_{fi}} \left\{ J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right\} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{Б.94})$$

Можна бачити, що інтегрування функцій, визначених у (Б.95), по куту θ (з відповідними межами) дає інтегральний матричний елемент p_{dip} (Б.88)

у точності. Порівнюючи рішення (Б.94) з (Б.91), знайдемо рівняння зв'язку між диференціальним й інтегральним матричними елементами у дипольному наближенні:

$$\begin{aligned} \frac{d p_{\text{dip}}}{\sin \theta d \theta} &= i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right\} \cdot \frac{3}{4} \sin^2 \theta \\ &= p(k_i, k_f) \cdot \frac{3}{4} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{Б.95})$$

Б.7. Кутова ймовірність гальмівного випромінювання, що супроводжує α -розпад ядер

Б.7.1. Ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k} : визначення

Визначимо ймовірність переходу системи в одиницю часу з початкового i -стану у кінцеві f -стани, що перебувають у заданому інтервалі $d\nu_f$, з випромінюванням фотона з можливими імпульсами, що підпадають у заданий інтервал $d\nu_{\text{ph}}$, так (див. [43], (42,5) п. 42, стор. 189; [115], п. 44, стор. 191):

$$dW = \frac{|a_{fi}|^2}{T} \cdot d\nu = 2\pi |F_{fi}|^2 \delta(w_f - w_i + w_{\text{ph}}) \cdot d\nu, \quad d\nu = d\nu_f \cdot d\nu_{\text{ph}}, \quad (\text{Б.96})$$

де $d\nu_{\text{ph}}$ і $d\nu_f$ — інтервали, що характеризують фотон і систему у кінцевому f -стані. Якщо розглядається випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} , то

$$d\nu_{\text{ph}} = \frac{d^3 k_{\text{ph}}}{(2\pi)^3} = \frac{w_{\text{ph}}^2 dw_{\text{ph}} d\Omega_{\text{ph}}}{(2\pi c)^3}, \quad w_{fi} = w_i - w_f = \frac{E_i - E_f}{\hbar}, \quad (\text{Б.97})$$

де $d\Omega_{\text{ph}} = d \cos \theta_{\text{ph}} = \sin \theta_{\text{ph}} d\theta_{\text{ph}} d\varphi_{\text{ph}}$, $k_{\text{ph}} = w_{\text{ph}}/c$. Однак, оскільки при мультипольному розкладанні векторного потенціалу електромагнітного поля ми зафіксували систему координат таким чином, щоб напрямком вектору \mathbf{k}_{ph} співпадав з віссю z (а дипольне наближення є нечутливим до цієї орієнтації), то у (Б.96) ми не повинні використовувати $d\Omega_{\text{ph}}$.

Відносно інтервалу $d\nu_f$ зробимо важливе зауваження. При визначенні ймовірності у вигляді (Б.96) ми використовуємо матричний елемент F_{fi} ,

який визначається як інтеграл по просторі з можливим врахуванням підсумовування за деякими квантовими числами системи у кінцевому f -стані. Цю процедуру можна розглянути як усереднення за цими характеристиками, звідки випливає, що F_{fi} не залежить від них. Тому будемо вважати, що інтервал $d\nu_f$, що входить у визначення ймовірності у вигляді (Б.96), повинен ураховувати лише ті додаткові характеристики й квантові числа системи у кінцевому f -стані, за якими не виконувалося інтегрування й повне підсумовування при визначенні F_{fi} . Підставляючи формулу (1.18) для F_{fi} і (Б.97) у (Б.96) і потім інтегруючи цей вираз за dw_{fi} , отримаємо

$$dW = \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{m^2} \frac{\hbar w_{\text{ph}}}{2\pi c^3} \left| p(k_i, k_f) \right|^2 dw_{\text{ph}}. \quad (\text{Б.98})$$

Цей вираз являє собою ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} , де вже виконані усереднення за значеннями поляризації фотона $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ і інтегрування за кутами руху α -частинки після випромінювання фотона. Тому така ймовірність не залежить від напрямків руху α -частинки після випромінювання. Для опису фотона з імпульсом \mathbf{k}_{ph} , випроміненого під деяким кутом щодо напрямку $\mathbf{n}_r f$ руху (або тунелювання) α -частинки після випромінювання, уведемо ймовірність випромінювання так:

Визначимо відносну дифференціальну ймовірність за значеннями кута θ_f як функцію, повний інтеграл від якої за значеннями кута θ_f з межами від 0 до π точно відповідає ймовірності випромінювання (Б.98).

Розглянемо наступну функцію:

$$\frac{d^2W(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{\text{ph}}}{m^2} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{с. с.} \right\}, \quad (\text{Б.99})$$

де с. с.— позначення комплексного спряження. Ця ймовірність обернено пропорційна об'єму нормування V . Щоб визначити ймовірність, незалежну від обраного об'єму V , ми розділимо вираз (Б.99) на потік α -частинок, який обернено пропорційний цьому об'єму також. Так, теорія квантових полів нам

дає наступний вираз потоку (де $v(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|/p_0$ при $c = 1$, див. [113], § 21.4, стор. 174):

$$j = n_i v(\mathbf{p}_i), \quad v_i = |\mathbf{v}_i| = \frac{c^2 |\mathbf{p}_i|}{E_i} = \frac{\hbar c^2 k_i}{E_i}, \quad (\text{Б.100})$$

де n_i — середнє число часток в одиницю часу перед випромінюванням фотона (ми маємо $n_i = 1$ для нормованої хвильової функції у початковому i -стані), $v(\mathbf{p}_i)$ — модуль швидкості α -частинки у системі відліку, де центр мас ядра не рухається. Отже, ми одержуємо *диференціальну абсолютну ймовірність*:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} &= \frac{d^2 W(\theta_f)}{dw_{\text{ph}} d \cos \theta_f} \cdot \frac{E_i}{\hbar c^2 k_i} = \\ &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{2\pi c^5 m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{с. с.} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.101})$$

Відзначимо, що існує також інший шлях визначення кутової ймовірності гальмівного випромінювання фотонів у задачах α -розпаду [101], заснований на іншому зв'язку матричного елемента випромінювання з кутом θ між напрямками руху фрагмента, що вилітає, і випромінювання фотона. Іноді змінні φ_f і θ_f у дужках цих функцій будемо опускати.

Якщо ймовірність dw має розмірність маси (у раціональній системі одиниць вона дорівнює c^{-1}) і збігається з енергетичною шириною Γ , то можна визначити обернену до неї величину τ :

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}, \quad \Gamma = dw. \quad (\text{Б.102})$$

Відповідно до [113] (див. стор. 175), при розгляді переходу системи з початкового стану у кінцевий величина τ являє собою час життя частинки у початковому стані (до переходу). Тому в нашому випадку, величина τ — це *середній час життя α -частинки до випромінювання фотона із частотою w_{ph}* .

Б.7.2. Ймовірність випромінювання у мультипольному підході

Обчислимо кутову ймовірність (Б.101) для перших чисел $l_f = 1$ і $l_{ph} = 1$.

Відповідно до (1.40), для матричного елемента $p_1(k_i, k_f)$ запишемо

$$\begin{aligned}
 p_1(k_i, k_f) &= \sqrt{2\pi} \cdot \left\{ (-i)l\sqrt{2l+1} [p_i^M - i p_i^E] \right\} \Big|_{l=1} = -\sqrt{6\pi} (i p_1^M + p_1^E), \\
 \frac{d p_1(k_i, k_f)}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{2\pi} \cdot \left\{ (-i)l\sqrt{2l+1} \left[\frac{d p_i^M}{\sin \theta d\theta} - i \frac{d p_i^E}{\sin \theta d\theta} \right] \right\} \Big|_{l=1} = \\
 &= -\sqrt{6\pi} \left\{ i \frac{d p_1^M}{\sin \theta d\theta} + \frac{d p_1^E}{\sin \theta d\theta} \right\}.
 \end{aligned} \tag{Б.103}$$

Використовуючи знайдені кутові електричну й магнітну компоненти від матричного елемента (Б.73):

$$\begin{aligned}
 \frac{d p_1^M}{\sin \theta d\theta} &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 1) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 \frac{d p_1^E}{\sin \theta d\theta} &= i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1, 0) \cdot \sin^2 \theta + i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 2) \cdot \sin^2 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

і інтегральні компоненти (Б.74):

$$p_1^M = 0, \quad p_1^E = i \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\},$$

з (Б.103) отримаємо

$$\begin{aligned}
 p_1(k_i, k_f) &= -\sqrt{6\pi} \cdot i \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\} = \\
 &= -i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\}, \\
 \frac{d p_1(k_i, k_f)}{\sin \theta d\theta} &= -\sqrt{6\pi} \left\{ i \frac{d p_1^M}{\sin \theta d\theta} + \frac{d p_1^E}{\sin \theta d\theta} \right\} = \\
 &= -\sqrt{6\pi} \left\{ -i \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 1) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta + i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1, 0) \cdot \sin^2 \theta + \right. \\
 &+ \left. i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 2) \cdot \sin^2 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta) \right\} = \\
 &= i \sqrt{6\pi} \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left\{ 3 J(1, 1) \cos \theta - \sqrt{2} J(1, 0) - J(1, 2) (1 - 3 \sin^2 \theta) \right\} \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
 p_1(k_i, k_f) &= -i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\}, \\
 \frac{d p_1(k_i, k_f)}{\sin \theta d \theta} &= i \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \left\{ 3 J(1, 1) \cdot \cos \theta - \sqrt{2} J(1, 0) - \right. \\
 &\quad \left. - J(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right\} \cdot \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{B.104}$$

Тепер знайдемо диференціальну абсолютну ймовірність:

$$\begin{aligned}
 \frac{d P_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{2 \pi c 5 m^2 k_i} \left\{ i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\} \times \right. \\
 \times i \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \left\{ 3 J^*(1, 1) \cdot \cos \theta - \sqrt{2} J^*(1, 0) - \right. \\
 &\quad \left. - J^*(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right\} \cdot \sin^2 \theta + \text{c. c.} \left. \right\} = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{2 \pi c 5 m^2 k_i} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] \times \right. \\
 \times \left[\sqrt{2} J^*(1, 0) + J^*(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) - 3 J^*(1, 1) \cdot \cos \theta \right] + \text{c. c.} \left. \right\} \cdot \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
 \frac{d P_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{8 \pi c 5 m^2 k_i} \left\{ \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] \times \right. \\
 \times \left[J^*(1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1, 2) (1 - 3 \sin^2 \theta) - \frac{3}{\sqrt{2}} J^*(1, 1) \cos \theta \right] + \text{c. c.} \left. \right\} \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{B.105}$$

Незважаючи на те, що інтегральна магнітна компонента p_1^M від матричного елемента дорівнює нулю, врахування її диференціальної складової вносить ненульовий вклад у повну ймовірність випромінювання фотона. Цей вираз можна переписати так:

$$\frac{d P_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} = \frac{d P_1^{E1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} + \Delta \frac{d P_1^{M1}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}}, \tag{B.106}$$

де перший доданок має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^{E1}(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{8\pi c^5 m^2 k_i} \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1,2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right] + \text{c. c.} \right\} \cdot \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{Б.107})$$

і визначає ймовірність випромінювання фотона тільки за рахунок врахування електричного мультиполя випромінювання E1. Другий доданок у (Б.106) має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} &= - \frac{3 Z_{\text{eff}}^2 e^2 w_{\text{ph}} E_i}{8\pi \sqrt{2} c^5 m^2 k_i} \times \\ &\times \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} J(1,2) \right] J^*(1,1) + \text{c. c.} \right\} \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{Б.108})$$

і визначає корекцію до ймовірності випромінювання за рахунок врахування магнітного мультиполя M1. З (Б.108) видно, що знайдену корекцію можна розділити на радіальну й кутову компоненти.

Б.7.3. Ймовірність випромінювання у дипольному підході

Знайдемо диференціальну абсолютну ймовірність (Б.101) у залежності від кута θ у дипольному наближенні. Відповідно до (Б.91) і (Б.94), інтегральний і диференціальний за кутом θ матричні елементи у дипольному наближенні дорівнюють:

$$\begin{aligned} p_{\text{dip}}(l_f = 1) &= i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right\}, \\ \frac{dp_{\text{dip}}(l_f = 1)}{\sin \theta d\theta} &= i \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right\} \cdot \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

На початку обчислимо інтегральну ймовірність:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{dip}}(\theta_f) &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \cdot \frac{E_i}{\hbar c^2 k_i} \cdot \left| p_{\text{dip}}(k_i, k_f) \right|^2 = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{fi} E_i}{m^2 k_i} \cdot \left| i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right\} \right|^2 = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{3\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right|^2.
 \end{aligned}$$

Тепер знайдемо диференціальну ймовірність у залежності від кута θ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{fi} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{d p^*(k_i, k_f)}{d \cos \theta_f} + \text{c. c.} \right\} \Big|_{\text{dip}} = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{fi} E_i}{m^2 k_i} \left\{ i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (-i) \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{1}{w_{fi}} \left\{ J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right\}^* \sin^2 \theta + \text{c. c.} \right\} = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{4\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \left\{ \left| J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta + \text{c. c.} \right\} = \\
 &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Випишемо результат:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta, \\
 P_{\text{dip}}(\theta_f) &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{3\pi c^5} \frac{E_i}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1, \text{dip}}(1) - J_{2, \text{dip}}(1) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{B.109}$$

Звідси можна також записати:

$$\frac{dP_{\text{dip}}(\theta_f)}{d w_{\text{ph}}} = 3\pi \cdot P_{\text{dip}}(\theta_f) \cdot \sin^2 \theta. \tag{B.110}$$

Б.7.4. Спектроскопічний фактор

У визначенні ймовірності гальмівного випромінювання можна врахувати ймовірність формування α -частинки у стані, з якого вона покидає ядро. Для ясності, перейдемо до іншої задачі розпаду ядер, де це питання вивчене повніше. Так, у задачі розпаду ядра з вильотом протона таким є стан ядра,

який заповнений протоном перед його вильотом і виявиться порожнім після вильоту. Щоб отримати значення для періоду напіврозпаду, слід розділити його, що було визначено без врахування ймовірності формування стану з подальшим вильотом протона, на спектроскопічний фактор $S_p(\text{th})$ [117]. Спектроскопічний фактор визначається у наближенні незалежних квазічастинок (*independent quasiparticle approximation, BCS*, відповідно до термінології, поданої у роботі [117]), відповідно до якого передбачається, що основний стан ядра з непарним числом протонів є одно-квазічастинковим, тоді як для непарно-непарних ядер це повинна бути двух-квазічастинкова конфігурація. У теорії BCS спектроскопічний фактор дається формулою $S(\text{th})_p = u^2$, де u^2 — ймовірність того, що сферичні орбітали, що відповідають вильоту протона, не зайняті їм у дочірньому ядрі [117, 118]. Для різних протонних емітерів врахування спектроскопічного фактора поліпшує згоду між розрахунковими значеннями періоду напіврозпаду і їх експериментальними значеннями. Схожі підходи застосовуються також і у задачі α -розпаду із застосуванням фактора $S_\alpha^{(\text{th})}$. На такій основі, ми скорегуємо формулу для ймовірності випромінювання. Для мультипольного й дипольного підходів з (Б.107) та (Б.109) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_{\text{mult},1}^{E1+M1}(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{8\pi c^5} \frac{w_{fi} E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i} \left\{ \left[J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1,2) \left(1 - 3 \sin^2 \theta \right) - \frac{3}{\sqrt{2}} J^*(1,1) \cos \theta \right] + \text{c. c.} \right\} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{Б.111})$$

$$\frac{d\tilde{P}_{\text{dip}}(\theta_f)}{dw_{\text{ph}}} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2 \cdot \sin^2 \theta, \quad (\text{Б.112})$$

$$\tilde{P}_{\text{dip}}(\theta_f) = \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{3\pi c^5} \frac{E_i S_\alpha^{(\text{th})}}{m^2 k_i w_{fi}} \cdot \left| J_{1,\text{dip}}(1) - J_{2,\text{dip}}(1) \right|^2.$$

ДОДАТОК В
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ
ДЕФОРМОВАНИХ ЯДЕР

В.1. Хвильова функція для деформованого α -ядерного потенціала

Будемо шукати хвильову функцію деформованого α -ядерного потенціалу за допомогою теорії збурень. Припустимо, що гамільтониан системи з таким потенціалом може бути представлений у вигляді:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{sph}} + \hat{W}, \quad (\text{B.1})$$

де \hat{H}_{sph} — гамільтониан системи зі сферично-симетричним α -ядерним потенціалом, \hat{W} — достатньо мала корекція до незбуреного оператора \hat{H}_{sph} . Задачу теорії збурень можна сформулювати таким чином. Припустимо, що власні функції ψ_{sph} від незбуреного оператора \hat{H}_{sph} відносно власного значення E нам відомі, тобто ми знаємо рішення рівняння:

$$\hat{H}_{\text{sph}} \psi_{\text{sph}} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{sph}}(r) \right) \psi_{\text{sph}} = E \psi_{\text{sph}}. \quad (\text{B.2})$$

Потрібно знайти наближене рішення ψ_{sph} рівняння з деформованим потенціалом $V(r, \theta_\beta)$:

$$\hat{H} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r, \theta_\beta) \right) \psi = E \psi. \quad (\text{B.3})$$

Аналізуючи вигляд деформованого потенціалу (2.8) при $\beta_2 \neq 0$, ми знаходимо таке значення кута θ_β (позначимо його як θ_{sph}), при якому цей потенціал перетворюється у сферично-симетричний $V_{\text{sph}}(r)$:

$$Y_{20}(\theta_{\text{sph}}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta_{\text{sph}}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

звідки одержуємо

$$\theta_{\text{sph}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{B.5})$$

В.1.1. Оператор збурення \hat{W}

Порівнюючи (В.3) з (2.9), знаходимо вигляд оператора \hat{W} з точністю до першої корекції:

$$\hat{W}(r, \theta_\beta) = V(r, \theta_\beta) - V_{\text{sph}}(r), \quad (\text{B.6})$$

яку можна записати як комбінацію кулонівської w_C та ядерної w_N компонент:

$$\hat{W} = w_C(r, \theta_\beta) + w_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha). \quad (\text{B.7})$$

З (2.9) визначаємо кулонівську компоненту:

$$w_C(r, \theta_\beta) = \begin{cases} \beta_2 \cdot \frac{6Ze^2 R^2}{5r^3} \cdot Y_{20}(\theta_\beta), & \text{для } r \geq r_m, \\ \beta_2 \cdot \frac{6Ze^2 R^2}{5r_m^3} \left(2 - \frac{r^3}{r_m^3}\right) \cdot Y_{20}(\theta_\beta), & \text{для } r < r_m \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

і з (2.17) — ядерну компоненту:

$$w_N(r, \theta_\beta, Q_\alpha) = V(A, Z, Q_\alpha) \cdot \left\{ v_{N1}(r) \cdot \beta_2 Y_{20}(\theta_\beta) + o(\beta_2^2) \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Отже, оператор \hat{W} у першому наближенні по β_2 може бути представлений як

$$\hat{W} = \beta_2 \cdot w^{(1)}(r) \cdot Y_{20}(\theta_\beta), \quad (\text{B.10})$$

де

$$w^{(1)}(r) = \begin{cases} \frac{6Ze^2 R^2}{5r^3} + V(A, Z, Q_\alpha) \cdot v_{N1}(r), & \text{для } r \geq r_m, \\ \frac{6Ze^2 R^2}{5r_m^3} \left(2 - \frac{r^3}{r_m^3}\right) + V(A, Z, Q_\alpha) \cdot v_{N1}(r), & \text{для } r < r_m. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

В.1.2. Базис функцій для розкладання хвильової функції α -частинки

Щоб застосувати теорію збурень до знаходження невідомої хвильової функції $\psi(\mathbf{r})$, необхідно задати базис відомих нам функцій, на основі якого можна було б розкласти невідому функцію $\psi(\mathbf{r})$.

Нехай для кожного обраного кута θ' нам відомі рішення хвильової функції $\psi_{\theta'}$ рівняння Шредингера з потенціалом $V(r, \theta')$ у припущенні, що цей кут є фіксованим:

$$\hat{H}_{\theta'} \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r, \theta') \right) \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = E \psi_{\theta'}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.12})$$

Оскільки потенціал $V(r, \theta')$ є сферично симетричним у такому розгляді, то можна записати функцію $\psi_{\theta'}(\mathbf{r})$ через суму парціальних хвильових функцій із квантовими числами l та m :

$$\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \sum_{l', m'} \psi_{\theta', l', m'}(r, \theta, \varphi). \quad (\text{B.13})$$

Тепер згадаємо, що система, що розпадається, у сферично симетричному наближенні у стані до випромінювання фотона характеризується квантовими числами l_i і m_i (а після випромінювання фотона — вона є в іншому стані з новими числами l_f , m_f). Уведемо узагальнене позначення таких станів, додавши нового індексу 0: l_0 і m_0 . Тоді представлення (B.13) можна переписати, явно виділивши стан, що є максимально близьким до сферично-симетричної задачі випромінювання:

$$\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \psi_{\theta', l_0, m_0}(r, \theta, \varphi) + \sum_{l', m' \neq l_0, m_0} \psi_{\theta', l', m'}(r, \theta, \varphi). \quad (\text{B.14})$$

Далі ми будемо шукати розкладання невідомої функції $\psi(\mathbf{r})$ за функціями $\psi_{\theta'}$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int c(\theta') \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) d\theta'. \quad (\text{B.15})$$

Тепер якщо при кожному куті використовувати тільки два значення чисел l і m , таких-же як у стані недеформованого ядра, тоді невідома хвильова функція буде представлена у вигляді добутку радіальної й кутової складових. У такому випадку, кутова складова буде повністю збігатися з кутовою хвильовою функцією сферично-симетричного розпаду, і розкладання виявляється лише розкладанням однієї радіальної складової невідомої за радіальними незбуреними функціями, та ми не одержимо кутової деформації у такому представленні. Тому, для опису й врахування кутової деформації нам необхідно врахувати як мінімум два стани з l , m у сумах в (В.5). На цій основі виділимо явний доданок із квантовими числами незбуреної хвильової функції:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int c(\theta') \psi_{\theta', l'_0, m'_0}(r, \theta, \varphi) d\theta' + \int c(\theta') \sum_{l' \neq l'_0, m' \neq m'_0} \psi_{\theta', l', m'}(r, \theta, \varphi) d\theta'. \quad (\text{В.16})$$

Підставляючи розкладання (В.15) у (В.3), одержимо

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi(\mathbf{r}) &= \left(\hat{H}_{\text{sph}} + \hat{W} \right) \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' = \\ &= \hat{H}_{\text{sph}} \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' + \hat{W} \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' = \\ &= \int c(\theta') \hat{H}_{\text{sph}} \psi_{\theta'} d\theta' + \int c(\theta') \hat{W} \psi_{\theta'} d\theta' = \\ &= \int c(\theta') E \psi_{\theta'} \delta(\theta_{\text{sph}} - \theta') d\theta' + \int c(\theta') \hat{W} \psi_{\theta'} d\theta' = \\ &= E c(\theta_{\text{sph}}) \psi_{\theta_{\text{sph}}} + \int c(\theta') \hat{W} \psi_{\theta'} d\theta' = E \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' \end{aligned}$$

або

$$E \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' - E c(\theta_{\text{sph}}) \psi_{\theta_{\text{sph}}} = \int c(\theta') \hat{W} \psi_{\theta'} d\theta'. \quad (\text{В.17})$$

Помножимо це рівняння з обох сторін зліва на $\psi_{\theta'', l'', m''}^*$:

$$\begin{aligned} \psi_{\theta'', l'', m''}^* E \int c(\theta') \psi_{\theta'} d\theta' - \psi_{\theta'', l'', m''}^* E c(\theta_{\text{sph}}) \psi_{\theta_{\text{sph}}} &= \\ &= \psi_{\theta'', l'', m''}^* \int c(\theta') \hat{W} \psi_{\theta'} d\theta' \end{aligned} \quad (\text{В.18})$$

і проінтегруємо по змінній \mathbf{dr} :

$$\begin{aligned} E \int d\theta' c(\theta') \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \psi_{\theta'} \mathbf{dr} - E c(\theta_{\text{sph}}) \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \psi_{\theta_{\text{sph}}} \mathbf{dr} = \\ = \int d\theta' c(\theta') \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\theta'} \mathbf{dr}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Будемо вважати, що виконується властивість:

$$\int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \psi_{\theta', l', m'} \mathbf{dr} = \delta(\theta' - \theta'') \delta_{l'l''} \delta_{m'm''}. \quad (\text{B.20})$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \psi_{\theta'} \mathbf{dr} &= \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \sum_{l'm'} \psi_{\theta', l', m'} \mathbf{dr} = \\ &= \delta(\theta' - \theta'') \sum_{l'm'} \delta_{l'l''} \delta_{m'm''} = \delta(\theta' - \theta''). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

З врахуванням (B.21), з (B.19) отримаємо

$$\begin{aligned} E \int c(\theta') \delta(\theta'' - \theta') d\theta' - E c(\theta_{\text{sph}}) \delta(\theta'' - \theta_{\text{sph}}) = \\ = \int d\theta' c(\theta') \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\theta'} \mathbf{dr} \end{aligned}$$

або

$$E \left[c(\theta'') - c(\theta_{\text{sph}}) \delta(\theta'' - \theta_{\text{sph}}) \right] = \int d\theta' c(\theta') \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\theta'} \mathbf{dr}. \quad (\text{B.22})$$

Будемо шукати невідомі коефіцієнти $c_{\theta'}$ у вигляді ряду:

$$c_{\theta'} = c_{\theta'}^{(0)} + c_{\theta'}^{(1)} + c_{\theta'}^{(2)} + \dots, \quad (\text{B.23})$$

де величини $c_{\theta'}^{(1)}$ мають той-же порядок малості, що й збурення \hat{W} . Знайдемо корекцію до власної функції ψ_{sph} при θ_{sph} , звідки знаходимо: $c_{\theta_{\text{sph}}}^{(0)} = 1$, $c_{\theta'}^{(0)} = 0$ при $\theta' \neq \theta_{\text{sph}}$. У першому наближенні, підставляємо коефіцієнт $c_{\theta'} = c_{\theta'}^{(0)} + c_{\theta'}^{(1)}$ у рівняння (B.22), зберігши тільки члени першого порядку малості. При $\theta'' \neq \theta_{\text{sph}}$ одержимо

$$\begin{aligned} c^{(1)}(\theta'') &= \frac{1}{E} \int d\theta' \left(c^{(0)}(\theta') + c^{(1)}(\theta') \right) \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\theta'} \mathbf{dr} = \\ &= \frac{c^{(0)}(\theta_{\text{sph}})}{E} \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\text{sph}} \mathbf{dr} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

або

$$c^{(1)}(\theta'') = \frac{1}{E} \int \psi_{\theta'', l'', m''}^* \hat{W} \psi_{\text{sph}} \mathbf{dr} \quad \text{при } \theta'' \neq \theta_{\text{sph}}. \quad (\text{B.25})$$

Знайдемо цей коефіцієнт, враховуючи вигляд (B.10) оператора \hat{W} :

$$\begin{aligned} c^{(1)}(\theta'') &= \frac{1}{E} \int R_{\theta'', l''}^*(r) Y_{l'' m''}^*(\theta) \cdot \beta_2 w^{(1)}(r) Y_{20}(\theta) \cdot \sum_{lm} R_{\text{sph}, l}(r) Y_{lm}(\theta) \mathbf{dr} = \\ &= \beta_2 \cdot \frac{1}{E} \sum_{lm} \int_0^{+\infty} R_{\theta'', l''}^*(r) w^{(1)}(r) R_{\text{sph}, l}(r) r^2 dr \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta Y_{l'' m''}^*(\theta) Y_{20}(\theta) Y_{lm}(\theta). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Визначимо кутовий інтеграл. Враховуючи властивість (див. (4) [124], стор. 131)

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) Y_{l_3 m_3}^*(\theta, \varphi) = \\ &= \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

і незалежність функції $Y_{20}(\theta)$ від кута φ , одержимо

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta Y_{l'' m''}^*(\theta) Y_{20}(\theta) Y_{lm}(\theta) = \\ &= \delta_{mm''} \sqrt{\frac{(2l + 1)(2 \cdot 2 + 1)}{4\pi(2l'' + 1)}} C_{l 0 2 0}^{l'' 0} C_{lm'' 2 0}^{l'' m''}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Для зручності, уведемо наступне позначення:

$$I_{l''}^{m''} = \sqrt{\frac{5 \cdot (2l + 1)}{4\pi(2l'' + 1)}} C_{l 0 2 0}^{l'' 0} C_{lm'' 2 0}^{l'' m''}. \quad (\text{B.29})$$

Тоді перепишемо (B.26) у вигляді:

$$c_{l'' m''}^{(1)}(\theta'') = \beta_2 \cdot \frac{1}{E} \sum_l I_{l''}^{m''} \int_0^{+\infty} R_{\theta'', l''}^*(r) w^{(1)}(r) R_{\text{sph}, l}(r) r^2 dr. \quad (\text{B.30})$$

Тепер з (В.15) випишемо рішення для хвильової функції деформованого потенціалу:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}) &= \int c(\theta') \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) d\theta' = c(\theta_{\text{sph}}) \psi_{\theta_{\text{sph}}}(\mathbf{r}) + \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c(\theta') \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) d\theta' = \\
&= c^{(0)}(\theta_{\text{sph}}) \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) + \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') \psi_{\theta'}(\mathbf{r}) d\theta' = \\
&= \psi_{\text{sph}, l_0, m_0}(\mathbf{r}) + \sum_{l, m \neq l_0, m_0} \psi_{\text{sph}, l, m}(\mathbf{r}) + \\
&+ \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') \psi_{\theta', l_0, m_0}(\mathbf{r}) d\theta' + \sum_{l, m \neq l_0, m_0} \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') \psi_{\theta', l, m}(\mathbf{r}) d\theta'.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Враховуючи, що для будь-яких (однакових) чисел l і m функції $\psi_{\text{sph}, l, m}$ і $\psi_{\theta', l, m}$ розділяються на радіальну й кутову компоненти, а кутова компонента дорівнює одній й тій-же сферичній функції Y_{lm} , уведемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\Delta_r \psi(\mathbf{r}) &= \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') \psi_{\theta', l_0, m_0}(\mathbf{r}) d\theta', \\
\Delta_\theta \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{l, m \neq l_0, m_0} \left\{ \psi_{\text{sph}, l, m}(\mathbf{r}) + \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') \psi_{\theta', l, m}(\mathbf{r}) d\theta' \right\}.
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Звідси видно, що деформовану хвильову функцію (В.31) можна розділити явно на сферично-симетричну незбурену хвильову функцію $\psi_{\text{sph}, l_0, m_0}$ із числами l_0 і m_0 та радіальну і кутову корекції $\Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r})$ і $\Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r})$ до незбуреної хвильової функції:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{sph}, l_0, m_0}(\mathbf{r}) + \Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) + \Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}). \tag{B.33}$$

Розпишемо функції $\psi_{\theta', lm}(\mathbf{r})$ через радіальну й кутову складові явно:

$$\psi_{\theta', lm}(\mathbf{r}) = R_{\theta'l}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{B.34}$$

Тоді знайдені корекції можна представити так:

$$\begin{aligned}
\Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) &= \Delta_r R_{\text{sph}, l_0}(r) \cdot Y_{l_0 m_0}(\theta, \varphi), \\
\Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) &= \sum_{l, m \neq l_0, m_0} \left\{ R_{\text{sph}, l}(r) + \Delta_r R_{\text{sph}, l}(r) \right\} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi),
\end{aligned} \tag{B.35}$$

де

$$\Delta_r R_{\text{sph},l}(r) = \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} c^{(1)}(\theta') R_{\theta'l}(r) \sin \theta' d\theta'. \quad (\text{B.36})$$

Враховуючи знайдене рішення (B.30) для $c_{l'm'}^{(1)}(\theta')$, перепишемо корекції, виділивши в них параметр деформації β_2 явно:

$$\begin{aligned} \Delta_r \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) &= \beta_2 \cdot \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l_0}(r) \cdot Y_{l_0 m_0}(\theta, \varphi), \\ \Delta_\theta \psi_{\text{sph}}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m \neq l_0, m_0} \left\{ R_{\text{sph},l}(r) + \beta_2 \cdot \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r) \right\} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

де

$$\Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r) = \int_{\theta' \neq \theta_{\text{sph}}} \tilde{c}_{l'm'}^{(1)}(\theta') R_{\theta'l}(r) \sin \theta' d\theta', \quad (\text{B.38})$$

$$\tilde{c}_{l'm'}^{(1)}(\theta') = \frac{1}{E} \sum_l I_{ll'm'} \int_0^{+\infty} R_{\theta',l'}^*(r) w^{(1)}(r) R_{\text{sph},l}(r) r^2 dr. \quad (\text{B.39})$$

В.1.3. Градієнти від корекцій деформованої хвильової функції

Далі, для визначення матричного елемента випромінювання відносно деформованого α -ядерного потенціала нам потрібно буде знати градієнт від деформованої хвильової функції. Поперш, знайдемо градієнти від радіальної й кутової корекцій до хвильової функції. Скористаємося градієнтною формулою (див. (2.56) у книзі [116], стор. 46):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{dr}{dr} + \frac{l+1}{r} R \right) \mathbf{T}_{l-1,m}(\mathbf{n}_r) - \\ &- \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{dr}{dr} - \frac{l}{r} R \right) \mathbf{T}_{l+1,m}(\mathbf{n}_r), \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

де $\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}_r)$ — векторні сферичні гармоніки [відповідно до (1.31) на стор. 46]:

$$\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu=-1,1} (l1j|m-\mu\mu t) Y_{l,m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu, \quad (\text{B.41})$$

$(l1j|m-\mu\mu t)$ — коефіцієнти Клебша–Гордона [див. (A.16)–(A.18), Додаток А.4, стор. 385], $Y_{l,\mu}(\mathbf{n}_i, f_r)$ — сферичні функції [див. (A.11)–(A.12), Додаток А.2, стор. 384]. Зокрема, для початкового i -стану із числами $l = 0$ і

$m = 0$ одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r) &= -\frac{dr(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i), \\ \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) &= \sum_{\mu=-1,1} (110 | -\mu\mu 0) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_\mu, \\ (110 | 1, -1, 0) &= (110 | -1, 1, 0) = \sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

У результаті, знаходимо градієнти:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_{\text{sph}, i, l_i=0}(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{d R_{\text{sph}, i, l_i=0}(r)}{dr} \sum_{\mu'=-1,1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_{\mu'}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_r \psi_{\text{sph}, l_i=0}(\mathbf{r}) &= -\beta_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l_0=0}(r)}{dr} \sum_{\mu'=-1,1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_{\mu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

При $l \neq 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \\ &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{dr}{dr} + \frac{l+1}{r} R \right) \sum_{\mu=-1,1} (l-1, 1, l | m - \mu\mu m) Y_{l-1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu - \\ &- \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{dr}{dr} - \frac{l}{r} R \right) \sum_{\mu=-1,1} (l+1, 1, l | m - \mu\mu m) Y_{l+1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Звідси знаходимо градієнт до кутової корекції, враховуючи, що у початково-

му i -стані система має числа $l = m = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_\theta \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=1, m} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left\{ \frac{d R_{\text{sph}, i, l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r} R_{\text{sph}, i, l}(r) + \right. \\
&+ \left. \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, i, l}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{l+1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, i, l}(r) \right\} \times \\
&\times \sum_{\mu=-1, 1} (l-1, 1, l | m-\mu, \mu, m) Y_{l-1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu - \\
&- \sum_{l \neq 0, m} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left\{ \frac{d R_{\text{sph}, i, l}(r)}{dr} - \frac{l}{r} R_{\text{sph}, i, l}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, i, l}(r)}{dr} - \right. \\
&- \left. \beta_2 \frac{l}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, i, l}(r) \right\} \sum_{\mu=-1, 1} (l+1, 1, l | m-\mu, \mu, m) Y_{l+1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Знайдемо також вигляд цього виразу при врахуванні першого ненульового значення $l = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_\theta \psi(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m=-1, 0, 1} \sum_{\mu=-1, 1} (0, 1, 1 | m-\mu, \mu, m) Y_{0, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu \times \\
&\times \left\{ \frac{d R_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} + \frac{2}{r} R_{\text{sph}, l=1}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{2}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{m=-1, 0, 1} \sum_{\mu=-1, 1} (2, 1, 1 | m-\mu, \mu, m) Y_{2, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu \times \\
&\times \left\{ \frac{d R_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} - \frac{1}{r} R_{\text{sph}, l=1}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} - \beta_2 \frac{1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r) \right\}.
\end{aligned}$$

Враховуючи всі можливі значення m для ненульових функцій Y_{0m} у першому

доданку, одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_{\theta} \psi(\mathbf{r}) = & \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{d R_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} + \frac{2}{r} R_{\text{sph}, l=1}(r) + \right. \\
& \left. + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{2}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r) \right) \sum_{\mu=-1,1} (0, 1, 1 | 0, \mu, \mu) \boldsymbol{\xi}_{\mu} - \\
& - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{d R_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} - \frac{1}{r} R_{\text{sph}, l=1}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r)}{dr} - \right. \\
& \left. - \beta_2 \frac{1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l=1}(r) \right) \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} (2, 1, 1 | m - \mu, \mu, m) Y_{2, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_{\mu}.
\end{aligned} \tag{B.46}$$

В.2. Розрахунок матричного елемента з урахуванням деформації α -розпаду

Як ми побачили раніше [див. формулу (В.33) на стор. 432], повну хвильову функцію деформованої α -розпадаючої системи можна розділити на хвильову функцію системи сферично-симетричного α -розпаду, а також радіальну й кутову корекції до цієї хвильової функції, що враховують радіальну й кутову деформації ядерної системи при α -розпаді. На такий підставі, ми істотно приходимо до такого ж представлення повного матричного елемента:

$$p(w) = p_{\text{sph}}(w) + \Delta_r p(w) + \Delta_{\theta} p(w), \tag{B.47}$$

де

$$\begin{aligned}
p_{\text{sph}}(w) = & \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \boldsymbol{\xi}_{\mu}^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \times \\
& \times \int \psi_{\text{sph}, f, l_f=1}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_{\text{sph}, i, l_i=0}(\mathbf{r}) d\Omega
\end{aligned} \tag{B.48}$$

матричний елемент сферично-симетричного розпаду,

$$\begin{aligned} \Delta_r p(w) &= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \times \\ &\times \int \left\{ \Delta_r \psi_{\text{sph},f,l_f=1}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_{\text{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{sph},f,l_f=1}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_r \psi_{\text{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

радіальна корекція, що з'являється після урахування радіальної деформації α -розпаду,

$$\begin{aligned} \Delta_\theta p(w) &= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \times \\ &\times \int \left\{ \Delta_\theta \psi_{\text{sph},f,l_f=1}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_{\text{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{sph},f,l_f=1}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_\theta \psi_{\text{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

кутова корекція, що з'являється після урахування кутової деформації α -розпаду.

В.2.1. Матричний елемент від сферично-симетричної компоненти α -розпаду

Враховуючи ортогональність векторів поляризації $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}^*$ і $\boldsymbol{\xi}_{\mp 1}$, знайдемо

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \cdot \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) d\Omega \times \\ &\times \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Враховуючи властивість нормування сферичних функцій $Y_{lm}(\mathbf{n}_r)$ (при $\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f$), одержимо

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \delta_{l_f,1} \delta_{m_f,-\mu} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Приймаючи до уваги, що ця компонента повинна бути переважною, визначимо правила відбору для квантових чисел l і m кінцевого f -стану (при яких інтеграл є відмінним від нуля):

$$\begin{aligned} \text{початковий стан: } & l_i = 0, \quad m_i = 0; \\ \text{кінцевий стан: } & l_f = 1, \quad m_f = -\mu = \pm 1. \end{aligned} \tag{B.53}$$

З урахуванням усіх можливих кінцевих станів із числами m_f , одержимо

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \delta_{l_f,1} \delta_{m_f,-\mu} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr = \\ &= -\delta_{l_f,1} \delta_{m_f=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{3}} (h_{-1} + h_{+1}) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr = \\ &= i \delta_{l_f,1} \delta_{m_f=\pm 1} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr. \end{aligned} \tag{B.54}$$

В.2.2. Радіальна корекція до матричного елемента

Таким чином, ми знаходимо радіальну корекцію до матричного елемента:

$$\begin{aligned} p_r(w) &= i \delta_{l_f,1} \delta_{m_f=\pm 1} \beta_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{+\infty} \left(R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} + \right. \\ &+ \left. \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} \right) e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr. \end{aligned} \tag{B.55}$$

В.2.3. Кутова корекція до матричного елемента

Знайдемо корекцію $\Delta_\theta p(w)$ до кутової деформації хвильової функції. Враховуючи знайдений раніше градієнт (В.46) [див. стор. 436], одержимо

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta p(w) &= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \times \\
&\times \int \left\{ \Delta_\theta \psi_f^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_{\text{sph},i}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{sph},f}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Delta_\theta \psi_i(\mathbf{r}) \right\} d\Omega = \\
&= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \times \\
&\times \int \sum_{l' \neq 0, m'} \left(R_{\text{sph},f,l'}^*(r) + \beta_2 \Delta_\theta \tilde{R}_{f,l'}^*(r) \right) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \times \\
&\times \left\{ -\frac{d R_{\text{sph},i}(r)}{dr} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=-1,1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \right\} d\Omega + \\
&+ \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \int \sum_{l_f, m_f} R_{\text{sph},f,l_f}^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\theta, \varphi) \times \\
&\times \left\{ \sum_{l \neq 0, m} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{d R_{\text{sph},l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r} R_{\text{sph},l}(r) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{l+1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r) \right) \times \right. \\
&\times \sum_{\mu=-1,1} (l-1, 1, l | m-\mu, \mu, m) Y_{l-1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu - \\
&- \sum_{l \neq 0, m} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{d R_{\text{sph},l}(r)}{dr} - \frac{l}{r} R_{\text{sph},l}(r) + \right. \\
&+ \left. \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r)}{dr} - \beta_2 \frac{l}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l}(r) \right) \times \\
&\times \left. \sum_{\mu=-1,1} (l+1, 1, l | m-\mu, \mu, m) Y_{l+1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) \boldsymbol{\xi}_\mu \right\} d\Omega.
\end{aligned}$$

Враховуючи ортогональність векторів поляризації $\xi_{\pm 1}^*$ і $\xi_{\mp 1}$, одержимо

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta} p(w) = & -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \sum_{l' \neq 0, m'} \int_0^{+\infty} \left(R_{\text{sph}, f, l'}^*(r) + \beta_2 \Delta_{\theta} \tilde{R}_{f, l'}^*(r) \right) \times \\
& \times \frac{d R_{\text{sph}, i}(r)}{dr} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr \cdot \int Y_{l' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{1, -\mu}(\mathbf{n}_r^i) d\Omega + \\
& + \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu} \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \sum_{l_f, m_f} R_{\text{sph}, f, l_f}^*(r) \sum_{l \neq 0, m} \times \\
& \times \left\{ \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{d R_{\text{sph}, l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r} R_{\text{sph}, l}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l}(r)}{dr} + \right. \right. \\
& + \left. \beta_2 \frac{l+1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l}(r) \right) \times \\
& \times (l-1, 1, l | m-\mu, \mu, m) \int Y_{l_f m_f}^*(\theta, \varphi) Y_{l-1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) d\Omega - \\
& - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{d R_{\text{sph}, l}(r)}{dr} - \frac{l}{r} R_{\text{sph}, l}(r) + \beta_2 \frac{d \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l}(r)}{dr} - \beta_2 \frac{l}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph}, l}(r) \right) \times \\
& \times \left. (l+1, 1, l | m-\mu, \mu, m) \int Y_{l_f m_f}^*(\theta, \varphi) Y_{l+1, m-\mu}(\mathbf{n}_r) d\Omega \right\}.
\end{aligned} \tag{B.56}$$

Тепер враховуючи ортогональність сферичних функцій Y_{lm} , спростимо далі:

$$\Delta_{\theta} p(w) = \Delta_{\theta} p_1(w) + \Delta_{\theta} p_2(w) + \Delta_{\theta} p_3(w), \tag{B.57}$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta p_1(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \int_0^{+\infty} \left(R_{\text{sph},f,l'=1}^*(r) + \beta_2 \Delta_\theta \tilde{R}_{f,l'=1}^*(r) \right) \times \\
&\times \frac{d R_{\text{sph},i}(r)}{dr} e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} r^2 dr, \\
\Delta_\theta p_2(w) &= \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{l_f=0,m_f} \sqrt{\frac{l_f+1}{2l_f+3}} (l_f, 1, l_f+1 | m_f, \mu, m_f+\mu) \times \\
&\times \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} R_{\text{sph},f,l_f}^*(r) \left\{ \frac{dr_{\text{sph},l=l_f+1}(r)}{dr} + \frac{l_f+2}{r} R_{\text{sph},l=l_f+1}(r) + \right. \\
&+ \left. \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l=l_f+1}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{l_f+2}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l=l_f+1}(r) \right\}, \\
\Delta_\theta p_3(w) &= -\beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{l_f=1,m_f} \sqrt{\frac{l_f}{2l_f-1}} (l_f, 1, l_f-1 | m_f, \mu, m_f+\mu) \times \\
&\times \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} R_{\text{sph},f,l_f}^*(r) \left\{ \frac{dr_{\text{sph},l=l_f-1}(r)}{dr} - \right. \\
&- \left. \frac{l_f-1}{r} R_{\text{sph},l=l_f-1}(r) + \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l=l_f-1}(r)}{dr} - \beta_2 \frac{l_f-1}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},l=l_f-1}(r) \right\}.
\end{aligned} \tag{B.58}$$

В.2.4. Розкладання за сферичними хвилями

Для виконання чисельних розрахунків радіальних інтегралів, скористаємося розкладанням плоскої хвилі за сферичними хвилями у вигляді (13)–(15) у роботі [57] (див. також (34.1) у [43], стор. 144):

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{+\infty} (-i)^l (2l+1) P_l(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \left(\frac{r}{k} \right)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{kr}, \tag{B.59}$$

де $z = r \cos \theta_{\alpha-\gamma}$. За допомогою сферичних функцій Бесселя (див. Додаток А.3, стор. 385):

$$j_l(kr) = (-1)^l \left(\frac{r}{k} \right)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{kr}, \tag{B.60}$$

одержимо

$$e^{-ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} = \left(e^{ikr \cos \theta_{\alpha-\gamma}} \right)^* = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) j_n(kr) \quad (\text{B.61})$$

і з (B.54) та (B.55) знайдемо

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= \delta_{l_f,1} \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} j_n(kr) r^2 dr, \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} p_r(w) &= \delta_{l_f,1} \beta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \left\{ R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} + \right. \\ &\left. + \Delta_r \tilde{R}_{f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} \right\} j_n(kr) r^2 dr. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Уводячи наступне позначення для радіальних інтегралів:

$$\begin{aligned} J_1(w; n) &= \int_0^{+\infty} R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} j_n(kr) r^2 dr, \\ J_2(w; n) &= \int_0^{+\infty} \left\{ R_{\text{sph},f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial \Delta_r \tilde{R}_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} + \right. \\ &\left. + \Delta_r \tilde{R}_{f,l_f=1}^*(r) \frac{\partial R_{\text{sph},i,l_i=0}(r)}{\partial r} \right\} j_n(kr) r^2 dr, \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

перепишемо рішення (B.62) і (B.63) так:

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= \delta_{l_f,1} \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \cdot J_1(w; n), \\ p_r(w) &= \delta_{l_f,1} \beta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \cdot J_2(w; n). \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Тепер повний матричний елемент (без урахування кутової корекції) здобуває вигляду:

$$p(w) = \delta_{l_f,1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1} (-1)^n (2n+1) \times \\ \times P_n(\cos \theta_{\alpha-\gamma}) \cdot \left(J_1(w; n) + \beta_2 J_2(w; n) \right). \quad (\text{B.66})$$

В.2.5. Перша та друга корекції при $l = 0$ і $l = 1$

Використовуючи поліноми Лежандра порядку l (див. Додаток А.1, стор. 382):

$$P_l(\beta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d\beta)^l} (\beta^2 - 1)^l, \quad P_0(\beta) = 1, \quad P_1(\beta) = \beta, \quad \beta = \cos \theta_{\alpha-\gamma}, \quad (\text{B.67})$$

ми знаходимо при $l = 0$ і $l = 1$

$$p(n=0)(w, \beta) = i \delta_{l_f,1} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(J_1(w; 0) + \beta_2 J_2(w; 0) \right), \\ p(n=1)(w, \beta) = \delta_{l_f,1} \sqrt{6} \cos \theta_{\alpha-\gamma} \cdot \left(J_1(w; 1) + \beta_2 J_2(w; 1) \right). \quad (\text{B.68})$$

З (2.1) знаходимо корекції при $l = 0$ і $l = 1$ для ймовірності випромінювання:

$$W_{l=0}(w) = N_0 k_f w \left| p(n=0)(w) \right|^2 = \\ = \frac{2}{3} N_0 k_f w \left| J_1(w; 0) + \beta_2 J_2(w; 0) \right|^2, \\ W(n=1)(w, \beta) = N_0 k_f w \left| p(n=1)(w, \beta) \right|^2 = \\ = 6 N_0 k_f w \left| J_1(w; 1) + \beta_2 J_2(w; 1) \right|^2 \cos^2 \beta \quad (\text{B.69})$$

і одержуємо повну ймовірність випромінювання з точністю до $l = 1$:

$$W_{l=1}(w, \beta) = W_{l=0}(w) \left| 1 - N(w, \beta_2) \cos \theta_{\alpha-\gamma} \right|^2, \\ N(w, \beta_2) = 3i \frac{J_1(w; 1) + \beta_2 J_2(w; 1)}{J_1(w; 0) + \beta_2 J_2(w; 0)}. \quad (\text{B.70})$$

ДОДАТОК Г
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА
ВИПРОМІНЮВАННЯ ВІД БІНАРНОЇ ЯДЕРНОЇ СИСТЕМИ
ПРИ ПОТРІЙНОМУ ПОДІЛІ

Запишемо оператор випромінювання системи, що складається з α -частинки та бінарної ядерної системи, у лабораторній системі відліку, де α -частинка та таке ядро складаються з нуклонів (нумеруємо нуклони α -частинки індексом i , а нуклони ядра індексом j):

$$\hat{H}_\gamma = - \sum_{i=1}^4 \frac{e Z_i}{m_i c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \hat{\mathbf{p}}_i - \sum_{j=1}^A \frac{e Z_j}{m_j c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \hat{\mathbf{p}}_j. \quad (\text{Г.1})$$

З врахуванням наступного вигляду потенціала електромагнітного поля:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{Г.2})$$

ми перепишемо оператор випромінювання (Г.1) як

$$\hat{H}_\gamma = -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \hat{\mathbf{p}}_i + \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \hat{\mathbf{p}}_j \right\}. \quad (\text{Г.3})$$

Перейдемо до відносних координат. Позначимо координати центрів мас α -частинки як \mathbf{r}_α , бінарної ядерної системи як \mathbf{R}_A та повної ядерної системи як \mathbf{R} . Визначаємо такі координати як

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{r}_{\alpha i}, \quad \mathbf{R}_A = \frac{1}{m_A} \sum_{j=1}^A m_j \mathbf{r}_{Aj}, \quad \mathbf{R} = \frac{m_A \mathbf{R}_A + m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{m_A + m_\alpha}. \quad (\text{Г.4})$$

Вводячи відносні координати $\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}$, $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ та \mathbf{r} як

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R}_A + \boldsymbol{\rho}_{Aj}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_A, \quad (\text{Г.5})$$

ми знаходимо відповідні імпульси:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{r}_i} = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_{\alpha i}, & \mathbf{p}_\alpha &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{r}_\alpha}, & \mathbf{p}_{\alpha i} &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\rho_{\alpha i}}, \\ \mathbf{p}_j &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{r}_j} = \mathbf{P}_A + \mathbf{p}_{Aj}, & \mathbf{P}_A &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\mathbf{R}_A}, & \mathbf{p}_{Aj} &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{d\rho_{Aj}}, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{P}_A. \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

Враховуючи (Г.5), ми отримаємо:

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R} - \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} \quad (\Gamma.7)$$

та перепишемо перший і другий вирази у (Г.5) як

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{\alpha i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{R} - \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_{Aj}. \quad (\Gamma.8)$$

Підставляючи ці вирази у формулу (Г.3), отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k} \left[\mathbf{R} - \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \mathbf{r} \right]} \times \\ &\times \left\{ \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} + \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} + \right. \\ &+ \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} - \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{p} + \\ &+ \left. e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \mathbf{p}_{\alpha i} + \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \mathbf{p}_{Aj} \right\}. \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

Визначимо хвильову функцію повної ядерної системи у наступному вигляді (див. роботу [31]):

$$|s\rangle = e^{-i\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}} s_\alpha |s_A\rangle, \quad (\Gamma.10)$$

де $s = i$ або f [індекси i та f означають початковий стан (тобто стан перед випромінюванням фотона) та кінцевий стан (тобто стан після випромінювання фотона)], \mathbf{K}_s — повний імпульс повної ядерної системи, $|s_A\rangle$ — хвильова функція, що описує внутрішні стани бінарної ядерної системи, $|s_\alpha\rangle$ — хвильова функція, що описує відносний рух (з врахуванням тунелювання) α -частинки

відносно бінарної ядерної системи. Припускаючи $\mathbf{K}_i = 0$, ми знаходимо матричний елемент:

$$\begin{aligned}
& \left\langle f \left| \hat{H}_\gamma \right| i \right\rangle \left\langle f \left| \hat{H}_\gamma \right| i \right\rangle = -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\{ \left\langle f_\alpha, f_A \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} \times \right. \right. \right. \\
& \times e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} + \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} \left| i_\alpha, i_A \right\rangle + \\
& + \left\langle f_\alpha, f_A \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \mathbf{P} \left| i_\alpha, i_A \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle f_\alpha, f_A \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \mathbf{p}_{\alpha i} \left| i_\alpha, i_A \right\rangle + \right. \\
& \left. \left. + \left\langle f_\alpha, f_A \left| e^{i(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \mathbf{p}_{Aj} \left| i_\alpha, i_A \right\rangle \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. \right. \right. \tag{Г.11}
\end{aligned}$$

У подальших розрахунках ми не будемо використовувати перший доданок у цьому виразі [оскільки ми не будемо вивчати вплив руху центра мас повної ядерної системи (в наслідок випромінювання) на саме випромінювання] та третій доданок (оскільки ми не будемо розглядати можливість деформування форми α -частинки під час поділу ядра). Вводячи *ефективний заряд повної ядерної системи (це α -частинка та бінарна ядерна система)* як

$$Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\{ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_A}{m_A + m_\alpha} \frac{m_A Z_\alpha}{m_A + m_\alpha} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \frac{m_\alpha Z_A}{m_A + m_\alpha} \right\}, \tag{Г.12}$$

зарядовий форм-фактор α -частинки як

$$Z_\alpha(\mathbf{k}) = \left\langle \beta_f \left| \sum_{i=1}^4 \frac{Z_i}{m_i} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{\alpha i}} \right| \beta_i \right\rangle \tag{Г.13}$$

та *зарядовий форм-фактор бінарної ядерної системи* як

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \beta_f \left| \sum_{j=1}^A \frac{Z_j}{m_j} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right| \beta_i \right\rangle, \tag{Г.14}$$

ми отримаємо

$$\begin{aligned}
 \langle f | \hat{H}_\gamma | i \rangle \langle f | \hat{H}_\gamma | i \rangle &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \times \\
 &\times \left\{ \langle f_A, f_\alpha | Z_{\text{eff}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{p} | i_A, i_\alpha \rangle + \right. \\
 &\left. + \langle f_\alpha | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{m_A + m_\alpha} \langle f_A | Z_A(\mathbf{k}) \mathbf{p}_{Aj} | i_A \rangle | i_\alpha \rangle \right\}.
 \end{aligned} \tag{Г.15}$$

У першому наближенні (яке ми назвемо *дипольним*) ми отримаємо:

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip})} = \frac{m_A Z_\alpha - m_\alpha Z_A}{m_A + m_\alpha}. \tag{Г.16}$$

ДОДАТОК Д
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОГЕРЕНТНОГО
ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ ПРОТОН-ЯДЕРНОМУ
РОЗСІЯННІ

Д.1. Хвильова функція протона у полі ядра й підсумовування за спіновими станами

Визначимо хвильову функцію протона у полі ядра. Будемо шукати її у вигляді білінійної комбінації власних функцій двох підсистем — орбітальної та спінової (див. (1.4.2), [161], стор. 42):

$$\psi_{jm}(\mathbf{r}, s) = R(r) \sum_{m=-l}^l \sum_{\mu=\pm 1/2} C_{lm1/2\mu jm} Y_{lm}(\mathbf{n}_r) v_{\mu}(s), \quad (\text{Д.1})$$

де $R(r)$ — радіальна скалярна функція (будемо вважати, що $R(r)$ не залежить від m при однаковому l), $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ — одиничний вектор, спрямований уздовж \mathbf{r} , $Y_{lm}(\mathbf{n}_r)$ — сферичні функції (див. Додаток А.2, стор. 384), $C_{lm1/2\mu jm}$ — коефіцієнти векторного додавання (коефіцієнти КлебшаГордона), $M = m + \mu$ і $l = j \pm 1/2$, s — спінова змінна. Однак, ми врахуємо, що як до випромінювання фотона, так і після нього ми не можемо зафіксувати експериментально окремі стани з обраним числом M (власним значенням оператора \hat{J}_z). Тому замість (Д.1) нас буде цікавити суперпозиція по всіх станах з різними числами M :

$$\psi_{jl}(\mathbf{r}, s) = R(r) \sum_{m=-l}^l \sum_{\mu=\pm 1/2} C_{lm1/2\mu j, M=m+\mu} Y_{lm}(\mathbf{n}_r) v_{\mu}(s). \quad (\text{Д.2})$$

Для зручності подальших розрахунків уведемо просторову хвильову функцію у вигляді:

$$\varphi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\mathbf{n}_r). \quad (\text{Д.3})$$

Розглянемо, що собою представляє спінова функція $v_\mu(s)$. Розписавши її по компонентах, ми бачимо, що $v_{\mu_1}(s)$ і $v_{\mu_2}(s)$ — власні функції оператора спіна \hat{s}_z , що відповідають власним значенням $s_z = \sigma_1$ і $s_z = \sigma_2$ (див. [43], стор. 247). Кожна така функція відповідає стану, у якому частинка має певне значення s_z . Отже, маємо

$$v_{\mu_1}(s) = \delta_{\mu_1 s}, \quad v_{\mu_2}(s) = \delta_{\mu_2 s}. \quad (\text{Д.4})$$

Дія оператора спіна на хвильову функцію виражається за формулою (див. (55,4), [43], стор. 248)

$$(\hat{s} v_\mu)(\sigma) = \sum_{\sigma'} s_{\sigma\sigma'} v_\mu(\sigma'), \quad (\text{Д.5})$$

яка дає наступні матричні елементи (що не дорівнюють нулю):

$$\begin{aligned} (s_x)_{\sigma,\sigma-1} &= (s_x)_{\sigma-1,\sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)}, \\ (s_y)_{\sigma,\sigma-1} &= -(s_y)_{\sigma-1,\sigma} = -\frac{i}{2} \sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)}, \\ (s_z)_{\sigma\sigma} &= \sigma. \end{aligned} \quad (\text{Д.6})$$

У випадку спіна $1/2$ ($s = 1/2$, $\sigma = \pm 1/2$) ці матриці дворядні. Маємо

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{Д.7})$$

Знайдемо наступні вирази:

$$\begin{aligned} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x v_{\mu_i}(s_i) &= v_{\mu_f}^*(s_f) \sum_{s'} (\sigma_x)_{s_i s'} v_{\mu_i}(s') = \left\{ \delta_{s_i, -1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(+1/2) + \right. \\ &= \left. \delta_{s_i, +1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(-1/2) \right\} \sqrt{(s+|s_i|)(s-|s_i|+1)}, \\ v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_y v_{\mu_i}(s_i) &= v_{\mu_f}^*(s_f) \sum_{s'} (\sigma_y)_{s_i s'} v_{\mu_i}(s') = i \left\{ \delta_{s_i, -1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(+1/2) - \right. \\ &= \left. \delta_{s_i, +1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(-1/2) \right\} \sqrt{(s+|s_i|)(s-|s_i|+1)}, \\ v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_z v_{\mu_i}(s_i) &= v_{\mu_f}^*(s_f) \sum_{s'} (\sigma_z)_{s_i s'} v_{\mu_i}(s') = \\ &= \left\{ \delta_{s_i, -1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(-1/2) + \delta_{s_i, +1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(+1/2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Використовуючи (Д.4) і (Д.6), одержимо

$$\begin{aligned}
v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_x v_{\mu_i}(s_i) &= \delta_{\mu_f, s_f} \left\{ \delta_{s_i, -1/2} \delta_{\mu_i, +1/2} + \delta_{s_i, +1/2} \delta_{\mu_i, -1/2} \right\}, \\
v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_y v_{\mu_i}(s_i) &= i \delta_{\mu_f, s_f} \left\{ \delta_{s_i, -1/2} \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{s_i, +1/2} \delta_{\mu_i, -1/2} \right\}, \\
v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_z v_{\mu_i}(s_i) &= \delta_{\mu_f, s_f} \left\{ \delta_{s_i, -1/2} \delta_{\mu_i, -1/2} + \delta_{s_i, +1/2} \delta_{\mu_i, +1/2} \right\}
\end{aligned} \tag{Д.9}$$

і знайдемо суми:

$$\begin{aligned}
\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_x v_{\mu_i}(s_i) &= 1, \\
\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_y v_{\mu_i}(s_i) &= i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\}, \\
\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_z v_{\mu_i}(s_i) &= 1.
\end{aligned} \tag{Д.10}$$

Ці формули можна переписати у вигляді компонентів векторів:

$$\begin{aligned}
\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma} v_{\mu_i}(s_i) &= \mathbf{e}_x \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_x v_{\mu_i}(s_i) + \\
+ \mathbf{e}_y \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_y v_{\mu_i}(s_i) &+ \mathbf{e}_z \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \hat{\sigma}_z v_{\mu_i}(s_i) = \\
= \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} &+ \mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{Д.11}$$

де введена система одиничних ортів \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z .

Тепер будемо шукати матричні елементи у (5.13) [див. стор. 126]. На початку, ми виконаємо в них підсумовування по всіх спінових станах. Використовуючи власні значення спінових функцій (Д.4), для першого елемента

одержимо

$$\begin{aligned}
& \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle = \\
& = \sum_{m_i, m_f} \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} \int R_f^*(r) \sum_{\mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)^* v_{\mu_f}^*(s_f) e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \times \\
& \times R_i(r) \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) v_{\mu_i}(s_i) \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
& = \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_f = \pm 1/2} \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \left[\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) v_{\mu_i}(s_i) \right] \times \\
& \times \int R_f^*(r) Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)^* e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla R_i(r) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
& = \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} \sum_{m_i, m_f} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}},
\end{aligned} \tag{Д.12}$$

де $\left\langle k_f \left| \dots \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}$ — однокомпонентний матричний елемент, який має вигляд

$$\left\langle k_f \left| \hat{f} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} \equiv \int R_f^*(r) Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)^* \hat{f} R_i(r) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) \mathbf{d}\mathbf{r}, \tag{Д.13}$$

де використовуються просторові хвильові функції вигляду (Д.3) і інтегрування виконується тільки по просторових змінних. Використовуючи знайдені

суми (Д.10), для третього елемента знайдемо

$$\begin{aligned}
& \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \right| k_i \right\rangle = \\
& = \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} \int R_f^*(r) \sum_{m_f} \sum_{\mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)^* v_{\mu_f}^*(s_f) e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \times \\
& \times R_i(r) \sum_{m_i} \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) v_{\mu_i}(s_i) \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
& = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_f = \pm 1/2} \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v_{\mu_f}^*(s_f) \boldsymbol{\sigma} v_{\mu_i}(s_i) \times \\
& \times \int R_f^*(r) Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)^* e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} R_i(r) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
& = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}},
\end{aligned} \tag{Д.14}$$

Аналогічні обчислення виконуємо для другого елемента. Випишемо рішення для всіх матричних елементів, що просуммовані за спіновими станами:

$$\begin{aligned}
& \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}, \\
& \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\mathbf{e}(\alpha) \times \nabla \right] \right| k_i \right\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \cdot \left[\mathbf{e}(\alpha) \times \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} \right], \\
& \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \right| k_i \right\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{Д.15}$$

Далі, щоб знайти матричні елементи (5.13), виконаємо у них підсумовування за значеннями векторів поляризації. Знаходимо суму для першого

елемента:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle = \\
& = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} (\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}) \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{Д.16}$$

Для третього елемента одержимо

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1,2,3} \left[\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(\alpha)} \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \right| k_i \right\rangle = k_{\text{ph}} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times (\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)}) \cdot \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \cdot \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{Д.17}$$

Зорієнтуємо систему ортів \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y і \mathbf{e}_z так, щоб \mathbf{e}_z був направлен з вектором \mathbf{k}_{ph} , а \mathbf{e}_x і \mathbf{e}_y — з векторами $\mathbf{e}^{(1)}$ і $\mathbf{e}^{(2)}$. Одержимо

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}^{(2)}. \tag{Д.18}$$

Враховуючи властивості ортогональності цих векторів, спрощуємо (Д.17):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1,2,3} \left[\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(\alpha)} \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \right| k_i \right\rangle = k_{\text{ph}} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times \left[-1 + i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{Д.19}$$

Бачимо, що доданок при $\mathbf{e}^{(3)}$ випадає. Для другого елемента з (5.13) одержуємо

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1,2,3} \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla \right] \right| k_i \right\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
& \times \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \cdot \left[\sum_{\alpha=1,2,3} \mathbf{e}^{(\alpha)} \times \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} \right].
\end{aligned} \tag{Д.20}$$

У кулонівському калібруванні маємо

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}^{(2)}, \quad \mathbf{e}_z \parallel \mathbf{e}^{(3)}, \quad |\mathbf{e}_x| = |\mathbf{e}_y| = |\mathbf{e}_z| = 1, \quad |\mathbf{e}^{(3)}| = 0. \tag{Д.21}$$

З врахуванням цього випишемо остаточні рішення для матричних елементів (5.13):

$$\begin{aligned}
p_{\text{el}} &= i \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot (\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}) \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}, \\
p_{\text{mag}, 1} &= \frac{1}{2} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
&\times \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \left[\sum_{\alpha=1,2} e(\alpha) \times \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \nabla \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} \right], \\
p_{\text{mag}, 2} &= \frac{-i k_{\text{ph}}}{2} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
&\times \left[-1 + i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} \right] \left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{Д.22}$$

Д.2. Матричні елементи по просторовим змінним

Тепер ми будемо шукати матричні елементи:

$$\begin{aligned}
\left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{r}, \\
\left\langle k_f \left| e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k}_{\text{ph}} \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{Д.23}$$

Д.2.1. Лінійна й кругова поляризації випроміненого фотона

Перепишемо вектори *лінійної* поляризації $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ через *вектори кругової* поляризації $\boldsymbol{\xi}_\mu$ із протилежними напрямками обертання (див. [116], (2.39), стор. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} - i \mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} + i \mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{e}^{(3)}, \tag{Д.24}$$

де

$$h_{\pm} = \mp \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \quad h_{-1} + h_{+1} = -i\sqrt{2}, \quad \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} = h_{-1} \boldsymbol{\xi}_{-1}^* + h_{+1} \boldsymbol{\xi}_{+1}^*. \tag{Д.25}$$

Маємо (у кулонівському калібруванні при $\mathbf{e}^{(3)} = 0$):

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} - \boldsymbol{\xi}_{+1}), \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\xi}_{+1}), \quad (\text{Д.26})$$

$$\sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu}^* \cdot \boldsymbol{\xi}_{\mu} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)})^* + \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}) (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})^* = 2. \quad (\text{Д.27})$$

Із визначення (Д.24) одержимо

$$\boldsymbol{\xi}_{-1}^* = -\boldsymbol{\xi}_{+1}, \quad \boldsymbol{\xi}_{+1}^* = -\boldsymbol{\xi}_{-1}. \quad (\text{Д.28})$$

Звідси знаходимо векторні добутки векторів $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) \times \frac{-1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}) \right] = \\ &= \frac{-1}{2} [(\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) \times (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})] = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ i [\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}] - i [\mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{e}^{(1)}] \right\} = \\ &= -i [\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}] = -i \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{Д.29})$$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\xi}_{-1}^* \times \boldsymbol{\xi}_{+1}] &= -[\boldsymbol{\xi}_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}] = 0, & [\boldsymbol{\xi}_{-1}^* \times \boldsymbol{\xi}_{-1}] &= -[\boldsymbol{\xi}_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}] = i \mathbf{e}_z, \\ [\boldsymbol{\xi}_{+1}^* \times \boldsymbol{\xi}_{-1}] &= -[\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}] = 0, & [\boldsymbol{\xi}_{+1}^* \times \boldsymbol{\xi}_{+1}] &= -[\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}] = -i \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{Д.30})$$

Д.2.2. Розкладання векторного потенціалу \mathbf{A} за мультиполями

Розкладемо векторний потенціал \mathbf{A} електромагнітного поля за мультиполями. Відповідно до [116] (див. (2.106) на стор. 58), у сферично симетричному наближенні маємо

$$\boldsymbol{\xi}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} = \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}} + 1)^{1/2} i^{l_{\text{ph}}} \cdot \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, M) + i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, E) \right], \quad (\text{Д.31})$$

де [див. [116], (2.73) на стор. 49, (2.80) на стор. 51]

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, M) &= j_{l_{\text{ph}}}(k_{\text{ph}}r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}}), \\ \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, E) &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}-1}(k_{\text{ph}}r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}}) - \\ &- \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}+1}(k_{\text{ph}}r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}}).\end{aligned}\quad (\text{Д.32})$$

Тут $\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, M)$ і $\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, E)$ — магнітні і електричні мультиполі, $j_{l_{\text{ph}}}(k_{\text{ph}}r)$ — сферичні функції Бесселя порядку l_{ph} [див. Додаток А.3, стор. 385], $\mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}})$ — векторні сферичні гармоніки, див. (1.31)]. Вираз (Д.31) є рішенням хвильового рівняння електромагнітного поля у вигляді плоскої хвилі, що представлено у вигляді суми електричних і магнітних мультиполів (наприклад, див. стор. 83–92, п. 2.2 у [161]). Тому окремі мультипольні у (Д.31) є рішеннями цього хвильового рівняння для даних чисел j_{ph} і l_{ph} (j_{ph} — квантове число, що визначає власне значення оператора повного моменту фотона, тоді як $l_{\text{ph}} = j_{\text{ph}} - 1, j_{\text{ph}}, j_{\text{ph}} + 1$ пов'язане з оператором орбітального моменту, але визначає власні значення парності фотона й тому також є квантовим числом).

Ми зорієтували систему координат таким чином, щоб вісь z була спрямована уздовж вектору \mathbf{k}_{ph} (див. [116], (2.105) на стор. 57). Відповідно до [116] (див. стор. 45), функції $\mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}})$ мають такий вигляд ($\boldsymbol{\xi}_0 = 0$):

$$\mathbf{T}_{j_{\text{ph}}l_{\text{ph}},m}(\mathbf{n}_{\text{r}}) = \sum_{\mu=\pm 1} (l_{\text{ph}}, 1, j_{\text{ph}} | m - \mu, \mu, m) Y_{l_{\text{ph}},m-\mu}(\mathbf{n}_{\text{r}}) \boldsymbol{\xi}_{\mu}, \quad (\text{Д.33})$$

де $(l, 1, j | m - \mu, \mu, m)$ — коефіцієнти Клебша-Гордона (див. Додаток А.4, стор. 385). З (Д.31) і (Д.27) можна одержати таку формулу (при $\mathbf{e}^{(3)} = 0$):

$$\begin{aligned}e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu}^* \boldsymbol{\xi}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}}+1)^{1/2} (-i)^{l_{\text{ph}}} \cdot \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \right].\end{aligned}\quad (\text{Д.34})$$

Д.2.3. Сферично симетричний розпад

Використовуючи розкладання (Д.34), розрахуємо матричні елементи (Д.23) далі. Знайдемо перший матричний елемент:

$$\begin{aligned}
\left\langle k_f \left| e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}} + 1)^{1/2} (-i)^{l_{\text{ph}}} \times \\
&\times \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \right] \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}} + 1)^{1/2} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \times \\
&\times \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \right] \, \mathbf{d}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

або

$$\left\langle k_f \left| e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu=\pm 1} \left[\mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E \right], \quad (\text{Д.35})$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \boldsymbol{\xi}_{\mu} \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) \, \mathbf{d}\mathbf{r}, \\
\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \boldsymbol{\xi}_{\mu} \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \, \mathbf{d}\mathbf{r}.
\end{aligned} \quad (\text{Д.36})$$

Для другого матричного елемента одержимо

$$\begin{aligned}
\left\langle k_f \left| e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}} + 1)^{1/2} (-i)^{l_{\text{ph}}} \times \\
&\times \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \right] \left(\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right) \, \mathbf{d}\mathbf{r} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (2l_{\text{ph}} + 1)^{1/2} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \times \\
&\times \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left[\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \right] \left(\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right) \, \mathbf{d}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

або

$$\left\langle k_f \left| e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle_{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \mu \times \left[p_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i\mu p_{l_{\text{ph}}\mu}^E \right], \quad (\text{Д.37})$$

де

$$\begin{aligned} p_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) \, d\mathbf{r}, \\ p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \, d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{Д.38})$$

Тепер розрахуємо матричні елементи у (Д.22). Використовуючи формули (Д.35)–(Д.38), для першого елемента знаходимо

$$\begin{aligned} p_{\text{el}} &= i \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \boldsymbol{\xi}_{\mu}^* \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu'=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mu' \times \left[p_{l_{\text{ph}}\mu'}^M - i\mu' p_{l_{\text{ph}}\mu'}^E \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \mu \left[p_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i\mu p_{l_{\text{ph}}\mu}^E \right] \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} p_{\text{el}} &= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \cdot \left[p_{l_{\text{ph}}}^M - i p_{l_{\text{ph}}}^E \right], \end{aligned} \quad (\text{Д.39})$$

де

$$p_{l_{\text{ph}}}^M = \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \mu p_{l_{\text{ph}}\mu}^M, \quad p_{l_{\text{ph}}}^E = \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} p_{l_{\text{ph}}\mu}^E. \quad (\text{Д.40})$$

Для третього матричного елемента одержимо

$$\begin{aligned} p_{\text{mag}, 2} &= \frac{-i k_{\text{ph}}}{2} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \left[-1 + i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} \right] \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu=\pm 1} \left[\mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E \right], \end{aligned} \quad (\text{Д.41})$$

де

$$\tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^M = \sum_{\mu=\pm 1} \mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M, \quad \tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^E = \sum_{\mu=\pm 1} \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E. \quad (\text{Д.42})$$

Тепер розглянемо другий матричний елемент. З (Д.22) і (Д.35) запишемо

$$\begin{aligned} p_{\text{mag},1} &= \frac{1}{2} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} - \boldsymbol{\xi}_{+1}) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\xi}_{+1}) i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} + \mathbf{e}_z \right] \times \\ &\times \left[\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \sum_{\mu'=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mu' \times \left[p_{l\mu'}^M - i \mu' p_{l\mu'}^E \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.43})$$

Зі знайдених раніше властивостей (Д.30) можна бачити, що векторні добутки векторів $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$ дають тільки вектор \mathbf{e}_z , помножений на скаляр. Перетворимо (Д.43) далі:

$$\begin{aligned} p_{\text{mag},1} &= \frac{1}{2} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \mathbf{e}_z \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\mu'=\pm 1} h_\mu \mu' \left[\boldsymbol{\xi}_\mu^* \times \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \right] \cdot \left[p_{l\mu'}^M - i \mu' p_{l\mu'}^E \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \mathbf{e}_z \sum_{\mu=\pm 1} \left[\boldsymbol{\xi}_\mu^* \times \boldsymbol{\xi}_\mu \right] h_\mu \left[\mu p_{l\mu}^M - i p_{l\mu}^E \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \mathbf{e}_z \sum_{\mu=\pm 1} -i \mu \mathbf{e}_z h_\mu \left[\mu p_{l\mu}^M - i p_{l\mu}^E \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \cdot \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \left[i p_{l\mu}^M + \mu p_{l\mu}^E \right] \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
p_{\text{mag},1} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\
&\times \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \cdot \sum_{\mu = \pm 1} i h_\mu \mu \left[\mu p_{l\mu}^M - i p_{l\mu}^E \right].
\end{aligned} \tag{Д.44}$$

Випишемо знайдені рішення:

$$\begin{aligned}
p_{\text{el}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}}+1} \times \\
&\times \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \left[i p_{l_{\text{ph}}}^{M m_i m_f} + p_{l_{\text{ph}}}^{E m_i m_f} \right], \\
p_{\text{mag},1} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}}+1} \cdot \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \times \\
&\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{\mu = \pm 1} h_\mu \left[i p_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + \mu p_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right], \\
p_{\text{mag},2} &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} k \sum_{l_{\text{ph}}} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}}+1} \cdot \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \times \\
&\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \left[-1 + i \left\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \right\} \right] \cdot \left[i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^M + \tilde{p}_{l_{\text{ph}}}^E \right].
\end{aligned} \tag{Д.45}$$

Д.3. Розрахунки компонент $p_{l_{\text{ph}} \mu}^M$, $p_{l_{\text{ph}} \mu}^E$ та $\tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^M$, $\tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^E$

Для розрахунків таких компонент скористаємося градієнтною формулою [див. [116], (2.56), стор. 46]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ R_i(r) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) \right\} = \\
&= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i - 1, m_i}(\mathbf{n}_r) - \\
&- \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i + 1, m_i}(\mathbf{n}_r),
\end{aligned} \tag{Д.46}$$

та отримаємо

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}},\mu}^M &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i-1, \mu) \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i+1, \mu) \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\},
\end{aligned} \tag{Д.47}$$

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}},\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_i(l_{\text{ph}}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i-1, l_{\text{ph}}-1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{l_i l_{\text{ph}}}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i-1, l_{\text{ph}}+1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) \right\} + \\
&+ \sqrt{\frac{(l_i+1)(l_{\text{ph}}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i+1, l_{\text{ph}}-1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{(l_i+1)l_{\text{ph}}}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i+1, l_{\text{ph}}+1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) \right\},
\end{aligned} \tag{Д.48}$$

де

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \frac{dR_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_n(k_{\text{ph}}r) r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r, l_i) R_f^*(l_f, r) j_n(k_{\text{ph}}r) r dr, \\
I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, \mu) &= \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\
I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, l_2, \mu) &= \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_2, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega.
\end{aligned} \tag{Д.49}$$

Також для $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ та $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ знаходимо:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}), \\ \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - \\ &- \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1),\end{aligned}\quad (\text{Д.50})$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{J}(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r) R_f^*(l, r) j_n(k_{\text{ph}}r) r^2 dr, \\ \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, n, \mu) &= \xi_\mu \int Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega.\end{aligned}\quad (\text{Д.51})$$

Д.4. Диференціальні матричні елементи

У сферично симетричній задачі хвильові функції ядерної системи у початковому й кінцевому станах можна записати як добуток радіальної й кутової компонент. В наслідок цього, матричні елементи випромінювання можна виразити через радіальні та кутові інтеграли, розрахунок яких приведено у Додатку Д (див. стор. 448). Для опису випромінювання фотонів у залежності від кута θ , яке супроводжує протонний розпад, визначимо наступні диференціальні матричні елементи:

$$\begin{aligned}\frac{d p_{l_{\text{ph}}\mu}^M}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} \frac{d I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + \right. \\ &+ (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \left. \right\} - \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} \frac{d I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \times \\ &\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\},\end{aligned}\quad (\text{Д.52})$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{l_{\text{ph}}\mu}^E}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{1}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} \left\{ \sqrt{l_i(l_{\text{ph}} + 1)} \frac{dI_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i l_{\text{ph}}} \cdot \frac{dI_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} + \\
&+ \sqrt{(l_i + 1)(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot \frac{dI_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{(l_i + 1)l_{\text{ph}}} \cdot \frac{dI_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \times \\
&\times \left. \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{Д.53}$$

i

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M}{\sin \theta d\theta} &= \frac{d\tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu)}{\sin \theta d\theta} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}), \\
\frac{d\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} \frac{d\tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} - 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - \\
&- \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} \frac{d\tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} + 1, \mu)}{\sin \theta d\theta} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1).
\end{aligned} \tag{Д.54}$$

Можна бачити, що інтегрування цих функцій по куту θ у межах від 0 до π дає повні матричні елементи $p_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ і $p_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ у (Д.47) і (Д.48), та матричні елементи $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ і $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ у (Д.50).

При $l_i = 0$ маємо

$$\begin{aligned}
 \frac{d p_{l_{\text{ph}}, \mu}^M}{\sin \theta d \theta} &= -\frac{d I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu)}{\sin \theta d \theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}) = J(l_f, l_{\text{ph}}) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}}^{\mu \mu'} f_{l_f l_{\text{ph}}}^{\mu \mu'}(\theta), \\
 \frac{d p_{l_{\text{ph}}, \mu}^E}{\sin \theta d \theta} &= -\sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2 l_{\text{ph}}+1}} \cdot \frac{d I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1, \mu)}{\sin \theta d \theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}-1) + \\
 &+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2 l_{\text{ph}}+1}} \cdot \frac{d I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1)}{\sin \theta d \theta} \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}+1) = \\
 &= -\sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2 l_{\text{ph}}+1}} J(l_f, l_{\text{ph}}-1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1}^{\mu \mu'} f_{l_f, l_{\text{ph}}-1}^{\mu \mu'}(\theta) + \\
 &+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2 l_{\text{ph}}+1}} J(l_f, l_{\text{ph}}+1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1}^{\mu \mu'} f_{l_f, l_{\text{ph}}+1}^{\mu \mu'}(\theta).
 \end{aligned}
 \tag{Д.55}$$

Д.5. Роль мультипольних компонент у кутовому аналізі

Перші оцінки мультипольних компонент гальмівного випромінювання більш високого порядку у задачах розпаду ядер були отримані Ткаля у роботах [150, 123]. На прикладі випромінювання фотонів при α -розпаді ядер ^{226}Ra , ^{210}Po і ^{214}Po він показав, що для енергій фотонів до 900 кеВ випромінювання $E2$ дає більш слабкий внесок від 50 до 1000 разів у повний спектр у порівнянні з $E1$ (див. Рис. 1 у [123]). Також є дані розрахунків Кургаліна, Чувільського й Чуракової для внеску $E2$ у задачі α -розпаду ^{210}Po [30]: відповідно до їхніх розрахунків, внесок мультиполя $E2$ менше відносно $E1$ від 50 до 500 разів для енергій фотонів до 800 кеВ. Ми вивчали це питання також: відповідно до наших розрахунків, мультиполі, що складаються з $E2$ і $M2$, виявилися досить малими. Автори роботи [101] досліджували дипольний і квадрупольний внески у квазікласичному розгляді ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді, та вивчали роль інтерференції між цими внесками¹. Інших

¹Цікавою у цій роботі є ідея визначення квадрупольної корекції до ефективного заряду у дипольному наближенні. Але розкладання у [101] і мультипольне розкладання у даному розділі мають різні основу

будь-яких оцінок випромінювання мультиполя $E2$ і мультиполей більш високого порядку, які могли б бути отримані дотепер, не відомо. На основі цих міркувань звичайно у задачах гальмівного випромінювання розрахунки за мультипольним підходом проводяться на основі першого мультиполя $E1$, який вносить переважний внесок у повний спектр (у нашому підході стабільними виходять, як мінімум, 4 або 5 перших цифр спектра).

Основні труднощі в одержанні достовірних значень спектрів більш високих мультиполів полягають у зменшенні збіжності рахунку матричного елемента випромінювання, яку слід досягти. Відзначимо лише деякі з причин. (1) Амплітуди й фази кулонівських функцій у асимптотичній області (яка є дуже важливою при визначенні спектрів) обчислюються на основі асимптотичних рядів, які в загальному випадку розбігаються. Тому, точність визначення хвильових функцій обмежена деякою межею, подолати яку не можливо у принципі. Якщо ж відмовитися від застосування асимптотичних рядів при визначенні асимптотичних кулонівських функцій, то формули стають збіжними, але більш наближеними. Як виявляється, такий перехід помітно проявляється на спектрах випромінювання більш високих мультиполів і зростає з ростом мультипольності. (2) З ростом мультипольності зростає й просторова область, у межах якої слід обчислювати радіальні інтеграли. Підінтегральні функції у всіх цих інтегралах мають осцилюючий загасаючий вигляд. Вже для досягнення мінімальної прийнятної точності при обчисленні інтегралів від перших мультиполів доводиться акуратно враховувати величезне число осциляцій, що є складною чисельною задачею (наприклад, див. Додаток і Рис. 6 у роботі [63]). Перехід до мультиполів більш високого порядку значно

й зміст. А саме, у [101] дипольний і квадрупольний внески визначаються як перший член (при $l_f = 1$) і другий член (при $l_f = 2$) розкладання хвильової функції $\varphi_f(\mathbf{r})$ α -ядерної системи у стані після випромінювання фотона (див. формули (B1)–(B4) у [101]), при представленні ефективного заряду для двох-зарядової ядерної системи (див. формули (A1)–(A4) у [101]). Мультипольний підхід у даному розділі заснований на стандартному мультипольному розкладанні хвильової функції фотона (Д.31)–(Д.32).

ускладнює цю проблему. У цьому змісті, для кожного мультиполя можна говорити про свою межу, яка існує при чисельному визначенні радіальних інтегралів. Вказівки на всю серйозність цієї проблеми й перспективність методів рішення можна знайти у роботах авторів, які також намагалися визначати спектри гальмівного випромінювання в ядерних задачах з реалістичними потенціалами взаємодії (наприклад, див. [25, 97, 31]).

Щоб краще зрозуміти, як саме змінюється кутова ймовірність гальмівного випромінювання у залежності від квантових чисел l_i , l_f і l_{ph} (що визначають мультипольні члени розкладання), перетворимо формули, виділивши в них функції, що визначають кутову залежність. Така інформація повністю існує у диференціальних матричних елементах. Ми отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d p_{l_{ph}\mu}^M}{\sin \theta d\theta} &= \delta_{\mu, m_i - m_f} P_{l_f}^{|m_f|} \sum_{\mu' = \pm 1} \left\{ \delta_{l_i \neq 0} c_1^{\mu'} P_{l_i - 1}^{|m_i - \mu'|} - c_2^{\mu'} P_{l_i + 1}^{|m_i - \mu'|} \right\} \cdot P_{l_{ph}}^{|\mu - \mu'|}, \\ \frac{d p_{l_{ph}\mu}^E}{\sin \theta d\theta} &= \delta_{\mu, m_i - m_f} P_{l_f}^{|m_f|} \sum_{\mu' = \pm 1} \left\{ \left[\delta_{l_i \neq 0} c_3^{\mu'} P_{l_i - 1}^{|m_i - \mu'|} + c_5^{\mu'} P_{l_i + 1}^{|m_i - \mu'|} \right] P_{l_{ph} - 1}^{|\mu - \mu'|} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\delta_{l_i \neq 0} c_4^{\mu'} P_{l_i - 1}^{|m_i - \mu'|} + c_6^{\mu'} P_{l_i + 1}^{|m_i - \mu'|} \right] P_{l_{ph} + 1}^{|\mu - \mu'|} \right\}, \end{aligned} \quad (D.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{p}_{l_{ph}\mu}^M}{\sin \theta d\theta} &= \delta_{m_i, m_f} c_7 \cdot P_{l_i}^{|m_i|} P_{l_f}^{|m_f|} P_{l_{ph}}^0, \\ \frac{d \tilde{p}_{l_{ph}\mu}^E}{\sin \theta d\theta} &= \delta_{m_i, m_f} P_{l_i}^{|m_i|} P_{l_f}^{|m_i|} \left\{ c_8 P_{l_{ph} - 1}^0 - c_9 P_{l_{ph} + 1}^0 \right\}, \end{aligned} \quad (D.57)$$

де

$$\begin{aligned} c_1^{\mu'} &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} C_{l_i l_f l_{ph} l_i - 1, l_{ph}}^{m_i m_f \mu'} \cdot \left[J_1(l_i, l_f, l_{ph}) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{ph}) \right], \\ c_2^{\mu'} &= \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} C_{l_i l_f l_{ph} l_i + 1, l_{ph}}^{m_i m_f \mu'} \cdot \left[J_1(l_i, l_f, l_{ph}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{ph}) \right], \end{aligned} \quad (D.58)$$

$$\begin{aligned}
c_3^{\mu'} &= \sqrt{\frac{l_i(l_{\text{ph}}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_i-1, l_{\text{ph}}-1}^{m_i m_f \mu'} \times \\
&\times \left[J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) \right], \\
c_4^{\mu'} &= \sqrt{\frac{l_i l_{\text{ph}}}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_i-1, l_{\text{ph}}+1}^{m_i m_f \mu'} \times \\
&\times \left[J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) \right], \\
c_5^{\mu'} &= \sqrt{\frac{(l_i+1)(l_{\text{ph}}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_i+1, l_{\text{ph}}-1}^{m_i m_f \mu'} \times \\
&\times \left[J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) \right], \\
c_6^{\mu'} &= \sqrt{\frac{(l_i+1) l_{\text{ph}}}{(2l_i+1)(2l_{\text{ph}}+1)}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_i+1, l_{\text{ph}}+1}^{m_i m_f \mu'} \times \\
&\times \left[J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1) \right],
\end{aligned} \tag{Д.59}$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}}^{m_i \mu} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}), \\
c_8 &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}-1}^{m_i \mu} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1), \\
c_9 &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} C_{l_i l_f l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}+1}^{m_i \mu} \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1).
\end{aligned} \tag{Д.60}$$

Тут $c_1^{\mu'} \dots c_6^{\mu'}$ і $c_7 \dots c_9$ не залежать від кута θ . Функція $\delta_{l_i \neq 0}$ визначена як $\delta_{l_i \neq 0} = 0$ при $l_i = 0$ і $\delta_{l_i \neq 0} = 1$ при $l_i \neq 0$. На основі цих формул можна зробити наступний висновок.

1. Числа l_i і l_f визначають основу форми кутового розподілу ймовірності випромінювання фотонів, значення l_{ph} вносять осциляції в цю форму:

(а) Число осциляцій такої форми мінімально при $l_{\text{ph}} = 1$ і зростає при збільшенні l_{ph} .

(б) $c_1^{\mu'} \dots c_6^{\mu'}$ і $c_7 \dots c_9$ — ваги осциляцій при кожному обраному l_{ph} . Інтегралі J_1 , J_2 зменшуються при зростанні l_{ph} (при фіксованому w_{ph}), тому кожний матричний елемент із наступним значенням l_{ph} вно-

силь у базову форму розподілу новий внесок з меншою ймовірністю, але з більшим числом осциляцій.

2. Якщо при деякому обраному l_i поліноми $P_{l_i \pm 1}^{|m_i - \mu'|}$ або при обраному l_f поліноми $P_{l_f}^{|m_f|}$ у (Д.56) (при деякому обраному l_i поліноми $P_{l_i}^{|m_i|}$ або при обраному l_f поліноми $P_{l_f}^{|m_f|}$ у (Д.57)) дорівнюють нулю при деякому значенні кута θ , то диференціальні матричні елементи у (Д.56) (у (Д.57)) залишаться рівними нулю при будь-якому значенні l_{ph} для кута θ .

На Рис. Д.1 показані кутові розподіли електричної компоненти випромінювання dp_{el} при протонному розпаді ядра ^{146}Tm для перших трьох мультиполів ($l_{ph} = 1, 2, 3$). З малюнка (а) видно, що другий і третій мультиполі

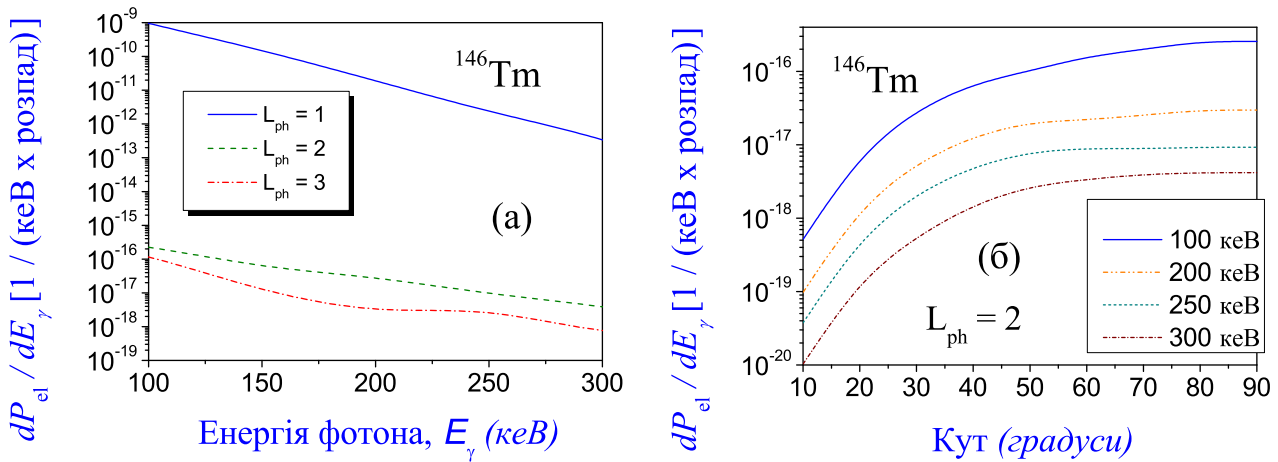


Рис. Д.1 Внески електричної компоненти випромінювання dp_{el} при протонному розпаді ядра ^{146}Tm для перших трьох мультиполів ($l_{ph} = 1, 2$). (а) Спектри при куті $\vartheta = 90^\circ$: можна бачити, що внесок випромінювання при $l_{ph} = 1$ (суцільна лінія) значно більше у порівнянні із внесками випромінювання при $l_{ph} = 2$ (штрихова лінія) і $l_{ph} = 3$ (штрих-пунктирна лінія), тобто є переважним на всьому діапазоні енергій випромінених фотонів. (б) Мультипольна компонента випромінювання при $l_{ph} = 2$ у залежності від кута ϑ : у кутовому діапазоні від 0 до 90° може з'явитися один додатковий екстремум у цієї кривій, але він практично є згладженим (при даній точності обчислень). Однак, при малих значеннях кута θ з ростом l_{ph} кожна наступна крива зростає більш швидко у порівнянні з кутовими спектрами при $l_{ph} = 1$ (див. Рис. 5.2 (а)).

(при $l_{ph} = 2$ і $l_{ph} = 3$, $\theta = 90^\circ$) на 5–7 порядків менше у порівнянні з першим (при $l_{ph} = 1$, $\theta = 90^\circ$). Кутові розподіли цих мультиполів при $l_{ph} = 2$ і $l_{ph} = 3$

показані на наступних малюнках Д.1 (б) та Д.2. Звідси видно, що з ростом мультипольності (тобто числа l_{ph}) випромінювання сильніше проявляється для менших значень кута ϑ (при фіксованих значеннях l_i і l_f для ^{146}Tm). Явні вирази для диференціальних матричних елементів для перших декількох значень l_i і l_f при довільному l_{ph} наведені у Додатку Д.4 [див. стор. 462].

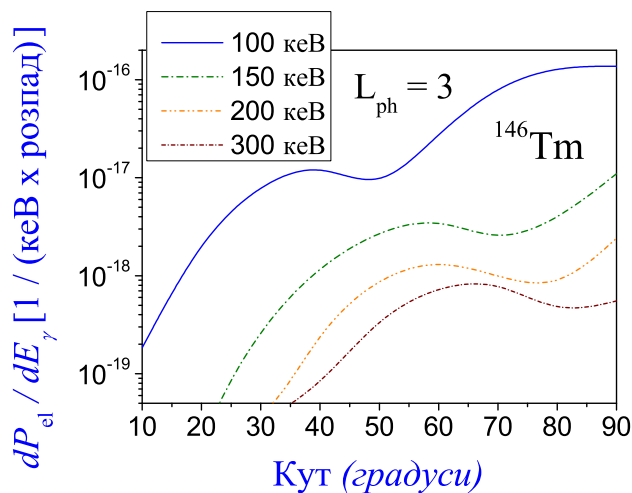


Рис.Д.2 Внески електричної компоненти випромінювання dp_{el} при протонному розпаді ядра ^{146}Tm для мультиполів при $l_{\text{ph}} = 3$. Мультипольна компонента випромінювання при $l_{\text{ph}} = 3$ у залежності від кута ϑ : поява ще одного нового екстремума формує першу осциляцію. Спостерігається зсув максимуму і ями спектра у напрямку більших значень кута θ з ростом енергії випроміненого фотона.

ДОДАТОК Е
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
НЕКОГЕРЕНТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ
ПРОТОН-ЯДЕРНОМУ РОЗСІЯННІ

Е.1. Матричний елемент випромінювання

Почнемо з розгляду найбільш суттєвого внеску до повного матричного елемента, що визначається другим доданком F_2 у формулах (6.14) (див. стор. 152, позначимо його через нижній індекс 1). Ми інтегруємо за всіма незалежними просторовими координатами, що визначені за формулами (6.3), та отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -N_i N_f \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} (2\pi)^3 \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{K}_i - \mathbf{k}) \times \\ &\times \left\langle \Phi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \Phi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

де ми ввели *ефективний заряд протон-ядерної системи* як

$$Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \left\{ \frac{m_A z_p}{m_A + m_p} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_p} \right\} \quad (\text{E.2})$$

та *зарядовий форм-фактор ядра* як

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \left| \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle. \quad (\text{E.3})$$

Тут $m = m_p m_A / (m_p + m_A)$ — зведена маса та ми використовуємо інтегральне представлення дельта-функції. Фактори нормування N_i та N_f визначаються, як $N_i = N_f = (2\pi)^{-3/2}$. Будемо шукати переріз випромінювання фотонів, що не залежить від імпульса \mathbf{K}_f (імпульса повної протон-ядерної системи після

випромінювання фотона у лабораторній системі). Нам потрібно проінтегрувати матричний елемент (E.1) за всіма можливими значеннями імпульса \mathbf{K}_f , отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\ &\times \left\langle \Phi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \Phi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \quad (\text{E.4}) \\ \mathbf{K}_i &= \mathbf{K}_f + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

У наближенні $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \rightarrow 1$ (яке називається *дипольним* відносно ефективного заряду) ефективний заряд системи отримує наступного вигляду:

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) = \frac{m_A z_p - m_p Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_p}. \quad (\text{E.5})$$

Звідси видно, що у такому наближенні ефективний заряд стає незалежним від відносної відстані між протоном та центром мас ядра.

Найпростіший вигляд для матричного елементу можна отримати, якщо знехтувати відносними відстанями нуклонів ядра у його просторовій області (тобто у наближенні, де ядро розглядається як точкове та ми маємо $e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \rightarrow 1$ для кожного нуклона). Форм-фактор ядра являє собою суммарний електричний заряд нуклонів ядра, $Z_A(\mathbf{k}) \rightarrow Z_A$, де втрачається залежність від характеристик випроміненого фотона, тоді як функції $\psi_{\text{nucl},s}$ нормовані (див. Додаток E.3 для подробиць). У такому наближенні ми отримуємо матричний елемент (ми додаємо верхній індекс (dip)):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1^{(\text{dip})} &= \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} p_1 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \\ Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} &= \frac{m_A z_p - m_p Z_A}{m_A + m_p}, \quad (\text{E.6}) \\ p_1 &= -Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \cdot \left\langle \psi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \psi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \end{aligned}$$

де використовуються хвильові пакети

$$\Phi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} g(k - k_s) \psi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r}) e^{-iw(k)t} dk \quad (\text{E.7})$$

як функції $\psi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ (відповідно до формалізму роботи [56]). Такий матричний елемент p_1 співпадає у точності з електричним матричним елементом p_{el} у формулі (10) у дипольному наближенні ефективного заряду у роботі [65] без уключення спінових станів розсіяного протона.

Е.1.1. Випромінювання, що формується за рахунок просторових зміщень нуклонів ядра

Тепер ми будемо шукати корекцію до матричного елемента (Е.6), при врахуванні просторових зміщень нуклонів ядра (позначимо таку корекцію через нижній індекс 2). Запишемо матричний елемент (Е.4) як

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 = \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1^{(\text{dip})} + \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_2 \quad (\text{E.8})$$

та ми знаходимо корекцію [після використання хвильових функцій $\Phi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ у вигляді (Е.7)]:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_2 &= \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{ph}}} p_2 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \\ p_2 &= - \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\langle \psi_{p\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \psi_{p\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

де введено нової корекції для ефективного заряду у вигляді

$$\begin{aligned} Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} - 1 \right) \frac{m_A z_p}{m_A + m_p} - \\ &- \frac{m_p}{m_A + m_p} \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Z_A(\mathbf{k}) - Z_A \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

У дипольному наближенні ефективного заряду ми маємо (див. Додаток Е.3 для розрахунків $Z_A(\mathbf{k})$):

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 2)}(\mathbf{k}) = - \frac{m_p}{m_A + m_p} \left(Z_A(\mathbf{k}) - Z_A \right). \quad (\text{E.11})$$

Можна бачити, що така функція описує корекцію до електричного заряду ядра. Оскільки експоненційний фактор у матричному елементі (Е.9) є меншим ніж одиниця, то корекція до заряду ядра є меншою ніж його заряд (що пояснює його зміст як корекції до заряду). У загальному випадку, корекція зменшує повний заряд ядра. Так як ми розглядуємо нуклони ядра у зв'язаних станах, то матричний елемент розраховується без розбіжностей.

Матричний елемент, що побудований на основі такого дипольного ефективного заряду (Е.11), набуває більш простого вигляду:

$$p_2^{(\text{dip})} = -Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 2)}(\mathbf{k}) \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \cdot \left\langle \psi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \right| \psi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle. \quad (\text{Е.12})$$

Якщо ми хочемо включити параметри випромінених фотонів у форм-фактор ядра, то потрібно розрахувати матричний елемент за межами застосування дипольного наближення. У такому випадку можна застосувати формулу (Е.9), де найбільш акуратне представлення ефективного заряду має вигляд (див. Додаток Е.4 для подробиць):

$$Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \beta) Z_{\text{eff},l}^{(2)}(\mathbf{k}, r) - Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)}, \quad (\text{Е.13})$$

де введені часткові компоненти ефективного заряду як

$$Z_{\text{eff},l}^{(2)}(\mathbf{k}, r) = \frac{m_A z_p}{m_A + m_p} j_l\left(\frac{m_p}{m_A + m_p} kr\right) - \frac{m_p Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_p} j_l\left(\frac{m_A + 2m_p}{m_A + m_p} kr\right) \quad (\text{Е.14})$$

та β — кут між векторами \mathbf{k} і \mathbf{r} . З цієї формули можна бачити, що на менших відстанях (по змінній r) перший доданок має бути домінуючим при інтегруванні матричного елемента, але на великих відстанях другий доданок дає більш великий внесок. Такий ефективний заряд має змінювати форму спектра гальмівного випромінювання, тому що він змінює залежність матричного елемента від енергії фотона.

Тепер ми розглянемо випромінювання фотонів, що визначається третім матричним елементом у (6.13) (позначимо такий матричний елемент за

допомогою нижнього індекса *add*). Виконуючи інтегрування за просторовою змінною \mathbf{R} , імпульсом \mathbf{K} , використовуючи фактори нормування N_i та N_f та пакети (Е.7) як функції $\Psi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$, ми отримуємо (див. Доданок Е.4 для подробиць):

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_{\text{add}} = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} p_{fi, \text{add}} 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_f + \mathbf{k}, \quad (\text{E.15})$$

де

$$p_{fi, \text{add}} = -\mu \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \beta) M_l(k) \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \cdot \mathbf{D}_A(\mathbf{k}), \quad (\text{E.16})$$

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \left| \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle, \quad (\text{E.17})$$

та ми ввели часткові матричні елементи нуклонів як

$$M_l(k) = \left\langle \psi_{p\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| j_l \left(\frac{m_p}{m_A + m_p} kr \right) \right| \psi_{p\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle. \quad (\text{E.18})$$

При врахуванні кулонівського калібрування та рішення (Е.90) для функції $\mathbf{D}_A(\mathbf{k})$, що приведене у Додатку Е.5, ми знаходимо, що матричний елемент (Е.16) дорівнює нулю. По тій причині, останній матричний елемент у (6.13) дорівнює нулю також.

Е.1.2. Врахування спінових станів розсіяного протона

Оператор випромінювання фотона у спіновому формалізмі розсіяного протона має наступний вигляд [65]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma = & Z_{\text{eff}} \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \left(i \mathbf{e}^{(\alpha)} \nabla - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}_{\text{ph}} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}] \right). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Тепер стаціонарна хвильова функція розсіяного протона (тобто функція $\psi_{p\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ вище) береться у вигляді білінійної комбінації власних функцій орбітальної та спінової підсистем [див. також рівняння (1.4.2) у [161], стор. 42],

що було детально проаналізовано у роботі [65]. Однак, ми будемо допускати, що неможливо зафіксувати експериментально стани для обраних значень M (власні значення оператора моменту \hat{J}_z). Таким чином, ми будемо шукати суперпозицію за всіма станами з різними M та визначимо хвильову функцію так:

$$\psi_{\text{p-nucl}, j l}(\mathbf{r}, s) = R(r) \sum_{m=-l}^l \sum_{\mu=\pm 1/2} C_{l m 1/2 \mu}^{j, M=m+\mu} Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}}) v_{\mu}(s), \quad (\text{E.20})$$

де $R(r)$ — радіальна скалярна функція (що не залежить від різних значень m при однаковому значенні l), $\mathbf{n}_{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ — одиничний вектор, що направлений вздовж вектору \mathbf{r} , $Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}})$ — сферичні функції (ми використовуємо визначення (28,7)–(28,8), стор. 119 у книзі [43]), $C_{l m 1/2 \mu}^{j M}$ — коефіцієнти Клебша-Гордона, s — змінна по спіну, $M = m + \mu$ та $l = j \pm 1/2$. Для зручності, ми вводимо просторову хвильову функцію у вигляді $\varphi_{\text{p-nucl}, l m}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}})$.

Таким чином, після уключення спінового формалізму розсіянного протона (див. рівняння (10) та (36) у роботі [65]), ми отримуємо оновлені формули (E.6), (E.12) та формулу (E.9) з ефективним зарядом (E.13) як

$$p_1 = Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f=m_f+\mu_f, *} \times \quad (\text{E.21})$$

$$\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i=m_i+\mu_i} \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \left[i \mu p_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + p_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right],$$

$$p_2^{(\text{dip})} = Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},2)}(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f=m_f+\mu_f, *} \times \quad (\text{E.22})$$

$$\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i=m_i+\mu_i} \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \left[i \mu p_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + p_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right],$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f=m_f+\mu_f, *} \times \quad (\text{E.23})$$

$$\times C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i=m_i+\mu_i} \sum_{\mu=\pm 1} h_{\mu} \left[i \mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^{M m_i m_f} + \tilde{p}_{l_{\text{ph}} \mu}^{E m_i m_f} \right],$$

Розрахунки матричних елементів $p_{l_{\text{ph}}\mu}^{Mm_i m_f}$, $p_{l_{\text{ph}}\mu}^{Em_i m_f}$, $p_{l_{\text{ph}}\mu}^{Mm_i m_f}$ та $p_{l_{\text{ph}}\mu}^{Em_i m_f}$ приведено у Додатку Е.2¹.

Е.1.3. Корекція до випромінювання фотонів, що виникає за рахунок врахування відносних імпульсів нуклонів у ядрі, враховуючи спінові стани розсіяного протона

Найбільш інтенсивне випромінювання формується першим доданком у операторі випромінювання (Е.20), якого було сформульовано у попередньому розділі. Наступне за інтенсивністю випромінювання формується за рахунок другого доданку у формулі (Е.20) (відповідно до аналізу у роботі [65]), який ми будемо вивчати у цьому розділі. Останній доданок у (Е.20) дає найменш інтенсивне випромінювання, яким ми будемо нехтувати у цьому розділі. Відповідний матричний елемент з уключеним другим доданком оператора випромінювання, після інтегрування за просторовою змінною \mathbf{R} та імпульсом \mathbf{K} , з використанням формалізму пакетів (Е.7) для хвильової функції $\Phi_{\text{p-nucl},s}(\mathbf{r})$ для розсіяного протона, є таким (позначимо його через нижній індекс 4)

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_4 = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} p_4 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \quad (\text{Е.24})$$

де

$$p_4 = m \sum_{\alpha=1,2} \left\langle \psi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_{\text{p}}}{m_A + m_{\text{p}}} \times \right. \right. \\ \left. \times \left\{ \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \times \mathbf{e}^{(\alpha),*}] \right\} \left| \psi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle. \quad (\text{Е.25})$$

Цей матричний елемент можна розділити на два інтеграли. Використовуючи рішення (Е.90) для функції $\mathbf{D}_A(\mathbf{k})$ та виконуючи сумування за станами

¹У цьому Розділі для більшої ясності ми додаємо верхні індекси m_i , m_f до позначень матричних елементів

поляризації випроміненого фотона, ми отримуємо:

$$p_4 = \frac{\hbar m k}{4} Z_A(\mathbf{k}) \left\langle \psi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \boldsymbol{\sigma} \right| \psi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle \times \quad (\text{E.26})$$

$$\times (\mathbf{e}^{(2),*} - \mathbf{e}^{(1),*}).$$

Для врахування спінових станів розсіяного протона, ми використовуємо хвильову функцію $\psi_{\text{p-nucl}}$ цього протона у вигляді (E.20) та отримуємо наступний вигляд для матричного елемента [65]:

$$p_4 = \frac{\hbar m k}{4} Z_A(\mathbf{k}) \sum_{m_f=-l_f}^{l_f} \sum_{m_i=-l_i}^{l_i} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f, M=m_f+\mu_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i, M=m_i+\mu_i} \times$$

$$\times \left\langle \varphi_{\text{p-nucl}, l_f m_f}(\mathbf{r}) \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \right| \varphi_{\text{p-nucl}, l_i m_i}(\mathbf{r}) \right\rangle \times$$

$$\times \left\{ -1 + i [\delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2}] \right\}. \quad (\text{E.27})$$

Ми застосовуємо мультипольне розкладання внутрішнього матричного елемента (компоненти $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$, $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$, відповідні радіальні та кутові інтеграли дано у Додатку E.2):

$$\left\langle \varphi_{\text{p-nucl}, l_f m_f}(\mathbf{r}) \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \right| \varphi_{\text{p-nucl}, l_i m_i}(\mathbf{r}) \right\rangle = \quad (\text{E.28})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \sum_{\mu=\pm 1} [\mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E],$$

та повний матричний елемент (E.27) здобуває вигляду:

$$p_4 = \frac{\hbar m k}{4} Z_A(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \times$$

$$\times \sum_{m_f=-l_f}^{l_f} \sum_{m_i=-l_i}^{l_i} \sum_{\mu_i, \mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f, M=m_f+\mu_f, *} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i, M=m_i+\mu_i} \times \quad (\text{E.29})$$

$$\times \left\{ -1 + i [\delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2}] \right\} \sum_{\mu=\pm 1} [\mu \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M - i \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E].$$

Е.2. Радіальні та кутові інтеграли матричних елементів

У цьому Додатку ми приведемо результати розрахунку матричних елементів випромінювання, що використовуються у Розділах 5 та 6.

Е.2.1. Розрахунок компонентів $p_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ і $p_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ і $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M, \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$: випадок $l_i = 0$

Для випадку $l_i = 0$ маємо:

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = R_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r^i). \quad (\text{E.30})$$

Використовуючи *градієнтну формулу* (див. [116], (2.56) на стор. 46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(r) Y_{lm}(\mathbf{n}_r) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) \mathbf{T}_{l-1,m}(\mathbf{n}_r) - \\ &- \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) \mathbf{T}_{l+1,m}(\mathbf{n}_r) \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

і враховуючи (E.30), одержимо

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) = - \frac{dR_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i). \quad (\text{E.32})$$

Використовуючи це співвідношення й (Д.32), перетворимо вирази (Д.38) для магнітної й електричної компонент:

$$\begin{aligned} p_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) = \\ &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 R_f^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \left(- \frac{dr_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \right) j_{l_{\text{ph}}}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) = \\ &= - \int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}}(kr) r^2 dr \cdot \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) = \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 R_f^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \left(-\frac{dr_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \right) \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}-1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}+1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) \right\} = \\
&= -\sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) r^2 dr \times \\
&\times \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}-1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega - \\
&+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) r^2 dr \times \\
&\times \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}+1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= -\int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}}(kr) r^2 dr \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}},\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= -\sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) r^2 dr \times \\
&\times \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}-1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega - \\
&+ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) \frac{dr_i(r)}{dr} j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) r^2 dr \times \\
&\times \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}l_{\text{ph}}+1,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{E.33}$$

Увівши наступні позначення:

$$\begin{aligned}
J(l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \frac{dr_i(r)}{dr} R_f^*(l, r) j_n(kr) r^2 dr, \\
I(l_f, l_{\text{ph}}, n, \mu) &= \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}}n,\mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{E.34}$$

вирази (Е.33) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 p_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= -I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}}), \\
 p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= -\sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}} - 1) + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} I(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \cdot J(l_f, l_{\text{ph}} + 1).
 \end{aligned} \tag{E.35}$$

Аналогічно з (Д.36) знаходимо компоненти $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ і $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}}(kr) r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
 \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) r^2 dr \times \\
 &\quad \times \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}-1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega - \\
 &\quad - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) r^2 dr \times \\
 &\quad \times \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}+1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{E.36}$$

Увівши нові позначення для інтегралів:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}(l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r) R_f^*(l, r) j_n(kr) r^2 dr, \\
 \tilde{I}(l_f, l_{\text{ph}}, n, \mu) &= \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega,
 \end{aligned} \tag{E.37}$$

перепишемо (Е.36) так:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \tilde{I}(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu) \cdot \tilde{J}(l_f, l_{\text{ph}}), \\
 \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} \tilde{I}(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_f, l_{\text{ph}} - 1) - \\
 &\quad - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} \tilde{I}(l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_f, l_{\text{ph}} + 1).
 \end{aligned} \tag{E.38}$$

Е.2.2. Розрахунок компонентів $p_{l_{\text{ph}}\mu}^M$, $p_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ і $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$, $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$: випадок $l_i \neq 0$

Тепер розглянемо випадок, коли ядро при розпаді у початковому стані має $l_i \neq 0$. Використовуючи градієнтну формулу, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ R_i(r) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} + \frac{l_i + 1}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i - 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \\ &- \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i + 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i). \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

За допомогою цієї формули магнітна компонента $p_{l_{\mu}}^M$ з (Д.38) перетворюється до вигляду:

$$\begin{aligned} p_{l_{\mu}}^M &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 R_f^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} + \frac{l_i + 1}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i - 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i + 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} j_{l_{\text{ph}}}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}). \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Для електричної компоненти $p_{l_{\text{ph}}\mu}^E$ з (Д.38) одержимо

$$\begin{aligned} p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 R_f^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} + \frac{l_i + 1}{r} R_i(r) \right) \times \right. \\ &\times \mathbf{T}_{l_i l_i - 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \left. \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} \left(\frac{dr_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r} R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i + 1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \right\} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{l_{\text{ph}} + 1}{2l_{\text{ph}} + 1}} j_{l_{\text{ph}} - 1}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}} - 1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) - \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}} + 1}} j_{l_{\text{ph}} + 1}(kr) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}} + 1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

Уведемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \frac{dR_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_n(kr) r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r, l_i) R_f^*(l_f, r) j_n(kr) r dr, \\
I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, \mu) &= \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\
I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_1, l_2, \mu) &= \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_2, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{E.42}$$

Тоді вирази (E.40) і (E.41) можна записати так:

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}, \mu}^M &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i + 1}} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{l_i + 1}{2l_i + 1}} I_M(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\},
\end{aligned} \tag{E.43}$$

$$\begin{aligned}
p_{l_{\text{ph}}, \mu}^E &= \sqrt{\frac{1}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} \left\{ \sqrt{l_i(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \times \right. \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{l_i l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) + (l_i + 1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} + \\
&+ \sqrt{(l_i + 1)(l_{\text{ph}} + 1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{(l_i + 1) l_{\text{ph}}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \times \\
&\times \left. \left\{ J_1(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.44}$$

Аналогічно знаходимо компоненти $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M$ і $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E$:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}}(kr) r^2 dr \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega, \\ \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}-1}(kr) r^2 dr \times \\ &\times \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}-1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega - \\ &- \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} \int_0^{+\infty} R_f^*(r) R_i(r) j_{l_{\text{ph}}+1}(kr) r^2 dr \times \\ &\times \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} l_{\text{ph}}+1, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega.\end{aligned}\tag{E.45}$$

Увівши позначення для інтегралів:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r) R_f^*(l, r) j_n(kr) r^2 dr, \\ \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, n, \mu) &= \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{l_{\text{ph}} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{\text{ph}}) d\Omega,\end{aligned}\tag{E.46}$$

перепишемо (E.45) так:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}), \\ \tilde{p}_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}+1}{2l_{\text{ph}}+1}} \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}-1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}-1) - \\ &- \sqrt{\frac{l_{\text{ph}}}{2l_{\text{ph}}+1}} \tilde{I}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_{\text{ph}}+1, \mu) \cdot \tilde{J}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}+1).\end{aligned}\tag{E.47}$$

Враховуючи логіку вище, отримаємо також наступні вирази для матричних елементів $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}, \mu}^{M m_i m_f}$ та $\tilde{p}_{l_{\text{ph}}, \mu}^{E m_i m_f}$, що використовуються у Розділі 6:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{l_{\text{ph}}, \mu}^{M m_i m_f} &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} I_M^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i-1, \mu) \times \\ &\times \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) + (l_i+1) J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\} - \\ &- \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} I_M^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i+1, \mu) \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) - l_i J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}}) \right\},\end{aligned}\tag{E.48}$$

$$\begin{aligned}
\check{P}_{l_{\text{ph}}, \mu}^{Em_i m_f} &= \sqrt{\frac{l_i (l_{\text{ph}} + 1)}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} I_E^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) + (l_i + 1) J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{l_i l_{\text{ph}}}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} I_E^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i - 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) + (l_i + 1) J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\} + \\
&+ \sqrt{\frac{(l_i + 1)(l_{\text{ph}} + 1)}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} I_E^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} - 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) - l_i J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}} - 1) \right\} - \\
&- \sqrt{\frac{(l_i + 1) l_{\text{ph}}}{(2l_i + 1)(2l_{\text{ph}} + 1)}} I_E^{(m_i m_f)}(l_i, l_f, l_{\text{ph}}, l_i + 1, l_{\text{ph}} + 1, \mu) \times \\
&\times \left\{ J_3(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) - l_i J_4(l_i, l_f, l_{\text{ph}} + 1) \right\},
\end{aligned} \tag{E.49}$$

де

$$\begin{aligned}
J_3(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \frac{dR_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_n(k_{\text{ph}} r) Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, r) r^2 dr, \\
J_4(l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r, l_i) R_f^*(l_f, r) j_n(k_{\text{ph}} r) Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, r) r dr.
\end{aligned} \tag{E.50}$$

Виходячи з фізичного змісту векторів \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_r^f і \mathbf{n}_{ph} , ми одержуємо наступне співвідношення між ними

$$\mathbf{n}_{\text{ph}} = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f = \mathbf{n}_r. \tag{E.51}$$

При обраній раніше орієнтації системи координат, її вісь z співнаправлена з вектором випромінювання фотона \mathbf{k} . Тому кут θ (обумовлений вектором \mathbf{n}_r) саме й виявляється визначеним між напрямками руху протона (з врахуванням тунелювання) і напрямком випромінювання фотона. Використовуючи співвідношення (E.51), далі ми обчислюємо кутові інтеграли.

Е.3. Форм-фактор ядра без зміщення нуклонів

Е.3.1. Форм-фактор системи, що складається з нуклонів

Розглянемо електричний форм-фактор системи нуклонів з числом A (у цьому підрозділі ми будемо опускати нижнього індекса A для змінних, що позначає приналежність нуклонів до ядра):

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(1 \dots A) \left| \sum_{s=1}^A Z_s \frac{m_p}{m_s} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \right| \psi_{\text{nucl},i}(1 \dots A) \right\rangle. \quad (\text{E.52})$$

Для розрахунків потрібно знати хвильові функції ядра перед випромінюванням фотона та після випромінювання (що відповідають незбуреному гамільтоніану). Визначемо такі функції за формулою (6.11), де однонуклонні функції представляються у вигляді множення просторової та спін-ізоспінової функцій, як $\psi_{\lambda_s}(s) = \varphi_{\lambda_s}(\boldsymbol{\rho}_s) \left| \sigma^{(s)} \tau^{(s)} \right\rangle$, де λ_s означає номер стану нуклона з номером s . Будемо полягати, що просторова функція нуклона у кожному стані нормована, тобто

$$\int |\varphi_{\lambda}(\boldsymbol{\rho}_s)|^2 d\boldsymbol{\rho}_s = 1. \quad (\text{E.53})$$

Розрахуємо матричний елемент (E.52):

$$\begin{aligned} Z_A(\mathbf{k}) &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1, k \neq i}^A \sum_{m=1, m \neq k}^A \left\{ \left\langle \psi_k(i) \left| \frac{Z_i m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \right| \psi_k(i) \right\rangle \langle \psi_m(j) | \psi_m(j) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \psi_k(i) \left| \frac{Z_i m_p}{m_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \right| \psi_m(i) \right\rangle \langle \psi_m(j) | \psi_k(j) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

Враховуючи ортогональність однонуклонних функцій (тобто $\langle \psi_k(j) | \psi_m(j) \rangle = \delta_{mk}$), отримаємо

$$Z_A(\mathbf{k}) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^A \left\langle \psi_k(i) \left| \frac{Z_k m_p}{m_k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \right| \psi_k(i) \right\rangle. \quad (\text{E.55})$$

Враховуючи нульовий електричний заряд нейтрона, виконуємо сумування у формулі (E.55) за спін-ізоспіновими станами. Для парно-парних ядер отри-

маємо:

$$Z_A(\mathbf{k}) = \frac{2}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \varphi_k(\boldsymbol{\rho}_i) | e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_i} | \varphi_k(\boldsymbol{\rho}_i) \rangle, \quad (\text{E.56})$$

де B — число станів просторової функції нуклона. У наближенні легких ядер отримаємо $B = A/4$.

Визначимо просторову функцію одного нуклона у вигляді гаусіана як

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = N_x N_y N_z \exp\left\{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right]\right\} H_{n_x}\left(\frac{x}{a}\right) H_{n_y}\left(\frac{y}{b}\right) H_{n_z}\left(\frac{z}{c}\right), \quad (\text{E.57})$$

де H_{n_x} , H_{n_y} та H_{n_z} — поліноми Ерміта, N_x , N_y , N_z — нормовані коефіцієнти.

Невідомі коефіцієнти розраховуються з умов нормування:

$$\int \left| N_s \exp\left\{-\frac{s^2}{2a_s^2}\right\} H_{n_s}\left(\frac{s}{a_s}\right) \right|^2 ds = 1, \quad (\text{E.58})$$

де $s = x, y, z$. Враховуючи властивості поліномів Ерміта (див. книгу [43], стор. 749), ми отримаємо

$$N_x = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a} 2^{n_x} n_x!}, \quad N_y = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{b} 2^{n_y} n_y!}, \quad N_z = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{c} 2^{n_z} n_z!}. \quad (\text{E.59})$$

Е.3.2. Розрахунки форм-фактора ядра

Підставляючи одностанову просторову функцію (Е.57) у (Е.56), ми знаходимо форм-фактор ядра:

$$Z_A(\mathbf{k}) = \frac{2}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{n_x, n_y, n_z}^B I_x(n_x) I_y(n_y) I_z(n_z), \quad (\text{E.60})$$

де

$$I_x = N_x^2 \exp\{-a^2 k_x^2/4\} \int \exp\left\{-\frac{(x_i + i a^2 k_x/2)^2}{a^2}\right\} H_{n_x}^2\left(\frac{x_i}{a}\right) dx_i \quad (\text{E.61})$$

та рішення для $I_y(n_y)$ і $I_z(n_z)$ отримані після заміни індексів $x \rightarrow y$ та $x \rightarrow z$.

Для основного стану ($n_x = n_y = n_z = 0$, наприклад для α -частинки) ми

маємо $H_{n_x=0} = 1$, $H_{n_y=0} = 1$, $H_{n_z=0} = 1$. У наближенні, інтеграл у (Е.61) за

комплексною змінною $\tilde{x} = x_i + i a^2 k_x/2$ має рішення:

$$\int \exp\left\{-\frac{(x_i + i a^2 k_x/2)^2}{a^2}\right\} dx_i = \int \exp\left\{-\frac{x_i^2}{a^2}\right\} dx_i = N_x^{-2} \quad (\text{E.62})$$

та ми отримаємо

$$I_x(n_x = 0) = \exp\{-a^2 k_x^2/4\}. \quad (\text{E.63})$$

При знаходженні форм-фактора ядра необхідно врахувати збудженні стани з ненульовими однонуклонними просторовими функціями. Знайдемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} H_n^2(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} n! L_n(-2y^2), \quad (\text{E.64})$$

де $L_n = L_n^0$ — поліном Родрігеса (Rodrigues polynomial), що визначається за формулою Родрігеса

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k. \quad (\text{E.65})$$

Але для комп'ютерних розрахунків більш зручним є рекуррентне співвідношення

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} \left[(2k+1-x) L_k(x) - k L_{k-1}(x) \right] \quad \text{при } k \geq 1, \quad (\text{E.66})$$

де перші поліноми дорівнюють

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x. \quad (\text{E.67})$$

Використовуючи формули (E.64) та (E.65), нормоване рішення (E.59) для фактора N_x , знаходимо інтеграл (E.61)

$$I_x = L_{n_x} \left[a^2 k_x^2/2 \right] \exp\{-a^2 k_x^2/4\} \quad (\text{E.68})$$

та розраховуємо форм-фактор

$$Z_A(\mathbf{k}) = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2)/4} f_1(\mathbf{k}, n_1 \dots n_A), \quad (\text{E.69})$$

де

$$f_1(\mathbf{k}, n_1 \dots n_A) = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{n_x+n_y+n_z \leq N} L_{n_x} \left[a^2 k_x^2/2 \right] L_{n_y} \left[b^2 k_y^2/2 \right] L_{n_z} \left[c^2 k_z^2/2 \right]. \quad (\text{E.70})$$

У цій формулі виконується сумування за всіма станами одноступінних просторових функцій. Ми виконуємо умову, що форм-фактор прямує до електричного заряду ядра при прямуванні енергії фотона до нуля:

$$Z_A(\mathbf{k}) \rightarrow Z_A \quad \text{при } k \rightarrow 0. \quad (\text{E.71})$$

Е.4. Випромінювання, яке формується за рахунок відносних зміщень нуклонів у ядрі

Знайдемо більш акуратне наближення до ефективного заряду (Е.10), ніж (Е.11). Тут врахуємо параметри випроміненого фотона. Перепишемо ефективний заряд (Е.10) як

$$Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{m_A \tilde{Z}_p(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - m_p \tilde{Z}_A(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{m_A + m_p}, \quad (\text{E.72})$$

де ми включили *розширені форм-фактори протона та ядра* як

$$\tilde{Z}_p(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = z_p \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \frac{m_p}{m_A + m_p}} - 1 \right), \quad \tilde{Z}_A(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \frac{m_A + 2m_p}{m_A + m_p}} Z_A(\mathbf{k}) - Z_A. \quad (\text{E.73})$$

У розрахунках матричного елемента (Е.9) дві експоненти у форм-факторах $\tilde{Z}_p(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ та $\tilde{Z}_A(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ домножуються на експоненційний фактор $\exp\{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}$ від векторного потенціалу електромагнітного поля, та така формула потім розкладається за мультиполями. Однак, такий шлях вимагає розрахунків більших за значеннями радіальних інтегралів ніж мають, наприклад, матричні елементи (Е.12). Тому ми введемо наближення, що пов'язано з ефективним зарядом. Ми застосуємо розкладання за сферичними функціями Бесселя $j_l(kr)$ та отримаємо

$$Z_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l + 1) P_l(\cos \beta) Z_{\text{eff},l}^{(2)}(\mathbf{k}, r) - Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)}, \quad (\text{E.74})$$

де введені *парціальні компоненти ефективного заряду* у вигляді

$$Z_{\text{eff},1}^{(2)}(\mathbf{k}, r) = \frac{m_A z_p}{m_A + m_p} j_l\left(\frac{m_p}{m_A + m_p} kr\right) - \frac{m_p Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_p} j_l\left(\frac{m_A + 2m_p}{m_A + m_p} kr\right) \quad (\text{E.75})$$

та β — кут між векторами \mathbf{k} та \mathbf{r} . З цієї формули можна бачити, що на однакових відстанях (за змінною r) перший доданок є домінуючим при інтегруванні матричного елемента, але на далеких відстанях другий доданок (який зменшується більш повільно) дає більш великий внесок у повний спектр. Такий ефективний заряд змінює форму спектра гальмівного випромінювання, оскільки він змінює залежність матричного елемента від енергії фотона.

Тепер ми проаналізуємо випромінювання фотонів, що визначається третім матричним елементом за формулою (6.13). Виконуючи інтегрування за просторовою змінною \mathbf{R} , імпульсом \mathbf{K} , отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_3 &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\ &\times \left\langle \bar{\Psi}_f \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \left[\sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right] \right| \bar{\Psi}_i \right\rangle, \quad (\text{E.76}) \\ \mathbf{K}_i &= \mathbf{K}_f + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Використовуючи у якості функцій $\Psi_{\text{p-nucl},s}(\mathbf{r})$ пакети (E.7), ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_3 &= \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} p_{fi,3} 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \\ p_{fi,3} &= -m \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \left\langle \psi_{\text{p-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} \right| \psi_{\text{p-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle \cdot \mathbf{D}_A(\mathbf{k}), \quad (\text{E.77}) \end{aligned}$$

де

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \left| \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle. \quad (\text{E.78})$$

Виконуючи розкладання:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_p}{m_A + m_p} = e^{i kr \cos \beta} \frac{m_p}{m_A + m_p} = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l + 1) P_l(\cos \beta) j_l\left(\frac{m_p}{m_A + m_p} kr\right), \quad (\text{E.79})$$

ми перепишемо матричний елемент як

$$p_{fi,3} = -\mu \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l + 1) P_l(\cos \beta) M_l(k) \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \cdot \mathbf{D}_A(\mathbf{k}), \quad (\text{E.80})$$

де ми ввели парціальний нуклонний матричний елемент

$$M_l(k) = \left\langle \psi_{p\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| j_l\left(\frac{m_p}{m_A + m_p} kr\right) \right| \psi_{p\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle. \quad (\text{E.81})$$

Враховуючи кулонівське калібрування та рішення (E.90) для функції $\mathbf{D}_A(\mathbf{k})$, що приведене у Додатку E.5, ми доходимо до висновку, що матричний елемент (E.80) та останній матричний елемент у (6.13) дорівнюють нулю.

E.5. Матричний елемент за імпульсами нуклонів ядра

Розрахуємо матричний елемент (E.17), який визначається на основі операторів імпульсів нуклонів ядра:

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \left| \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle. \quad (\text{E.82})$$

Підставляючи багатонуклонну хвильову функцію (6.11), ми знаходимо матричний елемент подібно до розрахунків (E.54)–(E.56):

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^A \left\langle \psi_k(i) \left| \frac{z_k m_p}{m_k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_i} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right| \psi_k(i) \right\rangle. \quad (\text{E.83})$$

Сумування у цьому виразі виконуємо за спін-ізоспінними станами. А саме, для парно-парних ядер ми отримаємо:

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \frac{2}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \varphi_k(\boldsymbol{\rho}_i) | e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}_i} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} | \varphi_k(\boldsymbol{\rho}_i) \rangle. \quad (\text{E.84})$$

Підставимо одноклонну просторову функцію (E.57) у матричний елемент та отримаємо:

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \frac{2}{A} \sum_{i=1}^A \sum_{n_x, n_y, n_z}^B \left(\mathbf{e}_x J_x(n_x) + \mathbf{e}_y J_y(n_y) + \mathbf{e}_z J_z(n_z) \right), \quad (\text{E.85})$$

де \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y та \mathbf{e}_z — ортогональні одиничні вектори, $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}^{(2)}$. Ми ввели розділення на координатні компоненти $J_x(n_x)$, $J_y(n_y)$, $J_z(n_z)$. Розглянемо перший інтеграл:

$$\begin{aligned} J_x(n_x) &= -i \hbar N_x^2 \int \exp \left\{ -\frac{(x_i)^2}{2a^2} \right\} H_{n_x} \left(\frac{x_i}{a} \right) e^{-ik_x x_i} \times \\ &\times \left(\mathbf{e}_x \frac{d}{dx_{Ai}} \right) \left[\exp \left\{ -\frac{(x_i)^2}{2a^2} \right\} H_{n_x} \left(\frac{x_i}{a} \right) \right] dx_i \times \\ &\times N_y^2 \int \exp \left\{ -\frac{(y_i)^2}{b^2} \right\} H_{n_y}^2 \left(\frac{y_i}{b} \right) e^{-ik_y y_i} dy_i \times \\ &\times N_z^2 \int \exp \left\{ -\frac{(z_i)^2}{c^2} \right\} H_{n_z}^2 \left(\frac{z_i}{c} \right) e^{-ik_z z_i} dz_i. \end{aligned} \quad (\text{E.86})$$

Тут останні два інтеграли представляють собою знайдені функції $I_y(n_y, b)$ та $I_z(n_z, c)$. Ми інтегруємо за змінною x :

$$\begin{aligned} J_x(n_x) &= \mathbf{e}_x i \hbar N_x^2 \int \frac{d}{dx_{Ai}} \left\{ \exp \left\{ -\frac{(x_i)^2}{2a^2} \right\} H_{n_x} \left(\frac{x_i}{a} \right) \right\} \times \\ &\times e^{-ik_x x_i} \exp \left\{ -\frac{(x_i)^2}{2a^2} \right\} H_{n_x} \left(\frac{x_i}{a} \right) dx_i I_y(n_y, b) I_z(n_z, c) + \\ &+ \mathbf{e}_x (-i k_x) i \hbar N_x^2 \int \exp \left\{ -\frac{(x_i)^2}{a^2} \right\} e^{-ik_x x_i} H_{n_x}^2 \left(\frac{x_i}{a} \right) dx_i I_y(n_y, b) I_z(n_z, c). \end{aligned} \quad (\text{E.87})$$

Можна бачити, що інтеграл за змінною x у першому доданку пов'язаний з визначенням для $J_x(n_x)$, та інтеграл за змінною x у другому доданку — з визначенням для $I_x(n_x, a)$:

$$J_x(n_x) = -J_x(n_x) + \mathbf{e}_x \hbar k_x I_x(n_x, a) I_y(n_y, b) I_z(n_z, c) \quad (\text{E.88})$$

та ми отримаємо

$$J_x(n_x) = \mathbf{e}_x \frac{\hbar k_x}{2} I_x(n_x, a) I_y(n_y, b) I_z(n_z, c). \quad (\text{E.89})$$

Ми розрахуємо функції $\mathbf{D}_A(\mathbf{k})$ та отримаємо:

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{k}) = \frac{\hbar}{2} \mathbf{k} Z_A(\mathbf{k}). \quad (\text{E.90})$$

При прямуванні енергії фотона до нуля (при $k \rightarrow 0$) матричний елемент \mathbf{D}_A прямує до нуля також.

ДОДАТОК Ж
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ АЛЬФА-РОЗПАДІ

Ж.1. Форм-фактор ядра зі зміщеннями нуклонів

У цьому Додатку ми розглянемо форм-фактор (7.10) системи A нуклонів [див. стор. 176]. Відповідно до формалізму Додатку Е.3, для парно-парних ядер маємо форм-фактор у вигляді (Е.69)–(Е.70) [див. стор. 487]. Але на відміну до Додатку Е.3, тепер ми виберемо просторову функцію одного нуклона у формі гаусіану, з врахуванням (7.12)–(7.13) [див. стор.177].

Ж.1.1. Форм-фактор α -частинки

Підставляючи таку форму просторової одно-нуклонної функції у формулу (Е.55), ми знаходимо форм-фактор α -частинки:

$$Z_{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 I_x(n_x) I_y(n_y) I_z(n_z), \quad (\text{Ж.1})$$

де

$$I_x(n_x, x_{i,0}, a) = N_{\alpha,x}^2 \int e^{-\frac{(x_i - x_{i,0})^2}{a^2}} e^{-i k_x x_i} H_{n_x}^2 \left(\frac{x_i - x_{i,0}}{a} \right) dx_i \quad (\text{Ж.2})$$

та відповідні розв'язки для $I_y(n_y)$ і $I_z(n_z)$ отримуються після заміни індексів $x \rightarrow y$ та $x \rightarrow z$. Після розрахунків отримаємо:

$$I_x = N_{\alpha,x}^2 \exp\{-a^2 k_x^2/4 - i k_x x_{i,0}\} \times \\ \times \int \exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i,0} + i a^2 k_x/2)^2}{a^2}\right\} H_{n_x}^2 \left(\frac{x_i - x_{i,0}}{a} \right) dx_i. \quad (\text{Ж.3})$$

Нуклони α -частинка знаходяться у основному стані ($n_x = n_y = n_z = 0$), тобто ми маємо $H_{n_x=0} = 1$, $H_{n_y=0} = 1$, $H_{n_z=0} = 1$. У наближенні, інтеграл

(Ж.3) за комплексною змінною $\tilde{x} = x_i - \rho_{i,x} + i a^2 k_x / 2$ приймає вигляд:

$$\int \exp\left\{-\frac{(x_i - \rho_{i,x} + i a^2 k_x / 2)^2}{a^2}\right\} dx_i = \int \exp\left\{-\frac{x_i^2}{a^2}\right\} dx_i = N_{\alpha,x}^{-2} \quad (\text{Ж.4})$$

та ми отримуємо

$$I_{\alpha,x}(n_x = 0) = \exp\left\{-a^2 k_x^2 / 4 - i k_x x_{i,0}\right\} \quad (\text{Ж.5})$$

та розраховуємо форм-фактор (Ж.1)

$$Z_{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4} \sum_{i=1}^4 e^{-i \mathbf{k} \boldsymbol{\rho}_{i,0}}. \quad (\text{Ж.6})$$

У наближенні точкової α -частинки (тобто коли найбільш ймовірні положення нуклонів α -частинки знаходяться у центрі мас α -частинки, $\boldsymbol{\rho}_{0,i} = 0$) ми отримуємо:

$$Z_{\alpha}(\mathbf{k}; \boldsymbol{\rho}_{i,0} \rightarrow 0) = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4}. \quad (\text{Ж.7})$$

Можна бачити, що зарядовий форм-фактор залежить від енергії випроміненого фотона, напрямку його випромінювання та параметрів хвильової функції нуклона. Щоб уникнути невизначення форм-фактору, ми накладемо наступну умову: *форм-фактор α -частинки при її точковому наближенні повинен відповідати її електричному заряду Z_{α}* , а саме

$$2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4} \equiv Z_{\alpha}. \quad (\text{Ж.8})$$

За такої умови ми отримуємо:

$$Z_{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{Z_{\alpha}}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 e^{-i \mathbf{k} \boldsymbol{\rho}_{i,0}}. \quad (\text{Ж.9})$$

Якщо фотон не випромінюється нуклоном α -частинки, то $|k| = 0$ та виконується властивість (Ж.8). Однак, якщо фотон випромінюється саме тим нуклоном, то експонента подавляє форм-фактор α -частинки. Такий ефект виникає після врахування внутрішньої нуклонної структури α -частинки.

a , b та c визначають просторові розміри локалізації хвильової функції, тобто квадрат модуля якої описує найбільш ймовірне положення кожного нуклона у α -частинці. Зідси зробимо висновки: (1) чим більше такі параметри,

тим сильніше випромінений фотон подавлює електричний заряд α -частинки; (2) чим менше параметри a , b та c , тим експоненційний фактор хвильової функції виявляється по формі ближчим до δ -функції, та випромінювання фотона перестає впливати на заряд α -частинки. Згідно до наших оцінок, для α -частинки при енергіях фотонів нижче ніж 10 МеВ, заряд не змінюється істотно. Однак, ці властивості практично дуже слабкі для більш високих енергій (біля 100 МеВ та вище) або для важких ядер.

Ж.1.2. Форм-фактор ядра

При визначенні форм-фактора ядра ми повинні врахувати збуджені стани однонуклонної просторової хвильової функції. При знаходженні інтегралу $I_x(n_x \neq 0)$ можна застосувати формули сумування поліномів Ерміта:

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2)^{\mu/2}}{\mu!} H_\mu\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right) = \sum_{m_1+m_2=\mu} \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{m_1! m_2!} H_{m_1}(x_1) H_{m_2}(x_2), \quad (\text{Ж.10})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_n^{n-m}(-2y^2)$$

при $m \leq n$ та де L_n^{n-m} — узагальнений поліном Лагерра (Laguerre polynomial). При $n = m$ отримуємо (Е.64) з поліномами Родрігеса [див. стор. 487]. За такою формулою знаходимо інтеграл (Ж.3) для довільного стану:

$$I_x = L_{n_x} [a^2 k_x^2 / 2] \cdot \exp\{-a^2 k_x^2 / 4 - i k_x \rho_{i,x}\} \quad (\text{Ж.11})$$

та розраховуємо форм-фактор ядра:

$$Z_d(\mathbf{k}) = 2 e^{-(a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) / 4} f_1(\mathbf{k}, n_1 \cdots n_{A_d}) f_2(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}), \quad (\text{Ж.12})$$

де f_1 визначається за формулою (Е.70) [див. стор. 487] та

$$f_2(\mathbf{k}, \rho_1 \cdots \rho_{A_d}) = \frac{1}{A_d} \sum_{i=1}^{A_d} e^{-i \mathbf{k} \rho_i}. \quad (\text{Ж.13})$$

Тут функція f_2 описує коррекцію просторового розподілу нуклонів у ядрі.

Ж.2. Гальмівне випромінювання фотонів у реакціях захоплення протонів ядрами у зірках

Реакції протонного захоплення при низьких енергіях грають важливу роль у нуклеосинтезі у зірках. p -Процес, що включає протонне захоплення, зарядовий обмін та фотодісінтеграцію (photodisintegration, фотоядерні реакції), є важливим при формуванні так званих p -ядер, які мають достатньо короткий час життя та багато з таких ядер не можливо отримати у земних умовах. Таким чином, експериментальні дослідження властивостей таких ядер є дійсно складними, але це стимулює дослідників на інтенсивні теоретичні пошуки [227, 228, 229, 230, 231]. Загалом, зараз відомо близь 2000 p -ядер та біля 20 000 реакцій і розпадів, які пов'язані з такими ядрами (наприклад, див. книгу [232] та огляди [233, 234, 235]).

Зосередимо увагу на протонно багатих ізотопах (proton rich isotopes) біля лінії $N = Z$. На Рис. Ж.1 представлено нові розрахунки для ймовірностей випромінювання гальмівних фотонів, яке супроводжує захоплення протонів ядрами з формуванням ізотопів телуру у реакції $^{121}\text{Sb} + p = ^{122}\text{Te}$ [231] для різних енергій протонів¹. Можна бачити, що для енергій протонів, мень-

¹У розрахунках використано потенціал взаємодії між протоном та ядром, визначений за формулами (26)–(27) з параметрами, отриманими за формулами (28)–(29) у роботі [64], параметризація взята з роботи [148]. Хвильові функції $\varphi_i(\mathbf{r})$ та $\varphi_f(\mathbf{r})$ обчислюються чисельно відповідно до такого потенціалу. Виявляється, що складно досягти збіжності у розрахунках спектрів випромінювання у мультипольному підході для досліджуємої реакції. Саме по цій причині, та з метою отримати перші оцінки спектрів для різних енергій налітаючого протона, ми застосували дипольне наближення (див. роботу [42]) для розрахунків матричного елемента у (7.20), адаптованого для процесу захоплення протонів ядрами. Однак, як ми оцінюємо, дипольне наближення дає спектри випромінювання, які суттєво зсунуті уздовж вісі ймовірності гальмівного випромінювання, та тому такі спектри потім необхідно перенормувати. Таким чином, ми визначаємо фактор нормування з відношення між спектрами, отриманими у мультипольному та дипольному наближеннях, для енергії налітаючого протона 3 MeV (відповідно до наших оцінок, цей фактор дорівнює $7.5 \times 10^{+24}$). Потім ми використовуємо однаковий фактор нормування для визначення спектрів, розрахованих у дипольному наближенні для кожної енергії налітаючого протона. Раніше наші розрахунки спектрів гальмівного випромінювання у мультипольному підході без нормування для α -розпаду було протестовано та виявилось, що вони у гарній згоді з експериментальними даними (див. роботу [61]). Тому ми використовуємо мультипольний підхід для нормування спектрів. В аналізі ми розглядаємо протон, що

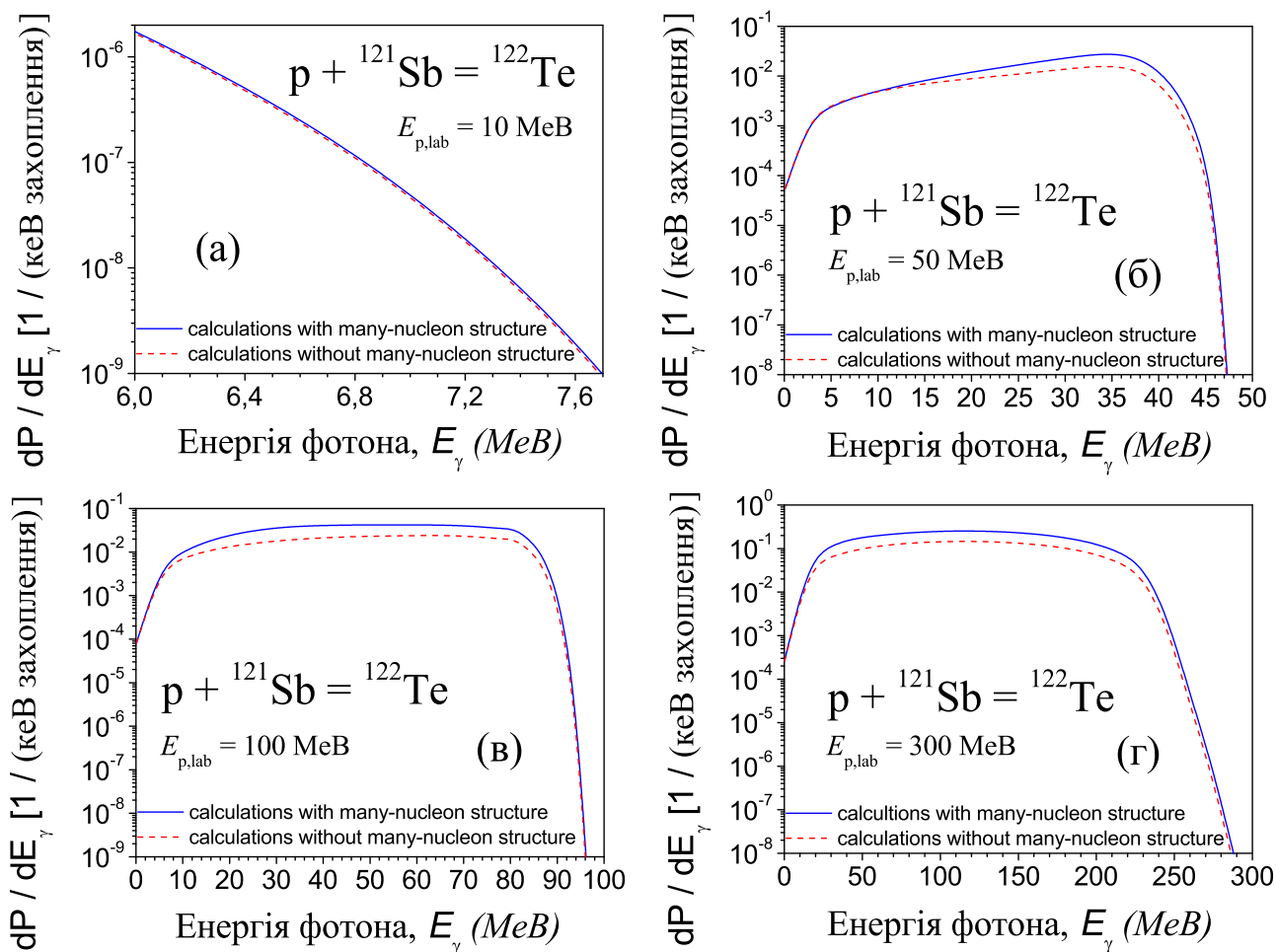


Рис.Ж.1 Ймовірності гальмівного випромінювання фотонів при захопленні протона ядром ${}^{121}\text{Sb}$ при енергії розсіяного протона 10 MeV (а), 50 MeV (б), 100 MeV (в) та 300 MeV (г) у лабораторній системі відліку [у розрахунках використано $\rho_{i,0} = 1.7$ фм для α -частинки та $\theta_f = 90^\circ$, θ_f — кут між напрямком руху α -частинки (або її тунелювання) після випромінювання фотона та напрямком випромінювання фотона]. Тут суцільна синя лінія — це розрахунки з включенням багатонуклонної структури, штрихова червона лінія — розрахунки без включення багатонуклонної структури. Можна бачити, що спектр для ядра після включення багатонуклонної структури у розрахунки для кожної енергії розсіяного протона розташований вище у порівнянні зі спектром, отриманим без включення такої структури. З рисунків можна оцінити, наскільки ймовірність гальмівного випромінювання (для однакової енергії фотона) зростає при зростанні енергії налітаючого протона. На рисунках можна бачити, що ймовірності випромінювання жорстких фотонів у кінематичному наближенні (що визначається через енергію налітаючого протона) прямує до нуля.

ших ніж 4 MeV (саме такі енергії протонів раніше було використано у експериментальних та теоретичних дослідженнях такої реакції [231]), ефект включення багатонуклонної структури практично непомітний. Однак, при зростанні енергії протонів, починаючи від 50 MeV, такий ефект дійсно спостерігається та ймовірності гальмівного випромінювання суттєво зростають.

налігає на ядро у стані $s_{1/2}$ перед випромінюванням фотона та у стані $p_{1/2}$ після випромінювання фотона (тому що протон-ядерний потенціал уключає спіно-орбітальний доданок, визначений на основі квантових чисел j та l).

ДОДАТОК 3
РОЗРАХУНКИ МАТРИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА
ВИПРОМІНЮВАННЯ ФОТОНІВ У ПІОН-ЯДЕРНОМУ
РОЗСІЯННІ

3.1. Оператор випромінювання багато-нуклонної системи та π^\pm -мезона

Випромінювання гальмівних фотонів може бути введено у формалізм розсіяння π^\pm -мезонів на ядрах за допомогою застосування кулонівського калібру для кожного електромагнітного заряду у системі як

$$\hat{\mathbf{p}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_i - \frac{z_i e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t), \quad (3.1)$$

де $\hat{\mathbf{p}}_i = -i\hbar \nabla_i$ — імпульс піона або нуклона з номером i , $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$ — векторний потенціал електромагнітного поля, що формується за руху піона або нуклона з номером i , z_i — електричний заряд піона або нуклона з номером i . Модифікований гамільтоніан записується як $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\gamma$, де \hat{H}_γ — нова корекція, що описує випромінювання гальмівних фотонів.

Почнемо з узагальнення рівняння Паулі на систему, що складається з A нуклонів та π^\pm -мезона, на опис розсіяння π^\pm на ядрі з A нуклонами з гамільтоніаном, побудованим як (див. формули (1)–(2) у роботі [66], також див. роботу [65] для протон-ядерного розсіяння)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{i=1}^{A+1} \left\{ \frac{1}{2m_i} \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{z_i e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 - \frac{z_i e \hbar}{2m_i c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot} \mathbf{A}_i + z_i e A_{i,0} \right\} + \\ &+ V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_\gamma, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \sum_{i=1}^{A+1} \frac{1}{2m_i} \hat{\mathbf{p}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1}), \\ \hat{H}_\gamma &= \sum_{i=1}^{A+1} \left\{ -\frac{z_i e}{m_i c} \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{A}_i + \frac{z_i^2 e^2}{2m_i c^2} \mathbf{A}_i^2 - \frac{z_i e \hbar}{2m_i c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{rot} \mathbf{A}_i + z_i e A_{i,0} \right\}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Тут m_i та z_i — маса та електричний заряд нуклона з номером i ($i=1 \dots A$) або маса та електричний заряд π^\pm -мезона ($i = A + 1$), $\hat{\mathbf{p}}_i = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{dr}_i$ — оператор імпульсу нуклона з номером i ($i=1 \dots A$) або π^\pm -мезона ($i = A + 1$), $V(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{A+1})$ — загальний вигляд для потенціалу взаємодії між нуклонами та π^\pm -мезоном, $\boldsymbol{\sigma}$ — матриці Паулі, $A_i = (\mathbf{A}_i, A_{i,0})$ — потенціал електромагнітного поля, що формується нуклоном з номером i ($i=1 \dots A$) або π^\pm -мезоном ($i = A + 1$). Увівши координати центру мас ядра $\mathbf{R}_A = \sum_{j=1}^A m_j \mathbf{r}_{Aj}/m_A$, координати центру мас повної системи $\mathbf{R} = (m_A \mathbf{R}_A + m_\pi \mathbf{r}_\pi)/(m_A + m_\pi)$, відносні координати $\boldsymbol{\rho}_{Aj} = \mathbf{r}_j - \mathbf{R}_A$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\pi - \mathbf{R}_A$, ми отримуємо нові незалежні змінні \mathbf{R} , \mathbf{r} та $\boldsymbol{\rho}_{Aj}$ ($j = 1 \dots A - 1$)¹

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{1}{m_A + m_\pi} \left\{ \sum_{j=1}^A m_{Aj} \mathbf{r}_{Aj} + m_\pi \mathbf{r}_\pi \right\}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_\pi - \frac{1}{m_A} \sum_{j=1}^A m_{Aj} \mathbf{r}_{Aj}, \\ \boldsymbol{\rho}_{Aj} &= \mathbf{r}_{Aj} - \frac{1}{m_A} \sum_{k=1}^A m_{Ak} \mathbf{r}_{Ak},\end{aligned}\quad (3.4)$$

та знаходимо оператори відповідних імпульсів

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_\pi &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dr}_\pi} = \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}, \\ \hat{\mathbf{p}}_{Aj} &= -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dr}_{Aj}} = \frac{m_{Aj}}{m_A + m_\pi} \hat{\mathbf{p}} - \frac{m_{Aj}}{m_A} \hat{\mathbf{p}} + \frac{m_A - m_{Aj}}{m_A} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} - \frac{m_{Aj}}{m_A} \sum_{k=1, k \neq j}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak},\end{aligned}\quad (3.5)$$

де $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{dR}$, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{dr}$, $\tilde{\mathbf{p}}_{Aj} = -i\hbar \mathbf{d}/\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}_{Aj}$, m_π та m_A — маси π^\pm -мезона та ядра.

¹Інколи ми будемо додавати додаткового нижнього індекса A до змінних нуклонів.

Розглянемо лідоуючий оператор випромінювання системи, що складається з π^\pm -мезона та ядра у лабораторній системі відліку. Отримаємо його вигляд з формули (3.3), нехтую доданками при \mathbf{A}_i^2 , $A_{i,0}$ та спірним доданком:

$$\hat{H}_\gamma = -\frac{z_\pi e}{m_\pi c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\pi, t) \hat{\mathbf{p}}_\pi - \sum_{j=1}^A \frac{z_j e}{m_j c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \hat{\mathbf{p}}_j. \quad (3.6)$$

Тут $\mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t)$ описує випромінювання фотона, що формується π^\pm -мезоном або нуклоном ($s = \pi$ is for π^\pm , $s = j$ для нуклонів ядра). Використовуючи його представлення у вигляді (5) з роботи [65], для оператора емісії у лабораторній системі відліку ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma = & -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{k} \left[\mathbf{R} - \frac{m_\pi}{M+m_\pi} \mathbf{r} \right]} \left\{ \frac{1}{M+m_\pi} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} z_\pi + \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} + \right. \\ & \left. + \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{z_\pi}{m_\pi} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} - \frac{1}{M} \left[\sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

де зірка означає комплексне спряження, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона ($\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$), \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона, і $w_{\text{ph}} = kc = |\mathbf{k}|c$. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} в кулонівському калібруванні. У нас є дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ and $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k} ($\alpha = 1, 2$).

3.2. Хвильова функція π^\pm -ядерної системи

Випромінювання гальмівних фотонів обумовлено відносним рухом нуклонів і зарядженого π^\pm -мезона. Однак, ми припускаємо, що найбільш інтенсивне випромінювання фотонів формується за рахунок відносного руху π^\pm відносно ядра. Таким чином, видається доцільним представити повну хвильову функцію через координати відносного руху цих двох складних об'єктів. Дотримуючись такої логіки, ми визначаємо хвильову функцію повної ядерної системи як

$$\Psi_s = \Phi_s(\mathbf{R}) \cdot \Phi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},s}(\beta_A), \quad (3.8)$$

де $s = i$ або f (індекси i та f означають початковий стан, тобто стан перед випромінюванням фотона, та кінцевий стан, тобто стан після випромінювання фотона), \mathbf{K}_s — повний імпульс π^\pm -ядерної системи (у лабораторній системі відліку), $\Phi_s(\mathbf{R})$ — хвильова функція, що описує рух центру мас повної системи у лабораторній системі відліку, $\Phi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ — функція, що описує відносний рух (з тунелюванням для підбар'єрних енергій) π^\pm відносно ядра (без опису внутрішніх відносних зміщень або коливань нуклонів у ядрі), $\psi_{\text{nucl},s}(\beta)$ — багато-нуклонна функція, що описує внутрішні стани нуклонів у ядрі (вона визначає просторові стани на основі відносних відстаней $\rho_1 \dots \rho_A$ нуклонів ядра відносно його центру мас, та спин-ізоспінні стани також), β_A — номери $1 \dots A$ нуклонів ядра. Ми припускаємо:

$$\Phi_{\bar{s}}(\mathbf{R}) = N_{\bar{s}} e^{-i\mathbf{K}_{\bar{s}}\cdot\mathbf{R}}, \quad \mathbf{K}_i = 0, \quad (3.9)$$

де $N_{\bar{s}}$ — коефіцієнт нормування, якого будено визначено далі.

Ми припускаємо, що рух нуклонів ядра відносно один одного не має великого впливу на стани, що описують відносний рух π^\pm , відносно до ядра (тобто таке представлення повної хвильової функції можна розглядати як наближення). Однак відносні внутрішні рухи нуклонів ядра дають свій власний внесок у повний спектр гальмівного випромінювання і їх можна оцінити. Ми включаємо багато-нуклонну структуру у хвильову функцію $\psi_{\text{nucl},s}(\beta_A)$ ядра, тоді як ми будемо вважати, що хвильова функція відносного руху $\psi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ обчислюється без врахування такої структури, але з максимальною орієнтацією на те, що піон-ядерний потенціал визначено максимально акуратно з аналізу експериментальних даних розсіяння піонів на ядрах. Такий шлях дозволяє максимально точно зберегти хвильову функцію відносного руху, яка дає провідний внесок у повний спектр гальмівного випромінювання, тоді як багато-нуклонну структуру можна врахувати потім через корекції.

3.3. Матричний елемент випромінювання

Ми знаходимо матричний елемент на основі оператора випромінювання (3.7) та хвильової функції (3.8):

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle = & -N_i N_f e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} e^{(\alpha),*} \left\{ \right. \\
 \times & \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \frac{1}{m_A + m_\pi} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} z_\pi + \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{P}} \right| \Psi_i \right\rangle + \\
 + & \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{z_\pi}{m_\pi} - \sum_{j=1}^A \frac{z_{Aj}}{m_A} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} \right| \Psi_i \right\rangle + \\
 + & \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \left[\sum_{j=1}^{A-1} \frac{z_{Aj}}{m_{Aj}} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \tilde{\mathbf{p}}_{Aj} \right] \right| \Psi_i \right\rangle - \\
 - & \left. \left\langle \Psi_f \left| e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{M + m_\pi} \frac{1}{m_A} \left[\sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \sum_{k=1}^{A-1} \tilde{\mathbf{p}}_{Ak} \right] \right| \Psi_i \right\rangle \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Перший доданок описує випромінювання фотона, що формується за рахунок руху повної ядерної системи у лабораторній системі відліку, та її відгук на випромінювання фотона. Ми не будемо вивчати випромінювання за рахунок таких механізмів, тому будемо нехтувати цим доданком. Другий доданок описує випромінювання фотона, що формується π^\pm -мезоном та кожним нуклоном ядра при відносному русі π^\pm відносно ядра. Таке випромінювання дає основний внесок у повний спектр. Третій і четвертий доданки описують випромінювання фотона, що формується кожним нуклоном ядра при їх відносному русі у просторовій області ядра (з такими доданками можна пов'язати будь-які деформації ядра при випромінюванні).

Розглянемо найбільш вагомий матричний елемент на основі другого доданку у формулі (3.10). У розрахунках, нам слід інтегрувати за всіма не-

залежними просторовими змінними у (3.4):

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -N_i N_f e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\
&\times \int e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \mathbf{R}} \mathbf{dR} \left\langle \Phi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},f}(\beta_A) \right| e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \times \\
&\times \left[e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{z_\pi}{m_\pi} - \sum_{j=1}^A \frac{z_{Aj}}{m_A} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \right] \hat{\mathbf{p}} \left| \Phi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \cdot \psi_{\text{nucl},i}(\beta_A) \right\rangle.
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Увівши ефективний заряд π^\pm -ядерної системи як

$$Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi}{m_A + m_\pi} \left\{ \frac{m_A z_\pi}{m_A + m_\pi} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\pi Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_\pi} \right\} \quad (3.12)$$

та зарядовий форм-фактор ядра як

$$Z_A(\mathbf{k}) = \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \cdots \boldsymbol{\rho}_{AA}) \right| \sum_{j=1}^A z_{Aj} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \left| \psi_{\text{nucl},i}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \cdots \boldsymbol{\rho}_{AA}) \right\rangle, \quad (3.13)$$

ми отримаємо:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -N_i N_f \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} (2\pi)^3 \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{K}_i - \mathbf{k}) \times \\
&\times \left\langle \Phi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \right| Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \left| \Phi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle,
\end{aligned} \quad (3.14)$$

де $m = m_\pi m_A / (m_\pi + m_A)$ та ми використовуємо інтегральне представлення дельта-функції у вигляді

$$\int e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}) \mathbf{R}} \mathbf{dR} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{k}). \quad (3.15)$$

Визначимо коефіцієнти нормування N_i та N_f як

$$N_i = N_f = (2\pi)^{-3/2}. \quad (3.16)$$

Ми обчислюємо перерізи випромінювання фотонів, які не залежать від імпульсу \mathbf{K}_f (імпульс повної π^\pm -ядерної системи після випромінювання фотона у лабораторній системі відліку). Таким чином, нам необхідно проінтегрувати

матричний елемент за цим імпульсом. З (3.14) ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1 &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\ &\times \left\langle \Phi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| Z_{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \right| \Phi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \\ \mathbf{K}_i &= \mathbf{K}_f + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ефективний заряд системи у першому наближенні $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rightarrow 1$ (тобто при $\mathbf{k}\mathbf{r} \rightarrow 0$, яке назовемо *дипольним*, що пов'язане з ефективним зарядом) отримує вигляд:

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip})}(\mathbf{k}) = \frac{m_A z_\pi - m_\pi Z_A(\mathbf{k})}{m_A + m_\pi}. \quad (3.18)$$

Можна бачити незалежність ефективного заряду від відносної відстані між π^\pm та центром мас ядра у такому наближенні.

Можна отримати просте визначення матричного елемента, нехтуючи відносними переміщеннями нуклонів ядра всередині його просторової області у розрахунках форм-фактора (тобто у наближенні, де $e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_{Aj}} \rightarrow 1$ для кожного нуклона). Тут форм-фактор ядра являє собою сумарний електричний заряд нуклонів ядра, де втрачається залежність від характеристик фотона:

$$Z_A(\mathbf{k}) \rightarrow \left\langle \psi_{\text{nucl},f}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \cdots \boldsymbol{\rho}_{AA-1}) \left| \sum_{j=1}^A z_{Aj} \right| \psi_{\text{nucl},i}(\boldsymbol{\rho}_{A1} \cdots \boldsymbol{\rho}_{AA-1}) \right\rangle = \sum_{j=1}^A z_{Aj} = Z_A, \quad (3.19)$$

тому що функції $\psi_{\text{nucl},s}$ нормовані. При таких наближеннях, ми отримаємо матричний елемент (додамо індекс (*dip*)):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1^{(\text{dip})} &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \times \\ &\times \left\langle \Phi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \right| \Phi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle, \\ Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} &= \frac{m_A z_\pi - m_\pi Z_A}{m_A + m_\pi}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Використовуючи у якості функцій $\psi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r})$ хвильові пакети (відповідно до

формалізму [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 67, 87]):

$$\Phi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} g(k - k_s) \psi_{\pi\text{-nucl},s}(\mathbf{r}) e^{-iw(k)t} dk, \quad (3.21)$$

перепишемо матричний елемент вище (див. формулу (6) у роботі [65] без спінових доданків):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_1^{(\text{dip})} &= \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w_{\text{ph}}}} \cdot p_{\text{el}} \cdot 2\pi \delta(w_i - w_f - w), \\ p_{\text{el}} &= -Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \left\langle \psi_{\pi\text{-nucl},f}(\mathbf{r}) \left| e^{-i\mathbf{kr}} \hat{\mathbf{p}} \right| \psi_{\pi\text{-nucl},i}(\mathbf{r}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ми обчислюємо матричний елемент за мультипольним розкладанням хвильових функцій фотонів

$$\begin{aligned} p_{\text{el}} &= i Z_{\text{eff}}^{(\text{dip},0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\text{ph}}=1} (-i)^{l_{\text{ph}}} \sqrt{2l_{\text{ph}} + 1} \cdot \left[p_{l_{\text{ph}}}^M - i p_{l_{\text{ph}}}^E \right], \\ p_{l_{\text{ph}}}^M &= \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \mu p_{l_{\text{ph}}\mu}^M, \quad p_{l_{\text{ph}}}^E = \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu p_{l_{\text{ph}}\mu}^E, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де

$$\begin{aligned} p_{l_{\text{ph}}\mu}^M &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, M) d\mathbf{r}, \\ p_{l_{\text{ph}}\mu}^E &= \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}^*(\mathbf{r}, E) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тут $\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, M)$ та $\mathbf{A}_{l_{\text{ph}}\mu}(\mathbf{r}, E)$ — магнітний та електричний мультипольні доданки (j_{ph} — квантове число, що характеризує власні значення оператора повного моменту, тоді як $l_{\text{ph}} = j_{\text{ph}} - 1, j_{\text{ph}}, j_{\text{ph}} + 1$ пов'язано з оператором орбітального моменту, воно визначає власні значення парності фотона).

ДОДАТОК К

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ БАГАТОРАЗОВИХ ВНУТРІШНІХ
ВІДБИТТІВ В ОПИСІ ТУНЕЛЮВАННЯ

К.1. Тунелювання пакета через прямокутний бар'єр

У додатку викладено ідею багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) на прикладі задачі тунелювання частинки через одномірний прямокутний бар'єр [263, 264, 265, 54, 71]. Розглянемо частинку, що тунелює у позитивному напрямку вісі x через одномірний прямокутний потенціальний бар'єр, що ілюструє Рис. К.1. Позначимо область I для $x < 0$, область бар'єра II для $0 < x < a$ та область III для $x > a$, відповідно. Нехай частинка в області I падає зліва на бар'єр та тунелює через нього в додатньому напрямку по вісі x . Будемо вивчати еволюцію тунелювання частинки через бар'єр. У стандар-

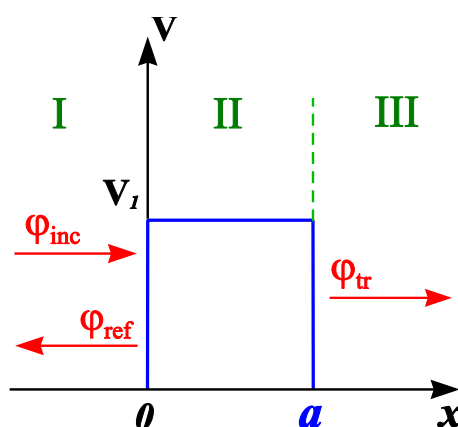


Рис.К.1 Тунелювання частинки через одномірний прямокутний бар'єр

тному підході у випадку, коли повна енергія частинки E менше ніж висота бар'єра V_1 , еволюцію тунелювання частинки можна описати за допомогою

нестационарного хвильового пакету

$$\psi(x, t) = \int_0^{+\infty} g(E - \bar{E}) \varphi(k, x) e^{-iEt/\hbar} dE, \quad (\text{K.1})$$

де стаціонарна хвилева функція (ХФ) має вигляд:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_R e^{-ikx} & \text{при } x < 0, \\ \alpha e^{\xi x} + \beta e^{-\xi x} & \text{при } 0 < x < a, \\ A_T e^{ikx} & \text{при } x > a \end{cases} \quad (\text{K.2})$$

та $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, $\xi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_1 - E)}$, E та m — повна енергія та маса частинки, відповідно. Тут враховано, що ХФ, що описує падіння частинки на бар'єр в області I, нормована на одиницю. Вагову амплітуду $g(E - \bar{E})$ визначимо як гаусіан, що задовольняє умові нормування $\int |g(E - \bar{E})|^2 dE = 1$, де \bar{E} — середня енергія частинки. Амплітуди A_T , A_R , α та β можна знайти, використовуючи умову неперервності хвильової функції $\varphi(x)$ та її похідної на кожній з границь бар'єра. Підставляючи у (K.1) замість функції $\varphi(k, x)$ її стаціонарні компоненти $\varphi_{inc}(k, x) = e^{ikx}$, $\varphi_{tr}(k, x) = A_T e^{ikx}$ та $\varphi_{ref}(k, x) = A_R e^{-ikx}$, що описують падіння частинки на бар'єр, її проходження через нього та відбиття від цього бар'єра та обумовлені виразом (K.2), ми отримаємо падаючий пакет, пакет, що пройшов, та відбитий пакет відповідно.

Обмежуючись розглядом тільки підбар'єрних процесів тунелювання, ми виключимо надбар'єрні енергії

$$g(E - \bar{E}) \rightarrow g(E - \bar{E}) \theta(V_1 - E), \quad (\text{K.3})$$

де θ -функція задовольняє умові

$$\theta(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta < 0, \\ 1 & \text{при } \eta > 0. \end{cases}$$

Метод багаторазових внутрішніх відбиттів описує процес поширення пакету, що описує тунелювання частинки, послідовно по етапах його проходження відповідно до кожної границі бар'єра [266, 267, 268]. На першому

етапі ми маємо пакет в області I, що падає на першу границю бар'єра в точці $x = 0$. Цей пакет розщеплюється на два компонента: компонент, що пройшов через границю і тунелює далі в області II, і відбитий компонент від границі, що рухається назад в області I. Ці два компонента ми будемо далі розглядати як незалежні нові пакети. При цьому вважаємо, що пакет, що тунелює в області II, ще не встиг досягти другої границі бар'єра за рахунок скінченної швидкості його руху, і тому на цьому етапі ми розглядаємо тільки дві області I і II. При визначенні виразу для цього пакета ми нехтуємо впливом на нього другої границі бар'єра і вважаємо згідно з фізичних міркувань, що амплітуда цього пакета повинна зменшуватись зі зростанням x . Тому у (К.2) ми використовуємо лише один доданок $\beta \exp(-\xi x)$, відкидаючи другий зростаючий доданок $\alpha \exp(\xi x)$ (інакше при нескінченно широкому бар'єрі ми порушимо умову скінченності ХФ). Таким чином, в області II одержимо

$$\psi_{\text{tr}}^{(1)}(x, t) = \int_0^{+\infty} g(E - \bar{E}) \theta(V_1 - E) \beta^0 e^{-\xi x - iEt/\hbar} dE \quad \text{при } 0 < x < a. \quad (\text{К.4})$$

Пакет, побудований в області бар'єра таким чином, є аналітичним продовженням відповідного пакету для надбар'єрного руху частинки, де для стаціонарного виразу ми беремо хвилю $\exp(ik_2x)$, що поширюється праворуч (де $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_1)}$).

Тепер розглянемо перший етап далі. Вирази для падаючого пакета на першу границю і відбитого пакета від неї представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \psi_{\text{inc}}(x, t) &= \int_0^{+\infty} g(E - \bar{E}) \theta(V_1 - E) e^{ikx - iEt/\hbar} dE, & \text{при } x < 0, \\ \psi_{\text{ref}}^{(1)}(x, t) &= \int_0^{+\infty} g(E - \bar{E}) \theta(V_1 - E) A_R^0 e^{-ikx - iEt/\hbar} dE, & \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (\text{К.5})$$

Сума цих виразів являє собою залежну від часу ХФ в області I. Тепер ми використаємо умову, щоб ця ХФ та її похідна у точці $x = 0$ неперервно переходили у ХФ вигляду (К.4) та її похідну (тобто в цій точці ХФ та її похідна,

визначені в області I, повинні бути рівними ХФ та її похідній, визначеним в області II). В результаті ми одержуємо два рівняння, в яких можна перейти від залежного від часу пакету (та його похідної) до відповідних їм стаціонарних частин та далі знайти амплітуди $\beta^{(0)}$ і $A_R^{(0)}$.

На другому етапі ми розглядаємо пакет, що тунелює в області II і падає на другу границю бар'єра в точці $x = a$. Він створює новий пакет, що пройшов крізь цю границю і поширюється в області III, та пакет, що відбився від границі і тунелює назад у області II. При визначенні цих пакетів використовуємо (К.1) з урахуванням (К.3), де у якості стаціонарних ХФ використовуємо такі вирази:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inc}}^{(2)}(k, x) &= \varphi_{\text{tr}}^{(1)}(k, x) = \beta^{(0)} e^{-\xi x} && \text{при } 0 < x < a, \\ \varphi_{\text{tr}}^{(2)}(k, x) &= A_T^{(0)} e^{ikx} && \text{при } x > a, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(2)}(k, x) &= \alpha^{(0)} e^{\xi x} && \text{при } 0 < x < a.\end{aligned}\tag{К.6}$$

Перепишемо хвилю $\varphi_{\text{tr}}^{(2)}(k, x)$, що пройшла через другу границю, та відбиту хвилю $\varphi_{\text{ref}}^{(2)}(k, x)$ таким чином:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{tr}}^{(2)}(k, x) &= T_2^+ \cdot \left\{ \varphi_{\text{inc}}^{(2)}(k, x) e^{\xi x} \right\}_{x=a} \cdot e^{ikx} && \text{при } x > a, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(2)}(k, x) &= R_2^+ \cdot \left\{ \varphi_{\text{inc}}^{(2)}(k, x) e^{\xi x} \right\}_{x=a} \cdot e^{\xi x} && \text{при } 0 < x < a,\end{aligned}\tag{К.7}$$

де введено нові коефіцієнти T_2^+ та R_2^+ .

При визначенні виразу для пакету, відбитого від другої границі бар'єра в точці $x = a$, вибираємо лише зростаючу частину $\alpha^{(0)} \exp(\xi x)$ стаціонарної ХФ. Виконуючи умову неперервності для залежної від часу ХФ та її похідної в точці $x = a$, одержуємо два нові рівняння, з яких визначаємо невідомі коефіцієнти $A_T^{(0)}$ і $\alpha^{(0)}$.

На третьому етапі пакет, що тунелює в області II, падає на першу границю бар'єра і утворює пакет, який проходить крізь цю границю і рухається в області I, і пакет, який відбивається від границі і тунелює назад в області II. При визначенні цих пакетів використовуємо (К.1) з урахуванням (К.3), де

як стаціонарні ХФ використовуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inc}}^{(3)}(k, x) &= \varphi_{\text{ref}}^{(2)}(k, x) \quad \text{при } 0 < x < a, \\ \varphi_{\text{tr}}^{(3)}(k, x) &= A_R^{(1)} e^{-ikx} \quad \text{при } x < 0, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(3)}(k, x) &= \beta^{(1)} e^{-\xi x} \quad \text{при } 0 < x < a.\end{aligned}\tag{K.8}$$

Використовуючи умову неперервності для залежної від часу ХФ та її похідної в точці $x = 0$, знаходимо нові невідомі коефіцієнти $A_R^{(1)}$ і $\beta^{(1)}$. Перепишемо хвилю $\varphi_{\text{tr}}^{(3)}(k, x)$, що пройшла через першу границю, та відбиту хвилю $\varphi_{\text{ref}}^{(3)}(k, x)$ таким чином:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{tr}}^{(3)}(k, x) &= T_1^- \cdot \left\{ \varphi_{\text{inc}}^{(3)}(k, x) e^{-\xi x} \right\}_{x=0} \cdot e^{-ikx} \quad \text{при } x < 0, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(3)}(k, x) &= R_1^- \cdot \left\{ \varphi_{\text{inc}}^{(3)}(k, x) e^{-\xi x} \right\}_{x=0} \cdot e^{-\xi x} \quad \text{при } 0 < x < a,\end{aligned}\tag{K.9}$$

де введено нові коефіцієнти T_1^- та R_1^- .

На основі аналізу наступних процесів можливого проходження та відбиття пакетів відносно границь бар'єра можна зробити висновок про те, що кожний з наступних етапів можна звести до одного з двох розглянутих вище. Для обчислення невідомих коефіцієнтів $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $A_T^{(n)}$ і $A_R^{(n)}$, які використовуються у виразах для пакетів, що виникають внаслідок багаторазового відбиття від границь бар'єра, можна скласти рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned}\beta^{(0)} &= \frac{2k}{k + i\xi}, \quad \alpha^{(n)} = \beta^{(n)} \frac{i\xi - k}{i\xi + k} e^{-2\xi a}, \quad \beta^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \frac{i\xi - k}{i\xi + k}, \\ A_R^{(0)} &= \frac{k - i\xi}{k + i\xi}, \quad A_T^{(n)} = \beta^{(n)} \frac{2i\xi}{i\xi + k} e^{-\xi a - ika}, \quad A_R^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \frac{2i\xi}{i\xi + k}.\end{aligned}\tag{K.10}$$

При розгляді руху пакету таким чином ми отримуємо нестаціонарні ХФ у кожній області, що виражаються через нескінченні суми пакетів. Остаточні вирази для падаючого пакету на бар'єр, пакету, що пройшов крізь нього, та відбитого пакету від бар'єра визначаються за допомогою (К.1) з

урахуванням (К.3), де для стаціонарних ХФ слід використати такі вирази:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inc}}(k, x) &= e^{ikx} && \text{при } x < 0, \\ \varphi_{\text{tr}}(k, x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_T^{(n)} e^{ikx} && \text{при } x > a, \\ \varphi_{\text{ref}}(k, x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_R^{(n)} e^{-ikx} && \text{при } x < 0.\end{aligned}\tag{K.11}$$

Тепер розглянемо пакет, сформований у наслідок послідовних n відбиттів від границь бар'єра, що падає на одну з границь у точці $x = 0$ чи в точці $x = a$. Він утворює пакет $\Psi_{\text{tr}}^{(i)}(x, t)$, що пройшов крізь цю границю, та відбитий від неї інший пакет $\Psi_{\text{ref}}^{(i)}(x, t)$. Для незалежних від x стаціонарних частин від цих пакетів можна записати:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{\text{tr}}^{(1)}}{\exp(-\xi x)} &= T_1^+ \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(1)}}{\exp(ikx)}, & \frac{\varphi_{\text{ref}}^{(1)}}{\exp(-ikx)} &= R_1^+ \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(1)}}{\exp(ikx)}, \\ \frac{\varphi_{\text{tr}}^{(2)}}{\exp(ikx)} &= T_2^+ \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(2)}}{\exp(-\xi x)}, & \frac{\varphi_{\text{ref}}^{(2)}}{\exp(\xi x)} &= R_2^+ \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(2)}}{\exp(-\xi x)}, \\ \frac{\varphi_{\text{tr}}^{(1)}}{\exp(-ikx)} &= T_1^- \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(1)}}{\exp(\xi x)}, & \frac{\varphi_{\text{ref}}^{(1)}}{\exp(-\xi x)} &= R_1^- \frac{\varphi_{\text{inc}}^{(1)}}{\exp(\xi x)},\end{aligned}\tag{K.12}$$

де знак “+” (або “-”) відповідає пакету, що рухається у напрямку зростання x (або спадання x) і падає на границю з номером j . При використанні T_j^\pm , R_j^\pm та виразу для пакета, що падає на першу границю бар'єра в області I на першому етапі, можна точно визначити довільний пакет, що утворився внаслідок n -кратних відбиттів, якщо знати “шлях” його руху в області бар'єра. При використанні рекурентних співвідношень (К.10) можна знайти коефіцієнти T_j^\pm і R_j^\pm :

$$\begin{aligned}T_1^+ &= \beta^{(0)}, & T_2^+ &= \frac{A_T^{(n)}}{\beta^{(n)}}, & T_1^- &= \frac{A_R^{(n+1)}}{\alpha^{(n)}}, \\ R_1^+ &= A_R^{(0)}, & R_2^+ &= \frac{\alpha^{(n)}}{\beta^{(n)}}, & R_1^- &= \frac{\beta^{(n+1)}}{\alpha^{(n)}}.\end{aligned}\tag{K.13}$$

Враховуючи ці рекурентні співвідношення, можна знайти нескінченні суми амплітуд $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $A_T^{(n)}$ і $A_R^{(n)}$. Однак ці суми простіше знайти, використовуючи множники T_j^\pm і R_j^\pm . Аналізуючи всі можливі “шляхи” руху пакетів

в області бар'єра, одержимо

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A_T^{(n)} &= T_2^+ T_1^- \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^n \right) = \frac{i4k\xi e^{-\xi a - ika}}{F_{\text{sub}}}, \\
\sum_{n=0}^{+\infty} A_R^{(n)} &= R_1^+ + T_1^+ R_2^+ T_1^- \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^n \right) = \frac{k_0^2 D_-}{F_{\text{sub}}}, \\
\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{(n)} &= \alpha^0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^n \right) = \frac{2k(i\xi - k)e^{-2\xi a}}{F_{\text{sub}}}, \\
\sum_{n=0}^{+\infty} \beta^{(n)} &= \beta^0 \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^n \right) = \frac{2k(i\xi + k)}{F_{\text{sub}}},
\end{aligned} \tag{K.14}$$

де

$$\begin{aligned}
F_{\text{sub}} &= (k^2 - \xi^2)D_- + 2ik\xi D_+, \\
D_{\pm} &= 1 \pm e^{-2\xi a}, \\
k_0^2 &= k^2 + \xi^2 = \frac{2mV_1}{\hbar^2}.
\end{aligned} \tag{K.15}$$

Математичне обґрунтування методу БВВ забезпечується виконанням таких умов:

- Усі суми $\sum \alpha^{(n)}$, $\sum \beta^{(n)}$, $\sum A_T^{(n)}$ і $\sum A_R^{(n)}$, отримані за допомогою методу БВВ, співпадають з амплітудами α , β , A_T і A_R з (К.2), обчисленими відомими стаціонарними методами [43].
- Вираз пакета, що пройшов в область бар'єра на першому етапі, (та вирази пакетів на всіх етапах) однозначно визначається сумами $\sum \alpha^{(n)}$ і $\sum \beta^{(n)}$.
- При використанні заміни

$$i\xi \rightarrow k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_1)} \tag{K.16}$$

виконується принцип аналітичного продовження коефіцієнтів $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $A_T^{(n)}$, $A_R^{(n)}$, стаціонарних ХФ на кожному етапі і сум (К.14) і (К.15) для тунелювання під бар'єром та відповідних виразів для проходження над бар'єром (з урахуванням зміни знака аргументу в Θ -функції).

Фізичне обґрунтування методу БВВ забезпечується виконанням умови існування ненульових потоків від пакетів в області бар'єра на кожному етапі. Таким чином, здійснюється обґрунтування методу багаторазового внутрішнього відбиття при стаціонарному аналізі тунелювання частинки під бар'єром та її проходження над ним. Також виконується умова:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} A_T^n \right|^2 + \left| \sum_{n=0}^{+\infty} A_R^n \right|^2 = 1. \quad (\text{K.17})$$

К.2. Порівняння з двохраненціальним методом

В двохраненціальному методі (two-potential approach, ТРА), який був запропонований Гурвіцем і Калберманом у [140] (див. також [273, 272, 117]) ширина напіврозпаду визначається так (див. (16) у [117]):

$$\Gamma = \frac{4\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_{r_B}^{\infty} \psi_{nlj}(r) W(r) \chi_l(r) dr \right|^2, \quad (\text{K.18})$$

де $k = \sqrt{2\mu E_0}/\hbar$, μ — наведена маса, r_B — радіальна координата висоти бар'єра, $\psi_{nlj}(r)$ — радіальна хвильова функція для першого радіального потенціалу, що включає внутрішню яму до точки r_B , $\chi_l(r)$ — регулярна радіальна хвильова функція для другого радіального потенціалу, що визначається на зовнішній області, починаючи від точки r_B (тобто не включає внутрішню яму), та має наступний асимптотичний вигляд (також $\chi_l(0) = 0$):

$$\chi_l(r) \rightarrow \sin(kr - \pi l/2 + \delta_l) \quad r \rightarrow \infty. \quad (\text{K.19})$$

Обидві хвильові функції є дійсними та визначаються відносно різних рівнів енергії. Таким чином, у підході ТРА ми не розглядаємо жодних потоків, ми не визначаємо проникність бар'єру. Ми не аналізуємо можливого відбиття протона від бар'єра у внутрішній області у тому стані, де визначається проникність протона через бар'єр. Ми нехтуємо існуючою проблемою, як розділити повну хвильову функцію у внутрішній області на падаючу і відбиту хвилі,

які вносять суттєвий вплив на визначення проникності (так, наприклад, для простого прямокутного бар'єру з прямокутною ямою таке можливе некоректне розділення точно відомої повної хвильової функції може призвести до нескінченно великого значення проникності, що пояснюється ненульовою інтерференцією між падаючою та відбитою хвилями). Увесь успіх вдалого визначення ширини Γ тепер залежить від тієї точності, наскільки коректно встановлена відповідність між двома хвилевими функціями $\psi_{nlj}(r)$ та $\chi_l(r)$ у підході ТРА, які обчислюються та нормуються абсолютно незалежно. Відповідність між цими хвилевими функціями залежить від вдалого вибору граничної точки r_B (або δ_l), яка поділяє увесь потенціал на дві частини (та від граничних умов у точці $r = 0$ або при $r \rightarrow \infty$). У протилежність, взаємозв'язок між падаючою хвилею, хвилею, що пройшла, та відбитою хвилею у підході БВВ визначається відносно потенціалу в цілому (тобто нам абсолютно не потрібно розбивати потенціал на частини), що відповідає повністю квантовому та суцільному розгляду проникнення протона через бар'єр (що пов'язано з принципом *нелокальності* у квантовій механіці). Зокрема, хвиля, що пройшла, у підході БВВ залежить від глибини внутрішньої ями та її форми, тоді як від них абсолютно не залежить зовнішня хвильова функція $\chi_l(r)$ у підході ТРА (при визначенні ширини таку залежність вносить множник F , починаючи від простих квазікласичних наближень). Іншими словами, ми маємо сильний взаємозв'язок між падаючою, відбитою хвилями та хвилею, що пройшла, у підході БВВ та як мінімум слабкий взаємозв'язок між внутрішньою і зовнішньою хвилевими функціями у підході ТРА. Це грає істотну роль у розрахунках ширини та пояснює відмінність між сильною залежністю проникності від точки старту у підході БВВ і практично повною відсутністю такої залежності у підході ТРА.

Найпростіший приклад, який міг би продемонструвати, чому така залежність дійсно існує і чому вона може виявитися не малою, можна знайти

навіть у класичних задачах квантової механіки. Давайте розглянемо визначення проникності, що дається у [43] (див. (25.3), стор. 103):

$$D = \frac{k_2}{k_1} |A|^2, \quad (\text{K.20})$$

де D — проникність, k_1 і k_2 — хвилеві числа хвилі, що падає зліва на бар'єр та визначається відносно лівої асимптотичної частини потенціалу, та хвилі, що пройшла через нього та визначається у правій асимптотичній частині (див. Рис. 5 у [43], стор. 103), A — амплітуда хвильової функції для хвилі, що пройшла через бар'єр. Ця формула показує, що зниження лівого хвоста потенціалу збільшує хвилеве число k_1 (що визначається асимптотичними формулами (25,1) та (25,2)) і, таким чином, змінює проникність D . Наш висновок про існування істотної залежності проникності від точки старту R_{\min} у підході БВВ має подібний зміст, але він отриманий відносно реалістичного бар'єру з внутрішньою ямою та враховує також зміну внутрішніх амплітуд. Це суперечить твердженню про суттєво малу залежність проникності від форми внутрішньої ями, що висувається у роботах з підходом ТРА. Отже, ці пункти є обмеженнями підходу ТРА та доводять, що сам підхід не описує проникність протона через бар'єр у повністю квантовому розгляді.

Тепер ми повернемося до однієї з найбільш ваговитих робіт по ТРА — статті [273], де для порівняння були використані деякі точно розв'язувані приклади. У першому прикладі з прямокутним бар'єром і ямою (див. розд. VI.A, стор. 1752–1753, (4.6)) ширина дійсно не містить залежності від дна ями, оскільки вона спочатку визначена нульовою. Відповідь на питання, що станеться з цією шириною, якщо дно ями змістити, дає метод БВВ (а також формула (K.20)). Наступний приклад з кулонівським хвостом вже явно враховує ненульову яму! Тут ми вже бачимо явну залежність ширини від дна ями (див. (4.18), стор. 1754–1755 у цій роботі), що підтверджує справедливість логіки у нашому підході.

В той же час, порівняння результатів, отриманих у підході ТРА, з ре-

зультатами, отриманими за допомогою розробок, побудованих принципово на повністю квантовій основі, інколи призводить до деякої плутанини, оскільки у літературі підхід ТРА практично завжди називається повністю квантовим. Отже, наш підхід до визначення ширини розпаду на основі проникності є фізично обґрунтованим, точнішим і, тому, має перспективу для подальшого свого розвитку.

К.3. Прямий метод квантової механіки

У цьому додатку викладено процедуру знаходження амплітуд хвильової функції, якщо на загальний розв'язок хвильової функції накласти умови її неперервності та неперервності її похідної на кожній межі. Ключові формули для двох бар'єрів було отримано у дисертаційній роботі [54]; такий підхід було застосовано для вивчення α -розпаду, протонного розпаду [72, 73], захоплення α -частинок ядрами [74, 75, 76], та при перевірках розрахунків проникностей бар'єрів у задачах квантової космології [78, 79]. Оскільки нумерація меж та потоки різні для задач розпаду та α -захоплення, приведемо остаточні формули для цих задач окремо.

(1) Розпад ядра.

На початку ми знаходимо функції f_2 та g_2 (відповідно до першої межі):

$$f_2 = \frac{k_2 + k}{k_2 - k} e^{2ik_2x_1}, \quad g_2 = \frac{2k}{k - k_2} e^{i(k+k_2)x_1}. \quad (\text{K.21})$$

Потім, використовуючи наступні рекурентні співвідношення:

$$f_{j+1} = \frac{(k_{j+1} - k_j) e^{2ik_jx_j} + f_j (k_{j+1} + k_j)}{(k_{j+1} + k_j) e^{2ik_jx_j} + f_j (k_{j+1} - k_j)} \cdot e^{2ik_{j+1}x_j}, \quad (\text{K.22})$$

ми розраховуємо наступні функції $f_3, f_4, f_5 \dots f_N$ та за допомогою такої формули:

$$g_{j+1} = g_j \cdot \frac{2k_j e^{i(k_{j+1}+k_j)x_j}}{(k_{j+1} + k_j) e^{2ik_jx_j} + f_j (k_{j+1} - k_j)} \quad (\text{K.23})$$

знаходимо функції $g_3, g_4, g_5 \dots g_N$. З f_N та g_N ми отримуємо амплітуди α_N , β_N та амплітуду проходження A_T :

$$\beta_N = 0, \quad A_T = \alpha_N = -\frac{g_N}{f_N}. \quad (\text{K.24})$$

Потім, використовуючи рекурентні співвідношення:

$$\alpha_{j-1} = \frac{\alpha_j e^{ik_j x_{j-1}} + \beta_j e^{-ik_j x_{j-1}} - g_{j-1} e^{-ik_{j-1} x_{j-1}}}{e^{ik_{j-1} x_{j-1}} + f_{j-1} e^{-ik_{j-1} x_{j-1}}} \quad (\text{K.25})$$

та таку формулу:

$$\beta_j = \alpha_j \cdot f_j + g_j, \quad (\text{K.26})$$

ми послідовно розраховуємо амплітуди $\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}, \alpha_{N-2}, \beta_{N-2} \dots \alpha_2, \beta_2$. У завершенні, ми знаходимо амплітуду відбиття A_R :

$$A_R = \alpha_2 e^{i(k+k_2)x_1} + \beta_2 e^{i(k-k_2)x_1} - e^{2ikx_1}. \quad (\text{K.27})$$

У якості тесту можна використати умову:

$$\frac{k_N}{k_1} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1. \quad (\text{K.28})$$

(2) Захоплення α -частинки ядром.

Спочатку знаходяться функції f_{N-1} і g_{N-1} (починаючи з останньої межі в r_{N-1}):

$$f_{N-1} = \frac{k_{N-1} + k_N}{k_{N-1} - k_N} e^{2ik_{N-1}r_{N-1}}, \quad g_{N-1} = \frac{2k_N}{k_N - k_{N-1}} e^{i(k_N+k_{N-1})r_{N-1}}. \quad (\text{K.29})$$

Використовуючи рекурентні співвідношення:

$$f_{j-1} = \frac{(k_{j-1} - k_j) e^{2ik_j r_{j-1}} + f_j (k_{j-1} + k_j)}{(k_{j-1} + k_j) e^{2ik_j r_{j-1}} + f_j (k_{j-1} - k_j)} \cdot e^{2ik_{j-1} r_{j-1}}, \quad (\text{K.30})$$

розраховуються послідовно множники $f_{N-2}, f_{N-3}, f_{N-4} \dots f_1$, та за допомогою формули:

$$g_{j-1} = g_j \cdot \frac{2k_j e^{i(k_{j-1}+k_j)r_{j-1}}}{(k_{j-1} + k_j) e^{2ik_j r_{j-1}} + f_j (k_{j-1} - k_j)} \quad (\text{K.31})$$

знаходяться множники $g_{N-2}, g_{N-3}, g_{N-4} \dots g_1$. З f_1 та g_1 знаходяться амплітуди α_1 і β_1 та амплітуда проходження A_T :

$$\alpha_1 = 0, \quad A_T = \beta_1 = -\frac{g_1}{f_1}. \quad (\text{K.32})$$

Використовуючи рекурентні співвідношення:

$$\beta_{j+1} = \frac{\beta_j e^{ik_j r_j} + \alpha_j e^{-ik_j r_j} - g_{j+1} e^{-ik_{j+1} r_j}}{e^{ik_{j+1} r_j} + f_{j+1} e^{-ik_{j+1} r_j}} \quad (\text{K.33})$$

та такі формули:

$$\alpha_j = \beta_j \cdot f_j + g_j, \quad (\text{K.34})$$

послідовно розраховуються амплітуди $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \dots \alpha_{N-1}, \beta_{N-1}$. У завершенні, знаходиться амплітуда відбиття A_R :

$$A_R = \beta_{N-1} e^{i(k_N + k_{N1})r_{N-1}} + \alpha_{N-1} e^{i(k_N - k_{N-1})r_{N-1}} - e^{2ik_N r_{N-1}}. \quad (\text{K.35})$$

Для тесту можна використати умову:

$$\frac{k_1}{k_N} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1. \quad (\text{K.36})$$

У задачах протонного розпаду та захоплення α -частинки ядром у Розділах 9, 10, 11 цей метод було використано для перевірки амплітуд, що було отримано раніше за допомогою метода БВВ. При порівнянні було отримано збіг до перших 15 цифр для усіх амплітуд. Тому *(1) результат про існування сильної залежності проникності від положення точки старту R_{\min} у задачі розпаду не залежить від вибору повністю квантового методу, (2) результат для залежності коефіцієнта проникності від положення точки r_{capture} та отриманих перерізів у задачі α -захоплення не залежить від вибору повністю квантового методу.*

К.4. Розрахунки ймовірностей злиття

У Табл. К.1 ми представляємо знайдені ймовірності злиття (та відповідні функції помилок) для реакції захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у залежності від різних

максимальних значень орбітального моменту L_{\max} . Тут коефіцієнт проникності бар'єру розраховується за методом БВВ, а параметризації α -ядерного потенціалу обрана з роботи [112]. З таких результатів можна бачити, що при меншому обраному значенні момента L_{\max} усі ймовірності дорівнюють одиниці. Однак, при збільшенні значення L_{\max} , починаючи з $L_{\max} = 9$, ймовірності злиття для перших кутових моментів близькі до нуля. Така тенденція близькості до нуля для перших ймовірностей злиття існує при подальшому збільшенні значення L_{\max} до максимально можливого. Така тенденція також зберігається для іншої реакції $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ після знаходження власної параметризації для α -ядерного потенціалу (див. Табл.10.1 і 10.2). Така картина ясно демонструє непрацездатність ідеї різкого обрізання кутових моментів, запропонованої Гласом та Моселом у роботах 317, 316. Більш точний опис поведінки ймовірностей злиття при менших та більших кутових моментах дозволяє описати різницю між експериментальними даними [313] для реакцій $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Це вказує на скасування підходу різкого обрізання кутових моментів у задачах захоплення та синтезу, якщо ми хочемо більш глибоко зрозуміти процеси злиття.

К.5. Знаходження параметрів потенціалу за допомогою метода мінімізації

З метою оцінити похибки, що виникають у розрахунках різними методами для реакцій захоплення $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$, такі розрахунки потрібно порівнювати при однаковій параметризації. Тому ми обрали параметризацію з роботи [112], тоді як дослідження у розділі 10 безпосередньо орієнтовано на вивчення α -захоплення та у тій роботі як раз і неведено параметри саме для таких реакцій. В аналіз ми включило наш метод БВВ, підхід у ВКБ-наближенні, підхід, запропонований Хіллом і Уїлером [318], та формулу Вон-

	L_{\max}											
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p_0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.01	0.01	0	0	0.01	0.01	0.005	0.156
p_1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.16	0	0	0	0.01	0	0.001	0.090
p_2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0.02	0	0.001	0.175
p_3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0.02	0.02	0.222	0.204
p_4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.58	0	0	0.26	0.19	0.415	0.190
p_5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.73	0.45	0.86	0.81	0.492	0.458
p_6	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.22	0.36	0.332	0.455
p_7	-	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
p_8	-	-	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
p_9	-	-	-	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
p_{10}	-	-	-	-	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
p_{11}	-	-	-	-	-	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
p_{12}	-	-	-	-	-	-	-	1.0	0.75	1.0	1.0	1.0
p_{13}	-	-	-	-	-	-	-	-	1.0	0.06	0.32	0.277
p_{14}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.86	0	0.
p_{15}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.0	1.0
p_{16}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.0
ε_1	0.540	0.471	0.411	0.347	0.283	0.209	0.129	0.0569	0.0364	0.0314	0.0301	0.0293
ε_2	1.962	1.254	0.825	0.545	0.363	0.298	0.172	0.0735	0.0472	0.0420	0.0405	0.0397
ε_3	0.171	0.125	0.095	0.071	0.054	0.041	0.024	0.0107	0.0070	0.0062	0.0060	0.0059
E_{\min}	-16.6	-14.1	-11.3	-8.26	-4.90	-1.29	2.56	6.50	10.9	15.5	20.24	25.15
E_{\max}	8.45	9.41	10.5	11.8	13.4	15.5	17.1	19.3	21.7	24.3	27.32	30.52

Табл. К.1. Ймовірності злиття, розраховані для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при параметризації [112] за допомогою метода мінімізації, де метод БВВ було використано для отримання коефіцієнтів проникності. $p_0 \dots p_{16}$ — ймовірності злиття, ε_1 , ε_2 and ε_3 — функції помилок, визначені за формулами (10.13), E_{\min} — мінімум потенціальної ями перед бар'єром (MeV), E_{\max} — висота потенціального бар'єра (MeV) і L_{\max} — максимальне значення кутового моменту, що використовується при сумуванні у (10.1).

Метод	$\alpha + {}^{40}\text{Ca}$			$\alpha + {}^{44}\text{Ca}$		
	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3
метод БВВ	0.5154	0.3873	0.0687	0.3881	0.3238	0.0561
наближення ВКБ	0.9233	0.5251	0.1030	0.8401	0.4936	0.0957
підхід Хілла-Уілера	1.3923	0.6236	0.1306	0.3927	0.3265	0.0569
формула Вонга	0.6834	0.4527	0.0829	0.5507	0.4007	0.0713

Табл. К.2. Похибки, отримані різними підходами у розрахунках перерізів реакцій захоплення $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ і $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при параметризації потенціалу [112], де ми не включили ймовірності злиття у розрахунки. ε_1 , ε_2 та ε_3 — функції помилок, визначені за формулами (10.13). З представлених результатів можна бачити, що для однакової параметризації [112] метод БВВ зменшує помилки у два рази у порівнянні з розрахунками у ВКБ-наближенні, тоді як підхід Хілла-Уолкера та формула Вонга дають помилки, близькі до підходу БВВ.

га [319] для визначення проникності оберненого параболічного бар'єру, яким апроксимується оригінальний потенціальний бар'єр (ми будемо називати ці підходи як *підхід Хілла-Уілера і підхід Вонга*). З результатів, які наведено у Табл. К.2, можна побачити, що метод БВВ має вдвічі менше помилок у порівнянні з розрахунками у ВКБ-наближенні, тоді як підходи Хілла-Уілера і Вонга дають оцінку помилок, що подібні до помилок підходу БВВ. З першого розгляду, виглядає дивно та не зрозуміло, чому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу БВВ та підходами Хілла-Уілера і Вонга, виявилася такою малою. Підхід БВВ включає в себе суттєво більше формалізму (та використовує значно більше компютерних ресурсів) для розрахунків для знаходження проникностей потенціальних бар'єрів, ніж формалізми Хілла-Уілера і Вонга. Однак, з такої точки зору стає зрозумілим, що *помилки характеризують тільки різницю між розрахунками та експериментальними даними, та вони не показують рівень коректної апроксимації бар'єру*. Відповідно до такої логіки, ми могли би використати суттєво інший потенці-

ал, знайти його проникність за допомогою формули з грубим наближенням та, якщо таке нове значення проникності виявиться ближчим до експериментальних даних, зробити висновок про більш вдалий успіх використаного підходу. Але, такий висновок є абсолютно неправильним. Тому, помилки повинні також враховувати рівень апроксимації бар'єру, що використовується у вибраному способі розрахунків. Тому-що підхід ВКБ є наближеним методом, ми не будемо його включати у подальший аналіз.

Давайте з'ясуємо, які параметри α -ядерного потенціалу дають досліджувані методи. Результати, отримані за допомогою методу оптимізації (ми вибираємо *метод градієнтного спуску*) для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$, представлено у Табл. К.3, де ми не включаємо ймовірності злиття у розрахунки. Можна бачити, що оцінки радіуса r_m дуже близькі для будь-якого використаного підходу при параметризації [112]. Сили потенціалу V_0 , отримані за допомогою підходу БВВ і формули Вонга, близькі до значення при параметризації [112], на відміну від сили потенціалу підходу Хілла-Уілера. Всі три підходи дають суттєво різні оцінки для параметра дифузності d , у порівнянні з результатами роботи [112]. Тепер стає ясно, що формалізми з різними наближеннями опису форми бар'єру дають різні оцінки параметрів потенціалу при близьких помилках. Цей результат підкреслює важливість уключення рівня апроксимації опису форми бар'єру у визначення похибки методу.

К.6. Порівняння методу БВВ з підходом Хілла-Уілера, формулою Вонга та наближенням ВКБ

Порівняння розрахунків, виконаних на основі методу БВВ та підходу Хілла-Уілера, показує, що проникності при різних орбитальних моментах, знайдені за допомогою підходу Хілла-Уілера, виявляються значно завищеними при малих енергіях (див. Рис. К.2), але цей результат не дає помітного впливу

	Параметри потенціалу					похибки		
	V_0 , MeV	r_m , фм	d , фм	E_{\min}	E_{\max}	ε_1	ε_2	ε_3
MIRM	34.091	6.6855	0.1789	-24.04	7.48	0.0738	0.0855	0.0129
HWA	16.463	6.6866	0.1568	-6.67	7.71	0.0761	0.0987	0.0151
WoF	33.155	6.6864	0.1455	-23.30	7.66	0.0730	0.0879	0.0129

Табл. **К.3.** Параметри потенціалу, отримані за допомогою мінімізації функції помилок ε_1 для реакції захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$, де ми не включили ймовірності злиття у розрахунки. ε_1 , ε_2 та ε_3 — функції помилок, визначені за формулами (10.13), E_{\min} — мінімум внутрішньої потенціальної ями до бар'єру (MeV) і E_{\max} — висота потенціального бар'єру (MeV). MIRM, HWA та WoF — позначення для методу БВВ, підходу Хілла-Уілера і формули Вонга, відповідно. Можна бачити, що після процедури мінімізації помилки стають меншими, ніж четверть помилок, отриманих у попередніх розрахунках та наведених у Табл. **К.2.** Однак, при подібній точності опису експериментальних даних, різні методи дають суттєві відмінності між параметрами V_0 та d . Звідси випливає, що рівень згоди з експериментальними даними на основі даних помилок не є достатнім для отримання достовірної інформації про параметри потенціалу взаємодії.

на значення повного перерізу. Однак, такий результат не відповідає повні-

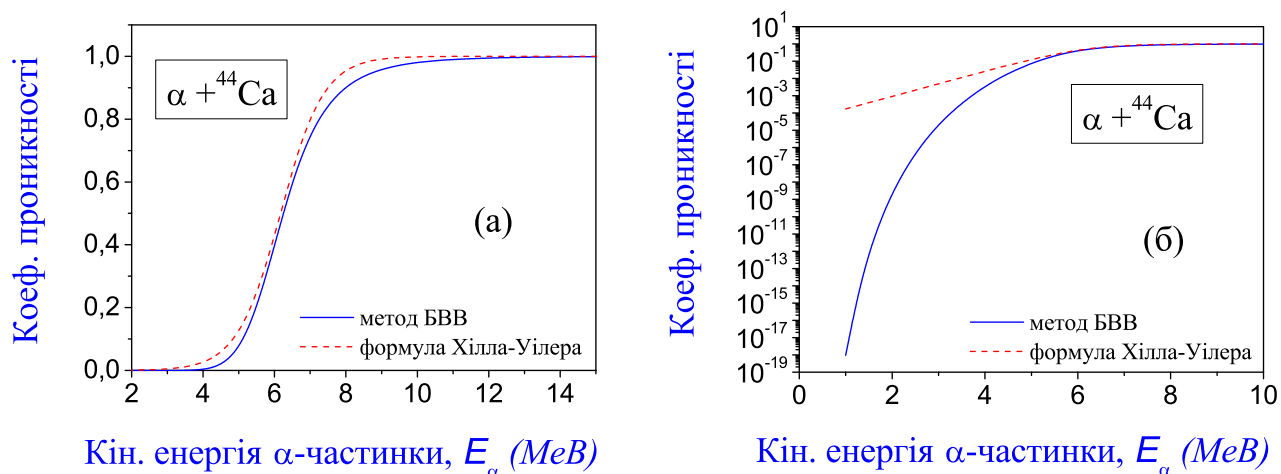


Рис. **К.2** Проникності бар'єра для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$, розраховані за допомогою методу БВВ (сплошна синя лінія) та підходу Хілла-Уілера (пунктирна червона лінія) (параметри розрахунків: 1000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм). У лінійному масштабі ми отримуємо достатньо близьке співпадіння між значеннями для проникності, отриманими за допомогою обох підходів [див. рисунок (а)]. Однак, більш акуратний аналіз, виконаний у логарифмічному масштабі, показує суттєво завищені значення для проникності при малих енергіях, отримані у підході Хілла-Уілера [див. рисунок (б)]. Тепер стає зрозумілим, що застосування підходу Хілла-Уілера для визначення проникності у задачах розпадів ядер є обмеженим та веде до появи більших похибок при визначенні періодів напів-розпаду ядер. Підхід Хілла-Уілера виглядає працездатним у задачах злиття тому, що при визначенні повного перерізу захоплення нам необхідно просумувати до 18 парціальних перерізів (визначених на основі відповідних проникностей) зі своїми зміщеними максимумами, саме в яких він і працює.

стю квантовому опису процесу, де ми маємо суттєвий вплив форми бар'єру на значення проникності. Щоб з'ясувати роль форми бар'єру у вигляді перевернутої параболи (що використовується у підході Хілла-Уілера), ми провели розрахунки проникності такого бар'єру за допомогою методу БВВ. Результат таких розрахунків представлено на Рис. **К.3**. З цього рисунку можна бачити, що проникність у підході БВВ (див. штрих-пунктирну зелену лінію на цьому рисунку) суттєво відрізняється від її значення у підході Хілла-Уілера (див. штрихову червону лінію на цьому рисунку). Тільки проникність у точці перетину між усіма кривими на цьому рисунку грає роль у розрахунках перерізу, що пояснює непогану згоду між перерізом, розрахованим у підході

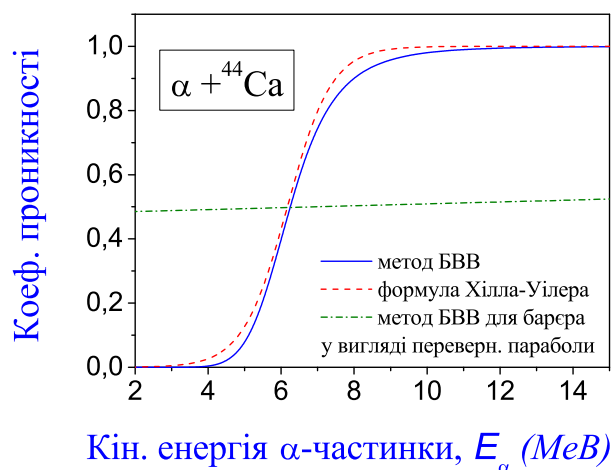


Рис. К.3 Проникність бар'єру у вигляді перевернутої параболи, який використовується у підході Хілла-Уілера [318], для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$, розрахована за допомогою методу БВВ (параметри розрахунків: 1000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм). Такі розрахунки представлено штрихпунктирною зеленою лінією на рисунку. Для порівняння, ми додаємо на рисунок розрахунки проникності для оригінального бар'єру методом БВВ (див. суцільну синю лінію) та у підході Хілла-Уілера (див. штрихову червону лінію), що також показані на попередньому Рис. К.2. Цей результат ясно показує, що метод БВВ дає суттєво іншу залежність проникності від енергії, ніж підхід Хілла-Уілера (окрім точки перетину між усіма лініями на рисунку). Причина такої відмінності між розрахунками, виконаними за допомогою обох підходів, стане більш ясною, якщо ми порівняємо форми бар'єру у вигляді перевернутої параболи та оригінального бар'єру. Таке порівняння показує, що немає співпадіння між цими розрахунками, за винятком достатньо малої області близ максимуму бар'єра (саме у цій області виникають близькі оцінки парціальних перерізів, які важливі при сумуванні для визначення повного перерізу).

Число інтервалів	$r_{\max} = 50$ фм			$r_{\max} = 200$ фм		
	1 MeV	15 MeV	30 MeV	1 MeV	15 MeV	30 MeV
10000	0.48634	0.53097	0.57703	0.49473	0.51760	0.54100
20000	0.48086	0.52368	0.56866	0.44806	0.49275	0.54366
30000	0.48226	0.52432	0.56828	0.47961	0.51829	0.55901
40000	0.48018	0.52204	0.56617	0.48752	0.53010	0.57372
50000	0.48019	0.52197	0.56601	0.47070	0.51346	0.55993
$V(r_{\max})$	-3747000			-95000000		

Табл. **К.4**. Проникність бар'єру у вигляді перевернутої параболи для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$, розрахована за допомогою метода БВВ для різних значень числа інтервалів та зовнішньої межі r_{\max} . Параметри бар'єру у вигляді перевернутої параболи визначаються, відповідно до підходу Хілла-Уілера [318], яким апроксимується оригінальний бар'єр при параметризації [112]. У таких розрахунках ми не включили ймовірності злиття. $V(r_{\max})$ — значення потенціалу у вигляді перевернутої параболи у точці r_{\max} (MeV).

Хілла-Уілера, та експериментальними даними. Однак, з аналізу розрахунків наведених вище, сте зрозумілим, що гарної згоди між розрахунками у підході Хілла-Уілера та експериментальними даними ще не достатньо для підтвердження ефективності такого підходу. У Табл. **К.4** ми показуємо збіжність розрахунків проникності у підході БВВ для такого бар'єру у вигляді перевернутої параболи. Більш того, підхід ВКБ включає форму бар'єру на області тунелювання при визначенні проникності. Тому, він більш істотно враховує форму бар'єру у розрахунках перерізів злиття.

К.7. Порівняння методу БВВ з методом Нумерова

Коефіцієнти проникності та відбиття можна визначити на основі хвильових функцій, отриманих шляхом прямого інтегрування радіального рівняння Шродінгера з високою точністю, за допомогою метода Нумерова. У цьому

розділі ми проаналізуємо ефективність такого методу при визначенні коефіцієнтів у порівнянні з методом БВВ. Виберемо для аналізу реакцію $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$.

Ми будемо використовувати таке ж розділення повної радіальної області на N областей, як у (10.5), та ми припускаємо, що захоплення α -частинки ядром відбувається у першій просторовій області після її тунелювання через бар'єр. Ми визначаємо нормовану радіальну хвильову функцію як

$$\chi(r) = \begin{cases} \exp(-ik_1 r), & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 \quad (\text{область } 1), \\ A_2 c_2(r) + B_2 d_2(r), & \text{при } r_1 \leq r \leq r_{\max}, \end{cases} \quad (\text{K.37})$$

де A_2 і B_2 — невідомі комплексні амплітуди, $c_2(r)$ і $d_2(r)$ — лінійно незалежні часткові розв'язки радіального рівняння Шродінгера з потенціалом, визначеним за формулами (10.10)–(10.12). Ці амплітуди знаходяться з умови неперервності повної хвильової функції та її похідної у точці r_1 . У результаті, ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{Re}(A_2) &= N_0 [\cos(k_1 r_1) d_2'(r_1) + k_1 \sin(k_1 r_1) d_2(r_1)], \\ \text{Im}(A_2) &= N_0 [k_1 \cos(k_1 r_1) d_2(r_1) - \sin(k_1 r_1) d_2'(r_1)], \\ \text{Re}(B_2) &= -N_0 [\cos(k_1 r_1) c_2'(r_1) + k_1 \sin(k_1 r_1) c_2(r_1)], \\ \text{Im}(B_2) &= -N_0 [k_1 \cos(k_1 r_1) c_2(r_1) - \sin(k_1 r_1) c_2'(r_1)], \end{aligned} \quad (\text{K.38})$$

де

$$N_0 = \frac{1}{c_2(r_1) d_2'(r_1) - c_2'(r_1) d_2(r_1)}. \quad (\text{K.39})$$

Ми визначаємо часткові розв'язки для хвильових функцій $c_2(r)$ і $d_2(r)$ таким чином, щоб в асимптотичній області, починаючи з деякої обраної межі r_{as} , вони повністю дорівнювали кулонівським функціям, саме як $c_2(r) = G_{l=0}(r)$, $d_2(r) = F_{l=0}(r)$. Щоб знайти невідомі хвильові функції та їх похідні в області $r_1 \leq r \leq r_{\text{as}}$ (де немала ядерна компонента потенціалу), ми обчислимо їх чисельно, використовуючи метод Нумерова. Можна записати повну хвильову функцію в асимптотичній області через комбінацію падаючої та відбитої

хвиль відносно бар'єру як

$$\chi(r) = A_{\text{inc}} [G_0(r) - i F_0(r)] + A_{\text{ref}} [G_0(r) + i F_0(r)], \quad (\text{K.40})$$

де ми ввели амплітуди A_{inc} і A_{ref} для падаючої та відбитої хвиль. Такі амплітуди можна переписати як

$$A_{\text{inc}} = \frac{A_2 + i B_2}{2}, \quad A_{\text{ref}} = \frac{A_2 - i B_2}{2}, \quad (\text{K.41})$$

де амплітуда проходження дорівнює одиниці, $A_{\text{tr}} = 1$. Беручи до уваги властивість $G_0 F'_0 - G'_0 F_0 = 1$ для кулонівських функцій, ми отримуємо наступні розв'язки для коефіцієнтів проникності та відбиття:

$$T = \frac{4k_1}{k} \frac{1}{f_1 + f_2}, \quad R = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}, \quad (\text{K.42})$$

де

$$\begin{aligned} f_1 &= [\text{Re}(A_2)]^2 + [\text{Im}(A_2)]^2 + [\text{Re}(B_2)]^2 + [\text{Im}(B_2)]^2, \\ f_2 &= 2 [\text{Im}(A_2) \text{Re}(B_2) - \text{Re}(A_2) \text{Im}(B_2)]. \end{aligned} \quad (\text{K.43})$$

Щоб порівняти ефективність методу Нумерова та методу БВВ у визначенні коефіцієнтів проникнення та відбиття, ми розраховуємо ці коефіцієнти у залежності від зовнішньої межі r_{max} та числа інтервалів N обома методами. Результати розрахунку цих коефіцієнтів представлено у Таблицях **К.5** і **К.6**. На основі цих результатів, ми робимо наступні висновки:

1. Щоб оцінити точність визначення коефіцієнтів проникності і відбиття, ми використовуємо стандартний тест квантової механіки, знаходячи параметер $\varepsilon_1 = ||T + R| - 1|$ кожним методом. Підхід Нумерова визначає ці коефіцієнти з точністю $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, тоді як точність методу БВВ обмежена лише потужністю комп'ютера (у Таблицях, приведених вище, ми привели розрахунки по методу БВВ при $\varepsilon_1 \leq 10^{-16}$ для будь-яких обраних значень r_{max} та N).
2. Аналізуючи точність та стабільність у визначенні коефіцієнтів проникності та відбиття при варіації параметрів r_{max} і N , ми приходимо до

r_{\max} , фм	метод Нумерова			метод БВВ	
	T	R	ε_1	T	R
50	0.890661	0.109292	4.5×10^{-5}	0.99997095707	2.90429×10^{-5}
75	0.890581	0.109371	4.6×10^{-5}	0.99997116245	2.88375×10^{-5}
100	0.890661	0.109292	4.5×10^{-5}	0.99997139532	2.86046×10^{-5}
150	0.890822	0.109133	4.4×10^{-5}	0.99997145272	2.85472×10^{-5}
200	0.891300	0.108659	3.9×10^{-5}	0.99997147408	2.85259×10^{-5}
250	0.890982	0.108974	4.2×10^{-5}	0.99997142915	2.85708×10^{-5}

Табл. К.5. Коефіцієнти проникності T та відбиття R бар'єра при параметризації [112] для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ та енергії $E = 25$ МеВ, розраховані за допомогою метода Нумерова та метода БВВ, для різних значень зовнішньої межі r_{\max} . Тут, $\varepsilon_1 = ||T + R| - 1|$ — похибка, що оцінюється у якості теста знайдених коефіцієнтів; для розрахунків методом БВВ ми маємо $\varepsilon_1 < 10^{-16}$, Тут, ми не включаємо ймовірності злиття, число інтервалів — однакове та дорівнює 10000.

Число інтервалів	метод Нумерова			метод БВВ	
	T	R	ε_1	T	R
100	0.934547	0.065452	8.9×10^{-8}	0.95572409894	0.044275901
1000	0.894080	0.105897	2.1×10^{-5}	0.99997192337	2.80766×10^{-5}
10000	0.890822	0.109133	4.4×10^{-5}	0.99997145272	2.85472×10^{-5}
25000	0.890726	0.109228	4.5×10^{-5}	0.99997144515	2.85548×10^{-5}
50000	0.890533	0.109419	4.7×10^{-5}	0.99997144338	2.85566×10^{-5}

Табл. К.6. Коефіцієнти проникності T та відбиття R для бар'єра при параметризації [112] для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$ та енергії $E = 25$ МеВ, знайдені за допомогою метода Нумерова та метода БВВ для різних значень кількості інтервалів. Тут, $\varepsilon_1 = ||T + R| - 1|$ — похибка, що використовується у якості теста отриманих значень для коефіцієнтів, та ми маємо $\varepsilon_1 < 10^{-16}$ у розрахунках методом БВВ. Зовнішня межа — $r_{\max} = 150$ фм, та ми не включили ймовірності злиття у ці розрахунки.

висновку, що метод БВВ є суттєво більш точним, ніж метод Нумерова. Точність визначення цих коефіцієнтів методом Нумерова обмежена: ми отримуємо лише 3 стабільні цифри для цих коефіцієнтів при варіації параметрів r_{\max} та N . В той-же час, точність визначення цих коефіцієнтів методом БВВ безмежно збільшується при зростанні числа інтервалів N : ми досягаємо стабільності у визначенні перших 8 цифр для цих коефіцієнтів при $N \rightarrow 50000$ (див. Таблиці К.5 і К.6).

К.8. Роль ядерних деформацій у задачах α -захоплення

У цьому розділі ми проаналізуємо, наскільки зміняться отримані результати, якщо врахувати деформацію ядра-мішені. Ми обмежимося лише випадком аксіальних деформацій ядер. Для опису α -ядерної взаємодії, ми скористаємося потенціалом з параметризацією, запропонованою у роботі [112], яка була отримана для опису реакцій α -захоплення деформованими ядрами. Перерізи α -захоплення аксіально-деформованими ядрами можна визначити як

$$\sigma_{\text{capture}}(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2 m \tilde{E}} \int_0^{\pi/2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l + 1) T_l(\theta) P_l \sin \theta d\theta, \quad (\text{К.44})$$

де θ — кут між віссю аксіальної симетрії деформованого ядра та лінією, що пов'язує центри мас α -частинки та ядра, $T_l(\theta)$ — проникність бар'єра, що залежить від кута θ , та P_l — ймовірність злиття α -частинки з ядром.

Для виконання аналізу, ми виберемо реакцію захоплення $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$. Експериментальні дані параметру β статичних квадрупольних деформацій ми беремо з бази даних RIPL-2 324 (для ${}^{44}\text{Ca}$ ми маємо $\beta = 0.175423$). По-перше, ми проаналізуємо, наскільки проникність бар'єра зміниться після уключення деформації ядра. На Рис. К.4 (а) ми представляємо результати розрахунку проникності у залежності від кута деформації θ при $l = 0$. З рисунку можна бачити, що найбільший вплив ядерної деформації існує при кутах 0° та 90° ,

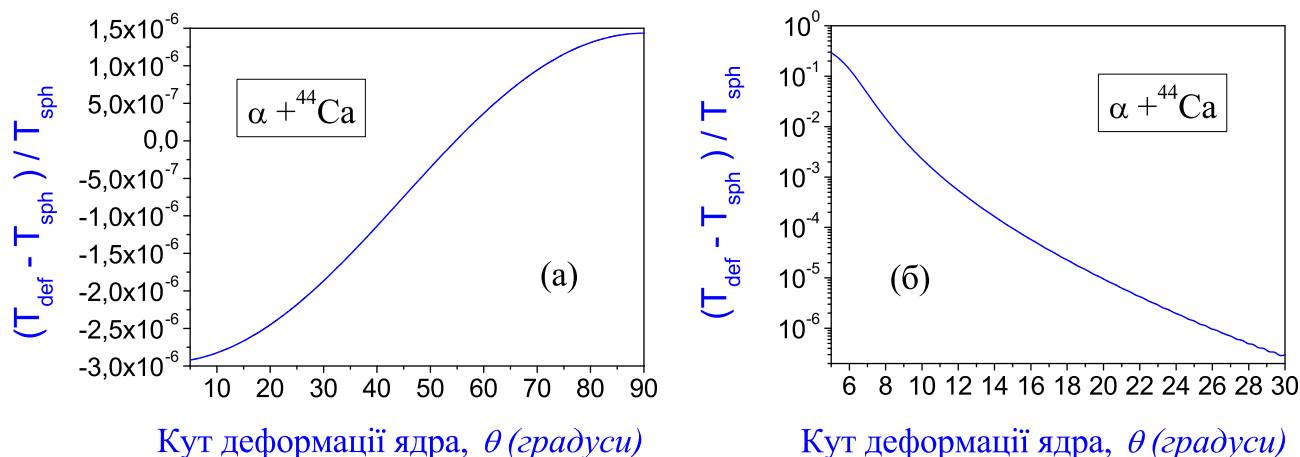


Рис. **К.4** Відношення коефіцієнта проникності бар'єра для деформованого ядра T_{def} до коефіцієнта проникності бар'єра для сферичного ядра T_{spher} , як функція кута деформації θ при енергії α -частинки 25 MeВ (а) та як функція енергії α -частинки при куті деформації $\theta = 90^\circ$ (б) для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ при $l = 0$, розраховані за допомогою метода БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 150$ фм). Тут T_{def} — проникність бар'єра для деформованого ядра, T_{spher} — проникність бар'єра для сферичного ядра.

тоді як при $\theta = 55^\circ$ такий вплив зникає повністю. Вибравши кут $\theta = 90^\circ$, ми проаналізуємо вплив ядерної деформації на значення проникності у залежності від енергії α -частинки. Результати таких розрахунків представлено на наступному Рис. **К.4** (б). З цього рисунку можна бачити, що врахування деформації ядра найбільш важливе для малих енергій α -частинки (при $E_\alpha = 5.1$ MeВ ми отримаємо співвідношення $(T_{\text{def}} - T_{\text{spher}})/T_{\text{spher}} = 0.27739$).

У Таблиці **К.7** ми представляємо результати визначення ймовірностей злиття за допомогою метода БВВ для реакції $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ після уключення деформацій ядра у розрахунки. Тут можна бачити, що метод БВВ дозволяє отримати такі коефіцієнти для деформованих ядер з точністю, подібною до точності для сферичних ядер. Відповідні перерізи для α -захоплення деформованим ядром ${}^{44}\text{Ca}$ з уключеними ймовірностями злиття представлено на Рис. **К.5**. Можна бачити, що лінія 3, що отримана для деформованого ядра, описує експериментальні данні з достатньо гарною точністю, подібною до лінії 2, що отримана для сферичного ядра. Ми спостерігаємо наявність малих

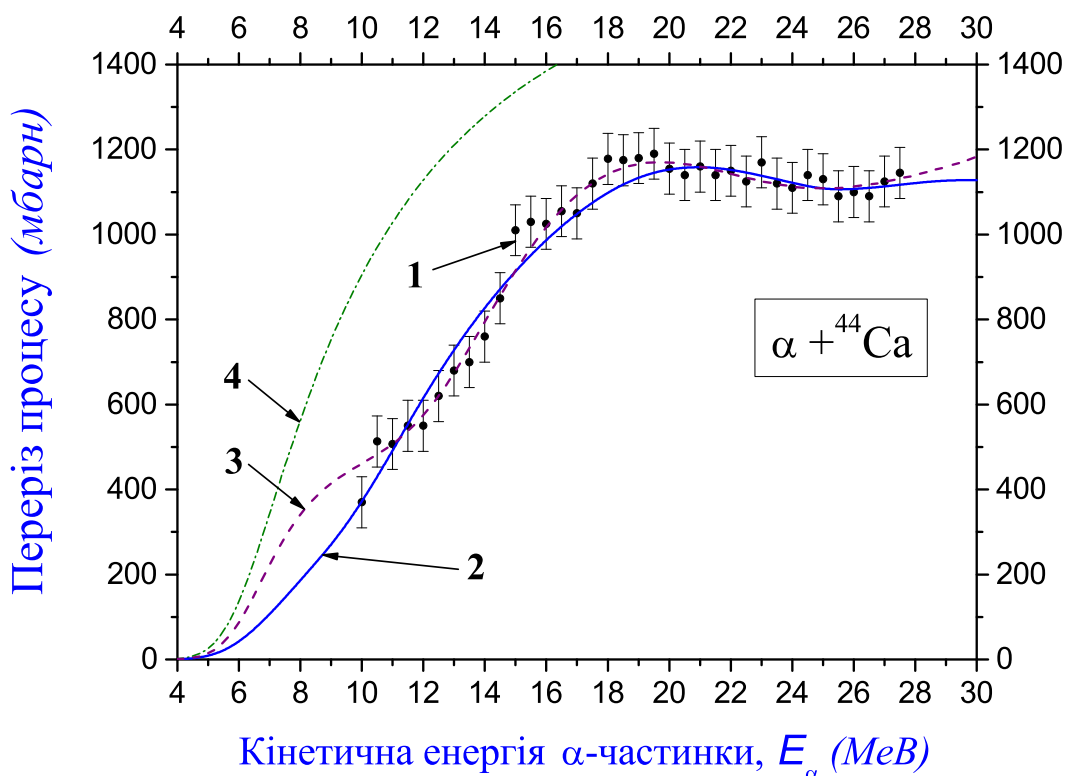


Рис.К.5 Перерізи захоплення α -частинки ядром ${}^{44}\text{Ca}$, розраховані за допомогою метода БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\text{max}} = 70$ фм, параметризацію обрано з роботи [112]). Тут, набір точок, що позначено номером 1, — це експериментальні дані з роботи [313], суцільна синя лінія 2 — переріз при $l_{\text{max}} = 17$ для сферичного ядра, штрихова пурпурна лінія 3 — переріз при $l_{\text{max}} = 17$ для деформованого ядра та штрих-пунктирна зелена лінія 4 — переріз при $l_{\text{max}} = 15$ для сферичного ядра [перерізи визначаються по формулі (К.44), де l_{max} — верхня межа сумування]. Лінії 2 і 3 отримані при включенні ймовірностей злиття у розрахунки, лінія 4 — без врахування ймовірностей злиття.

ядро	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
сферичне	0.04	0.03	0.01	0.01	0.43	0.31	0.62	0.31	0.71	1.00
деформоване	0.14	0.48	0.62	0.32	0.56	0.14	0.22	0.18	0.16	1.00

ядро	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}
сферичне	1.00	1.00	1.00	0.67	0.09	0.01	0.91	1.00	0.01
деформоване	1.00	0.72	0.38	0.02	0.23	0.51	1.00	1.00	0.01

Табл. К.7. Ймовірності злиття при захопленні α -частинки сферичним та деформованим ядрами ^{44}Ca , визначені за допомогою метода БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при $r_{\max} = 70$ фм; $\varepsilon_1 = 0.0191$, $\varepsilon_2 = 0.0263$ та $\varepsilon_3 = 0.0040$ — похибки при отриманні результатів для деформованого ядра).

осциляцій спектру після уключення деформації ядра у розрахунки.

ДОДАТОК Л

Розрахунки параметрів пакету у задачах квантової космології з тунелюванням

Л.1. Тунелювання пакету крізь прямокутний бар'єр

Розглянемо загальну проблему квантового тунелювання пакету через бар'єри, що використовуються у квантовій космології. Ми будемо вивчати такий процес на основі підходу багаторазових внутрішніх відбиттів (див. основні ідеї, опис формалізму, аналіз властивостей методу при тунелюванні у роботах [263, 264, 265, 54, 71, 96, 73], перші роботи [266, 267, 268], також деякі розробки та застосування у інших задачах у роботах [271]). Але, поперш, ми розглянемо головну ідею багаторазових внутрішніх відбиттів при описі пакета, що тунелює у позитивному напрямку вздовж півосі по змінній масштабного фактору a . Осциляції цього пакета у внутрішній ямі потрібно включити у аналіз. Так, ми виберемо найпростіший потенціал [78]: $V(a) = -V_0$ при $0 < a < R_1$ (внутрішня область I), $V(a) = V_1$ при $R_1 < a < R_2$ (область бар'єра II) та $V(a) = 0$ при $a > R_2$ (зовнішня область III). Розглянемо випадок, коли повна енергія системи E більше ніж висота бар'єра V_1 ($E > V_1$).

На першому етапі, ми розглядаємо старт пакету у області I. Цей пакет поширюється направо та падає на першу межу бар'єра у точці R_1 :

$$\psi_{\text{inc}}^{(1)}(a, \tau) = \int_{E_{\text{min}}}^{+\infty} g(E - \bar{E}_{\text{rad}}) e^{ik_1 a - iE\tau} dE \quad \text{при } 0 < a < R_1, \quad (\text{Л.1})$$

де $k_1 = \sqrt{E + V_0}$, E — енергія. Амплітуду $g(E - \bar{E}_{\text{rad}})$ можна вибрати у стандартній формі гаусіана при нормуванні $\int |g(E - \bar{E}_{\text{rad}})|^2 dE = 1$, значення \bar{E}_{rad} — середня енергія. Цей пакет перетворюється у два нові пакети: перший

пакет проходить крізь цю межу та поширюється далі у області II, та другий пакет, який відбивається від цієї межі та поширюється назад у області I:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{tr}}^{(1)}(a, \tau) &= \int_{E_{\min}}^{+\infty} g(E - \bar{E}_{\text{rad}}) \alpha^{(1)} e^{ia_2 a - iE\tau} dE \quad \text{при } R_1 < a < R_2, \\ \psi_{\text{ref}}^{(1)}(a, \tau) &= \int_{E_{\min}}^{+\infty} g(E - \bar{E}_{\text{rad}}) A_R^{(1)} e^{-ik_1 a - iE\tau} dE \quad \text{при } 0 < a < R_1,\end{aligned}\tag{Л.2}$$

де $k_2 = \sqrt{E - V_1}$. Нові невідомі коефіцієнти $\alpha^{(1)}$ та $A_R^{(1)}$ ми знаходимо, використовуючи умову неперервності повної хвильової функції $\psi(a, \tau)$ та її похідної у точці R_1 :

$$\alpha^{(1)} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{i(k_1 - k_2)R_1}, \quad A_R^{(1)} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{2ik_1 R_1}.\tag{Л.3}$$

На другому етапі ми розглянемо подальше поширення пакету $\psi_{\text{tr}}^{(1)}(a, \tau)$, який падає на другу межу у точці R_2 . Цей пакет перетворюється у два нові пакети: перший пакет проходить крізь цю межу та поширюється далі у області III, та другий пакет, який відбивається від цієї межі та поширюється обратно у області II. Ми визначимо ці пакети у вигляді

$$\psi^{(2)}(a, \tau) = \int_{E_{\min}}^{+\infty} g(E - \bar{E}_{\text{rad}}) \varphi^{(2)}(a) e^{-iE\tau} dE,\tag{Л.4}$$

де у якості стаціонарних частин ми використовуємо

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inc}}^{(2)}(a) &= \alpha^{(1)} e^{ik_2 a} \quad \text{при } R_1 < a < R_2, \\ \varphi_{\text{tr}}^{(2)}(a) &= A_T^{(1)} e^{ika} \quad \text{при } a > R_2, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(2)}(a) &= \beta^{(1)} e^{-ik_2 a} \quad \text{при } R_1 < a < R_2,\end{aligned}\tag{Л.5}$$

де $k = \sqrt{E}$. Якщо накладити умови неперервності на повну хвильову функцію та її похідну у точці R_2 , то ми отримаємо два нові рівняння, з яких ми знаходимо нові невідомі амплітуди $A_T^{(1)}$ та $\beta^{(1)}$:

$$\begin{aligned}A_T^{(1)} &= T_2^+ \cdot \alpha^{(1)}, \quad T_2^+ = \frac{2k_2}{k_2 + k} e^{i(k_2 - k)R_2}, \\ \beta^{(1)} &= R_2^+ \cdot \alpha^{(1)}, \quad R_2^+ = \frac{k_2 - k}{k_2 + k} e^{2ik_2 R_2}.\end{aligned}\tag{Л.6}$$

Тут ми увели два нових коефіцієнта T_2^+ , R_2^+ , які пов'язують амплітуду $A_T^{(1)}$ хвилі, що пройшла крізь межу, амплітуду $\beta^{(1)}$ хвилі, відбитої від цієї межі, з амплітудою $\alpha^{(1)}$ падаючої хвилі на першому етапі. Надалі ми будемо використовувати нижній індекс для позначення номера межі, що розглядається, верхній знак “+” або “-” — для позначення руху уздовж позитивного (направо) або негативного (наліво) напрямку падаючої хвилі, відповідно. Таким чином, можна записати $T_1^+ = \alpha^{(1)}$ та $R_1^+ = A_R^{(1)}$.

На третьому етапі ми розглянемо подальше поширення відбитого пакету $\psi_{\text{ref}}^{(2)}$ на області II. Після падіння на першу межу, він перетворюється у новий пакет $\psi_{\text{tr}}^{(3)}$, який пройшов крізь цю межу та поширюється у області I, та інший новий пакет $\psi_{\text{ref}}^{(3)}$, який описує відбиття від межі та поширюється назад у області II. Ми визначимо ці нові пакети за допомогою формули (Л.4) (з верхнім індексом 3), де як стаціонарні частини слід використати

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{inc}}^{(3)}(a) &= \varphi_{\text{ref}}^{(2)}(a) && \text{при } R_1 < a < R_2, \\ \varphi_{\text{tr}}^{(3)}(a) &= A_R^{(2)} e^{-ik_1 a} && \text{при } 0 < a < R_1, \\ \varphi_{\text{ref}}^{(3)}(a) &= \alpha^{(2)} e^{ik_2 a} && \text{при } R_1 < a < R_2. \end{aligned} \quad (\text{Л.7})$$

Ми знаходимо невідомі амплітуди $A_R^{(2)}$ та $\alpha^{(2)}$ з умов неперервності повної фвильової функції та її похідної у точці R_1 :

$$\begin{aligned} A_T^{(2)} &= T_1^- \cdot \beta^{(1)}, & T_1^- &= \frac{2k_2}{k_1 + k_2} e^{i(k_1 - k_2)R_1}, \\ \alpha^{(2)} &= R_1^- \cdot \beta^{(1)}, & R_1^- &= \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} e^{-2ik_2 R_1}. \end{aligned} \quad (\text{Л.8})$$

На четвертому етапі ми розглянемо подальший рух відбитого пакета $\psi_{\text{ref}}^{(1)}$ у області I, що був сформований на 1-му етапі. Цей пакет падає на першу межу у точці $a = 0$, та перетворюється у новий пакет, що поширюється направо. Тут ми можемо увести різний опис походження можливих (источники, sources) у точці $a = 0$, з повним проходженням (подібно до випадку у сферично симетричного розгляду квантових розпадів у ядерній фізиці, що є

3-вимірним та ми не маємо додаткових меж у точці $a = 0$) або, навпаки, повному відбиттю, що використовується у інших квантових підзодах (подібно до уведенню безмежного потенціальної стінки у точці $a = 0$ у роботі [388]). З метою створити можливість працювати з різними такими рохглядами, ми запишемо

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inc}}^{(4)}(a) &= \varphi_{\text{ref}}^{(1)}(a), \\ \varphi_{\text{tr}}^{(4)}(a, k_1) &= R_0^- \cdot \varphi_{\text{inc}}^{(4)}(a, -k_1) = A_{\text{ref}}^{(4)} e^{ik_1 a}\end{aligned}\tag{Л.9}$$

де

$$A_{\text{ref}}^{(4)} = R_0^- \cdot A_{\text{inc}}^{(1)}.\tag{Л.10}$$

Для опису повного проходження крізь цю межу (без будь-яких відбиттів), ми отримаємо $R_0^- = -1$. Якщо нам потрібно увести безмежну потенціальну стінку у $a = 0$, то ми отримаємо $R_0^- = -1$.

Аналізуючи подальші відбиття та проходження пакетів відносно меж таким чином, можна прийти до висновку, що любий наступний етап буде повністю подібним до одного з 4 розглянутих вище. З аналізу цих етапів ми знаходимо рекурентні співвідношення для визначення невідомих амплітуд $A_{\text{inc}}^{(n)}$, $A_R^{(n)}$, $A_T^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$ та $\beta^{(n)}$ для довільного етапу з номером n , та ми знаходимо сім цих амплітуд. Однак, такі суми обчислити більш легко, якщо застосувати коефіцієнти T_i^\pm та R_i^\pm . Аналізуючи усі можливі “шляхи” поширення ісіх

можливих пакетів в області бар'єра та внутрішньої ями, ми отримуємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} &= 1 + \tilde{R}_1^+ R_0^- + \tilde{R}_1^+ R_0^- \cdot \tilde{R}_1^+ R_0^- + \dots = \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_1^+ R_0^-)^m = \frac{1}{1 - \tilde{R}_1^+ R_0^-}, \\
\sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)} &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \left\{ T_1^+ T_2^+ + \right. \\
&\quad \left. + T_1^+ \cdot R_2^+ R_1^- \cdot T_2^+ + \dots \right\} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \tilde{T}_2^+, \\
\sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)} &= \tilde{R}_1^+ + \tilde{R}_1^+ R_0^- \tilde{R}_1^+ + \tilde{R}_1^+ R_0^- \tilde{R}_1^+ R_0^- \tilde{R}_1^+ + \dots = \\
&= \tilde{R}_1^+ \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_0^- \tilde{R}_1^+)^m \right) = \\
&= \frac{\tilde{R}_1^+}{1 - R_0^- \tilde{R}_1^+} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \tilde{R}_1^+,
\end{aligned} \tag{Л.11}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_1^+ &= R_1^+ + T_1^+ R_2^+ T_1^- \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^m \right) = \\
&= R_1^+ + \frac{T_1^+ R_2^+ T_1^-}{1 - R_2^+ R_1^-}, \\
\tilde{T}_2^+ &= T_1^+ T_2^+ \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_2^+ R_1^-)^m \right) = \frac{T_1^+ T_2^+}{1 - R_2^+ R_1^-}.
\end{aligned} \tag{Л.12}$$

Результуючі вирази для падаючого пакета, пакета, що пройшов, та відбитого пакета відносно бар'єра записуються у вигляді (Л.4), де наступні стаціонарні хвильові функції потрібно використати:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{inc}}(a) &= e^{ik_1 a} \quad \text{при } 0 < a < R_1, \\
\varphi_{\text{tr}}(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_T^n e^{ika} \quad \text{при } a > R_2, \\
\varphi_{\text{ref}}(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_R^n e^{-ik_1 a} \quad \text{при } 0 < a < R_1.
\end{aligned} \tag{Л.13}$$

На завершення, ми визначаємо повні амплітуди

$$\begin{aligned}
A_T &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)}, \quad A_R = \sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)}, \\
\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{(n)} = \frac{\tilde{T}_2^+}{T_2^+}, \quad \beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta^{(n)} = \alpha \cdot R_2^+
\end{aligned} \tag{Л.14}$$

та коефіцієнти T і R , що характеризують проникнення пакета з внутрішньої області назовні та його відбиття від бар'єра

$$\begin{aligned} T_{MIR} &\equiv \frac{k}{k_1} |A_T|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot T_{\text{bar}}, & T_{\text{bar}} &= \frac{k}{k_1} |\tilde{T}_1^+|^2, \\ R_{MIR} &\equiv |A_R|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot R_{\text{bar}}, & R_{\text{bar}} &= |\tilde{R}_1^+|^2. \end{aligned} \quad (\text{Л.15})$$

Тут T_{bar} та R_{bar} — коефіцієнти проникнення та відбиття відносно бар'єра, $|A_{\text{inc}}|^2$ — коефіцієнт, що характеризує осциляції пакета у внутрішній області (він являє собою повністю квантовий аналог нормуючого множника F , уведеного наприклад у роботі [140] при квазікласичному описі розпаду ядра).

Суми $\sum A_{\text{inc}}^{(n)}$, $\sum A_T^{(n)}$, $\sum A_R^{(n)}$, $\sum \alpha^{(n)}$ та $\sum \beta^{(n)}$, які знаходяться за допомогою метода багаторазових внутрішніх відбиттів, співпадають у точності з відповідними амплітудами A_{inc} , A_T , A_R , α та β , що розраховуються за допомогою стандартного стаціонарного підходу (де використовується умова неперервності стаціонарної повної хвильової функції та її похідної на кожній межі, та хвильова функція не дорівнює нулю при $a = 0$). Ми перевіряємо виконання властивості:

$$\frac{k}{k_1} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1 \quad \text{або} \quad T_{MIR} + R_{MIR} = 1, \quad (\text{Л.16})$$

що виконується та підтверджує те, що метод БВВ дає нам коректний розв'язок хвильової функції. Якщо енергія виявляється меншою ніж висота бар'єра, то для опису проникнення хвилі крізь такий бар'єр з тунелюванням слід використати наступну заміну [264, 54, 71]:

$$k_2 \rightarrow i\xi, \quad \xi = \sqrt{E - V_1}. \quad (\text{Л.17})$$

Тоді всі знайдені вище розв'язки можна використати для опису тунелювання через бар'єр.

Л.2. Тунелювання пакета через бар'єр, що складається з довільного числа прямокутних сходинок

Тепер давайте розглянемо більш складну задачу про тунелювання пакета через радіальний бар'єр довільної форми, який використовується у задачах квантової космології. Щоб застосувати ідею багаторазових внутрішніх відбиттів для аналізу тунелювання пакета через бар'єр, нам потрібно узагальнити формалізм багаторазових внутрішніх відбиттів, що викладено вище. Будемо вважати, що повний потенціал можна з достатньо гарною апроксимацією описати через скінчене число N прямокутних сходинок:

$$V(a) = \begin{cases} V_1 & \text{при } a_{\min} < a \leq a_1 & \text{(область 1),} \\ V_2 & \text{при } a_1 < a \leq a_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & \text{при } a_{N-1} < a \leq a_{\max} & \text{(область } N\text{),} \end{cases} \quad (\text{Л.18})$$

де V_i — сталі ($i = 1 \dots N$). Припустимо, що пакет починає поширюватися назовні з внутрішньої області з деяким довільно обраним номером M (для зручності, позначимо її ліву межу a_{M-1} як a_{start}) зліва від бар'єра. Ми будемо шукати розв'язок для енергії вище бар'єра, тоді як розв'язок для випадку тунелювання можна потім отримати, використовуючи заміну $i \xi_i \rightarrow k_i$. Загальний розв'язок для хвильової функції (з точністю до її нормування) має

наступний вигляд:

$$\varphi(a) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 e^{ik_1 a} + \beta_1 e^{-ik_1 a} \\ \quad \text{при } a_{\min} \leq a \leq a_1 \quad (\text{область } 1), \\ \dots \\ \alpha_{M-1} e^{ik_{M-1} a} + \beta_{M-1} e^{-ik_{M-1} a} \\ \quad \text{при } a_{M-2} \leq a \leq a_{M-1} \quad (\text{область } M-1), \\ e^{ik_M a} + A_R e^{-ik_M a} \\ \quad \text{при } a_{M-1} < a \leq a_M \quad (\text{область } M), \\ \alpha_{M+1} e^{ik_{M+1} a} + \beta_{M+1} e^{-ik_{M+1} a} \\ \quad \text{при } a_M \leq a \leq a_{M+1} \quad (\text{область } M+1), \\ \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} a} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} a} \\ \quad \text{при } a_{N-2} \leq a \leq a_{N-1} \quad (\text{область } N-1), \\ A_T e^{ik_N a} \text{ при } a_{N-1} \leq a \leq a_{\max} \quad (\text{область } N), \end{array} \right. \quad (\text{Л.19})$$

де α_j та β_j — невідомі амплітуди, A_T та A_R — невідомі амплітуди проходження та відбиття, $k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_i)}$ — комплексні хвильові числа. Ми зафіксували нормування таким чином, щоб модуль першої хвилі $e^{ik_M a}$ на старті дорівнював одиниці. Ми будемо шукати розв'язок такої задачі на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів.

Припустимо, що пакет стартує у області з номером M та далі поширюється вправо. Ми будемо вивчати його поширення відносно правої частини потенціалу з бар'єром, починаючи з цієї області. У відповідності до метода багаторазових внутрішніх відбиттів, розсіяння пакету на бар'єрі розглядається по етапах його послідовного поширення відносно кожної межі бар'єру (найбільш ясно можна зрозуміти ідею такого підходу у задачі тунелювання через найпростіший прямокутний бар'єр, див. [264, 54, 71], де можна знайти обґрунтування такого повністю квантового точно розв'язуваного методу, а

також аналіз його властивостей). Кожний етап у такому розгляді поширення пакетів виявляється подібним до одного з перших $2N - 1$ етапів, що між собою незалежні. При виконанні аналізу цих етапів, можна отримати рекурентні співвідношення для обчислення невідомих амплітуд $A_T^{(n)}$, $A_R^{(n)}$, $\alpha_j^{(n)}$ та $\beta_j^{(n)}$ для довільного етапу з номером N (для області з номером j) та обчислити суми цих амплітуд (точно аналітично). Ми будемо шукати невідомі амплітуди, використовуючи умови неперервності хвильової функції та її похідної на кожній межі. Для зручності подальших розрахунків, ми введемо коефіцієнти $T_1^\pm, T_2^\pm \dots$ та $R_1^\pm, R_2^\pm \dots$ в якості додаткових множників до амплітуд $e^{\pm i k a}$. Тут нижній індекс позначає номер області, а верхній знак “+” або “-” — напрямок руху хвилі вправо або вліво, відповідно. По-перше, ми обчислюємо $T_1^\pm, T_2^\pm \dots T_{N-1}^\pm$ та $R_1^\pm, R_2^\pm \dots R_{N-1}^\pm$:

$$\begin{aligned} T_j^+ &= \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})a_j}, & T_j^- &= \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})a_j}, \\ R_j^+ &= \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j a_j}, & R_j^- &= \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} a_j}. \end{aligned} \quad (\text{Л.20})$$

Аналізуючи всі можливі “шляхи” поширення усіх можливих пакетів на області бар’єру та внутрішньої ями, ми знаходимо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} &= 1 + \tilde{R}_M^+ \tilde{R}_{M-1}^- + \tilde{R}_M^+ \tilde{R}_{M-1}^- \cdot \tilde{R}_M^+ \tilde{R}_{M-1}^- + \dots = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_M^+ \tilde{R}_{M-1}^-)^m = \frac{1}{1 - \tilde{R}_M^+ \tilde{R}_{M-1}^-}, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)} &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \left\{ \tilde{T}_{N-2}^+ T_{N-1}^+ + \tilde{T}_{N-2}^+ \cdot R_{N-1}^+ \tilde{R}_{N-2}^- \cdot T_{N-1}^+ + \dots \right\} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \tilde{T}_{N-1}^+, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)} &= \tilde{R}_M^+ + \tilde{R}_M^+ \cdot \tilde{R}_{M-1}^- \tilde{R}_M^+ + \tilde{R}_M^+ \cdot \tilde{R}_{M-1}^- \tilde{R}_M^+ \cdot \tilde{R}_{M-1}^- \tilde{R}_M^+ + \dots = \\ &= \tilde{R}_M^+ \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_{M-1}^- \tilde{R}_M^+)^m \right) = \\ &= \frac{\tilde{R}_M^+}{1 - \tilde{R}_{M-1}^- \tilde{R}_M^+} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_{\text{inc}}^{(n)} \right) \cdot \tilde{R}_M^+, \end{aligned} \quad (\text{Л.21})$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{j-1}^+ &= R_{j-1}^+ + T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-)^m \right) = \\
&= R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - \tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-}, \\
\tilde{R}_{j+1}^- &= R_{j+1}^- + T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = \\
&= R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}, \\
\tilde{T}_{j+1}^+ &= \tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}.
\end{aligned} \tag{Л.22}$$

Вибравши в якості стартової наступні значення:

$$\tilde{R}_{N-1}^+ = R_{N-1}^+, \quad \tilde{R}_M^- = R_M^-, \quad \tilde{T}_M^+ = T_M^+, \tag{Л.23}$$

ми знаходимо коефіцієнти $\tilde{R}_{N-2}^+ \dots \tilde{R}_M^+$, $\tilde{R}_{M+1}^- \dots \tilde{R}_{N-1}^-$ та $\tilde{T}_{M+1}^+ \dots \tilde{T}_{N-1}^+$.

Розглянемо подальшу еволюцію пакетів, що поширюються в області з номером M ліворуч. Такі пакети формуються у наслідок усіх можливих відбиттів відносно правої частини потенціалу, починаючи з межі a_M . У попередньому розділі для опису їх відбиття від лівої межі R_0 праворуч ми використовували коефіцієнт R_0^- . Тепер, якщо нам потрібно перейти від простої межі a_{M-1} до лівої частини потенційної ями, починаючи від цієї точки до a_{\min} , то нам слід узагальнити коефіцієнт R_{M-1}^- на \tilde{R}_{M-1}^- . Виявляється, що середня рекурентна формула у (Л.22) працює у такому разі також, де для визначення T_i^\pm та R_i^\pm ми повинні використати рівняння (Л.20). На завершення, ми визначаємо коефіцієнти α_j та β_j :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_j^{(n)} &= \tilde{T}_{j-1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) = \frac{\tilde{T}_{j-1}^+}{1 - R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+}{T_j^+}, \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_j^{(n)} &= \tilde{T}_{j-1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) R_j^+ = \frac{\tilde{T}_{j-1}^+ R_j^+}{1 - \tilde{R}_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+ R_j^+}{T_j^+},
\end{aligned} \tag{Л.24}$$

амплітуди проходження та відбиття:

$$\begin{aligned} A_T &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)}, & A_R &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)}, \\ \alpha_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_j^{(n)} = \frac{\tilde{T}_j^+}{T_j^+}, & \beta_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_j^{(n)} = \alpha_j \cdot R_j^+ \end{aligned} \quad (\text{Л.25})$$

і коефіцієнти T та R , що описують проникнення пакету з внутрішньої області назовні та його відбиття від бар'єру

$$\begin{aligned} T_{MIR} &\equiv \frac{k_N}{k_M} |A_T|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot T_{\text{bar}}, & T_{\text{bar}} &= \frac{k_N}{k_M} |\tilde{T}_{N-1}^+|^2, \\ R_{MIR} &\equiv |A_R|^2 = |A_{\text{inc}}|^2 \cdot R_{\text{bar}}, & R_{\text{bar}} &= |\tilde{R}_M^+|^2. \end{aligned} \quad (\text{Л.26})$$

У випадку $a_{\min} = 0$, ми отримуємо можливість описати повне проходження пакету через цю межу (без відбиття), де ми маємо $R_0^- = -1$ (було б цікаво проаналізувати результати при варіації R_0^-). Ми перевіряємо виконання властивості:

$$\frac{k_N}{k_M} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1 \quad \text{або} \quad T_{MIR} + R_{MIR} = 1, \quad (\text{Л.27})$$

яку ми використовуємо як тест, чи дає метод правильне рішення для хвильової функції. Тепер, якщо енергія пакета знаходиться нижче ніж висота однієї сходинки з номером M , то слід використати наступну заміну:

$$k_m \rightarrow i \xi_m. \quad (\text{Л.28})$$

Для бар'єра, що складається з двох прямокутних потенціальних сходінок довільної ширини та висоти, ми отримали збіг між амплітудами, розрахованими за допомогою метода БВВ, та відповідними амплітудами, що знаходяться у стандартному підході квантової механіки з точністю до перших 15 цифр. Збільшення числа потенціальних сходінок до декількох тисяч зберігає таку точність та виконання властивості (Л.27) (див. Додаток Б у [73], де можна знайти деталі і опис алгоритмів розрахунків амплітуд для загальної задачі радіального розпаду у квантовій механіці). Зокрема, ми повністю відтворюємо картини проникнення та відбиття, що представлені на Рис. 12.2 (а) і

(б), Рис. 12.3 (а) і (б), Рис. 12.4 (б) [див. стор. 295–298], але за виконанням стандартної техніки квантової механіки. Отже, *результат осциляторної залежності проникності від положення точки старту a_{start} на таких рисунках є не залежним від повністю квантового методу, обраного для обчислень.*

Це важливий тест, який підтверджує надійність та працездатність методу БВВ. Отже, ми отримали повний збіг між усіма амплітудами, що розраховуються за допомогою методу БВВ, і відповідними амплітудами, отриманими у стандартному підході квантової механіки. Саме таким чином, ми узагальнюємо метод БВВ для опису тунелювання пакету через потенціал, що складається з довільної кількості прямокутних бар'єрів та ям довільних розмірів.

ДОДАТОК М

Розрахунки радіальних інтегралів у задачі тунелювання з дисипацією крізь бар'єри Альбрехта

М.1. Розрахунки інтегралів I_1 , I_2 та I_3

У цьому додатку ми будемо шукати інтеграли I_1 , I_2 та I_3 , що визначені у (13.21) [див. стор. 315]. Поперш, запишемо перший інтеграл:

$$\begin{aligned}
 I_1(E_1, E_2) = & \int_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x} dx + A_{R,1}^* \int_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x} dx + \\
 & + A_{R,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x} dx + (A_{T,1}^* A_{T,2} + A_{R,1}^* A_{R,2}) \int_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x} dx + \\
 & + \frac{i A_{T,1}^* A_{T,2}}{k_2 - k_1} \left(e^{i(k_2-k_1)a} - 1 \right) \Big|_{k_1 \neq k_2} - a A_{T,1}^* A_{T,2} \Big|_{k_1 = k_2} + \\
 & + \left\{ \frac{\alpha_1^* \alpha_2}{\xi_1 + \xi_2} e^{(\xi_1 + \xi_2)a} - \frac{\beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \frac{\alpha_1^* \alpha_2 - \beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} \right\} \Big|_{\xi_1 \neq -\xi_2} + \\
 & + \left\{ \frac{\alpha_2 \beta_1^*}{\xi_2 - \xi_1} e^{(\xi_2 - \xi_1)a} - \frac{\alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \frac{\alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{\xi_1 \neq \xi_2} + \\
 & + a \cdot \{ \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2 \} \Big|_{\xi_1 = -\xi_2} + a \cdot \{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 \} \Big|_{\xi_1 = \xi_2}.
 \end{aligned} \tag{M.1}$$

Згідно з означенням дельта-функції, ми маємо наступну властивість:

$$\int_0^{+\infty} e^{ikx} dx = \pi \delta(k) + i \left\{ \pi \delta(k) + \frac{1}{k} \right\} \Big|_{k \neq 0}. \tag{M.2}$$

Друга компонента у правій частині цього виразу виникає при $k \neq 0$. Таким чином, ми маємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-i(k_2 \mp k_1)x} dx = \pi \delta(k_1 \mp k_2) + i \left\{ \pi \delta(k_1 \mp k_2) \pm \frac{1}{k_1 \mp k_2} \right\} \Big|_{k_1 \neq k_2}, \quad (M.3)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{i(k_1 \pm k_2)x} dx = \pi \delta(k_1 \pm k_2) + i \left\{ \pi \delta(k_1 \pm k_2) \pm \frac{1}{k_1 \pm k_2} \right\} \Big|_{k_1 \neq -k_2}.$$

Для проведення розрахунків зафіксуємо дельта-функцію так

$$\delta(\alpha \neq 0) = 0. \quad (M.4)$$

Знайдемо інтеграл (M.1) (ми маємо тільки додатні значення k_i та ξ_i)

$$I_1(E_1, E_2) = \delta(k_1 - k_2) \cdot f_{11}(E_1, E_2) + f_{12}(E_1, E_2), \quad (M.5)$$

де

$$f_{11}(E_1, E_2) = \pi (A_{T,1}^* A_{T,2} + A_{R,1}^* A_{R,2} + 1),$$

$$f_{12}(E_1, E_2) = \frac{\alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} - \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} -$$

$$- \frac{i(A_{R,1}^* - A_{R,2})}{k_1 + k_2} + \left\{ \frac{i(A_{T,1}^* A_{T,2} e^{i(k_2 - k_1)a} + A_{R,1}^* A_{R,2} - 1)}{k_2 - k_1} + \right. \quad (M.6)$$

$$\left. + \frac{\alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_2 \beta_1^* + \alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2} +$$

$$+ a \cdot \left\{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 - A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1 = E_2}.$$

Для другого інтегралу I_2 маємо:

$$\begin{aligned}
I_2(E_1, E_2) = & - \int_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x} x dx - A_{R,1}^* \int_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x} x dx - \\
& - A_{R,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x} x dx - A_{R,1}^* A_{R,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x} x dx + \\
& + \int_0^a \left\{ \alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1+\xi_2)x} + \alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2-\xi_1)x} + \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2-\xi_1)x} + \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1+\xi_2)x} \right\} x dx + \\
& + A_{T,1}^* A_{T,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x} dx - A_{T,1}^* A_{T,2} \int_0^a e^{i(k_2-k_1)x} dx.
\end{aligned} \tag{M.7}$$

Окремо знайдемо суму всіх власних інтегралів:

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)}(E_1, E_2) = & \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2)^2} \left\{ [(\xi_1 + \xi_2) a - 1] \alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1+\xi_2)a} - \right. \\
& - [(\xi_1 + \xi_2) a + 1] \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1+\xi_2)a} + \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2 \left. \right\} + \\
& + \frac{a^2}{2} \cdot \left\{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 - A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1=E_2} + \\
& + \left\{ \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^2} \left([(\xi_2 - \xi_1) a - 1] \alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2-\xi_1)a} - \right. \right. \\
& - [(\xi_2 - \xi_1) a + 1] \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2-\xi_1)a} + \alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2 \left. \right) + \\
& + \frac{A_{T,1}^* A_{T,2}}{(k_2 - k_1)^2} \left([i(k_2 - k_1) a - 1] e^{i(k_2-k_1)a} + 1 \right) \left. \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2}
\end{aligned} \tag{M.8}$$

та запишемо суму всіх невластних інтегралів:

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)}(E_1, E_2) = & - \int_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x} x dx - A_{R,1}^* \int_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x} x dx - \\
& - A_{R,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x} x dx - (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2}) \int_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x} x dx.
\end{aligned} \tag{M.9}$$

Для наступних розрахунків ми будемо використовувати властивість

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{ikx} x dx = -i \frac{\partial}{\partial k} \int_0^{+\infty} e^{ikx} dx = \\ & = -i \frac{\partial}{\partial k} \left[\pi \delta(k) + \frac{i}{k} \Big|_{k \neq 0} \right] = -i \pi \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) - \frac{1}{k^2} \Big|_{k \neq 0}, \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

використовуючи яку ми знаходимо інтеграли (M.9)

$$\begin{aligned} & I_2^{(2)}(E_1, E_2) = \\ & = i \pi (A_{R,2} - A_{R,1}^*) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_1+k_2} + i \pi (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} - \\ & - 1) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_2-k_1} + \frac{A_{R,1}^* + A_{R,2}}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} + 1}{(k_1 - k_2)^2} \Big|_{E_1 \neq E_2}, \end{aligned} \quad (\text{M.11})$$

де враховано властивість

$$\frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=-k_1} = - \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=+k_1}. \quad (\text{M.12})$$

Виконуючи сумування $I_2^{(1)}$ та $I_2^{(2)}$, знайдемо інтеграл I_2

$$\begin{aligned} & I_2(E_1, E_2) = f_{21}^{(+)}(E_1, E_2) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_2+k_1} + \\ & + f_{21}^{(-)}(E_1, E_2) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_2-k_1} + f_{22}(E_1, E_2), \end{aligned} \quad (\text{M.13})$$

де

$$\begin{aligned}
f_{21}^{(+)}(E_1, E_2) &= i \pi (A_{R,2} - A_{R,1}^*), \\
f_{21}^{(-)}(E_1, E_2) &= i \pi (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} - 1), \\
f_{22}(E_1, E_2) &= \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2)^2} \left\{ [(\xi_1 + \xi_2) a - 1] \alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} - \right. \\
&\quad - [(\xi_1 + \xi_2) a + 1] \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} + \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2 \left. \right\} + \\
&\quad + \frac{A_{R,1}^* + A_{R,2}}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \left\{ \alpha_1^* \beta_2 + \beta_1^* \alpha_2 - A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1=E_2} + \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^2} \left([(\xi_2 - \xi_1) a - 1] \alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} - \right. \right. \\
&\quad - [(\xi_2 - \xi_1) a + 1] \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} + \alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2 \left. \right) + \\
&\quad + \frac{A_{T,1}^* A_{T,2}}{(k_2 - k_1)^2} \left([i(k_2 - k_1) a - 1] e^{i(k_2 - k_1)a} + 1 \right) + \\
&\quad \left. + \frac{A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} + 1}{(k_1 - k_2)^2} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2}. \tag{M.14}
\end{aligned}$$

Тепер ми знайдемо останній інтеграл I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3(E_1, E_2) &= i k_2 \int_0^{+\infty} e^{-i(k_2 - k_1)x} dx + i k_2 A_{R,1}^* \int_0^{+\infty} e^{-i(k_1 + k_2)x} dx - \\
&\quad - i k_2 A_{R,2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_1 + k_2)x} dx + i k_2 (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2}) \int_0^{+\infty} e^{i(k_2 - k_1)x} dx - \\
&\quad - \frac{k_2 A_{T,1}^* A_{T,2}}{k_2 - k_1} \left(e^{i(k_2 - k_1)a} - 1 \right) \Big|_{k_1 \neq k_2} - i k_2 a A_{T,1}^* A_{T,2} \Big|_{k_1 = k_2} + \\
&\quad + \xi_2 \left\{ \frac{\alpha_1^* \alpha_2}{\xi_1 + \xi_2} e^{(\xi_1 + \xi_2)a} + \frac{\beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \frac{\alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2}{\xi_1 + \xi_2} \right\} \Big|_{\xi_1 \neq -\xi_2} + \\
&\quad + \xi_2 \left\{ \frac{\alpha_2 \beta_1^*}{\xi_2 - \xi_1} e^{(\xi_2 - \xi_1)a} + \frac{\alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \frac{\alpha_2 \beta_1^* + \alpha_1^* \beta_2}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{\xi_1 \neq \xi_2} + \\
&\quad + \xi_2 a \cdot \left\{ \alpha_1^* \alpha_2 - \beta_1^* \beta_2 \right\} \Big|_{\xi_1 = -\xi_2} + \xi_2 a \cdot \left\{ \beta_1^* \alpha_2 - \alpha_1^* \beta_2 \right\} \Big|_{\xi_1 = \xi_2}. \tag{M.15}
\end{aligned}$$

Враховуючи властивість (M.10), отримаємо:

$$I_3(E_1, E_2) = \delta(k_1 - k_2) \cdot f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2), \tag{M.16}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{31}(E_1, E_2) &= \pi i k_2 (A_{T,1}^* A_{T,2} - A_{R,1}^* A_{R,2} + 1), \\
f_{32}(E_1, E_2) &= \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \left[\alpha_1^* \alpha_2 e^{(\xi_1 + \xi_2)a} + \beta_1^* \beta_2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)a} - \alpha_1^* \alpha_2 - \beta_1^* \beta_2 \right] + \\
&+ \frac{k_2 (A_{R,1}^* + A_{R,2})}{k_1 + k_2} + a \cdot \left\{ \xi_2 \beta_1^* \alpha_2 - \xi_2 \alpha_1^* \beta_2 - i k_2 A_{T,1}^* A_{T,2} \right\} \Big|_{E_1=E_2} - \\
&- \left\{ \frac{k_2 (A_{T,1}^* A_{T,2} e^{i(k_2 - k_1)a} - A_{R,1}^* A_{R,2} - 1)}{k_2 - k_1} - \right. \\
&- \left. \frac{\xi_2 (\alpha_2 \beta_1^* e^{(\xi_2 - \xi_1)a} + \alpha_1^* \beta_2 e^{-(\xi_2 - \xi_1)a} - \alpha_2 \beta_1^* - \alpha_1^* \beta_2)}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \Big|_{E_1 \neq E_2}.
\end{aligned} \tag{M.17}$$

М.2. Розрахунки функції $f(E_0, x)$

Використовуючи розв'язки для інтегралів I_1 , I_2 та I_3 , отримані у Додатку М.1, тепер ми будемо шукати функцію $f(E_0, x)$. Відповідно до (13.20), перепишемо цю функцію так

$$\begin{aligned}
f(E_0, x) &= \\
&= i \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \frac{g(E_3) g(E_4)}{g(E_0)} \left\{ x [\delta(k_3 - k_4) f_{11}(E_3, E_4) + f_{12}(E_3, E_4)] - \right. \\
&- \left[f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4-k_3} + \right. \\
&+ \left. f_{22}(E_3, E_4) \right\} \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 g(E_1) g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) \times \\
&\times [\delta(k_1 - k_2) \cdot f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2)].
\end{aligned} \tag{M.18}$$

Тут спочатку проінтегруємо по dE_1 та dE_2 :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 g(E_1) g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) \times \\
& \times [\delta(k_1 - k_2) f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2)] = \\
& = \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} g(E_1) dE_1 \int_{E_2=0}^{E_2=E_0} g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) f_{31}(E_1, E_2) \cdot \delta(k_1 - k_2) k_2 dk_2 + \\
& + \int_0^{E_0} g(E_1) dE_1 \int_0^{E_0} g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) f_{32}(E_1, E_2) dE_2.
\end{aligned} \tag{M.19}$$

Тут хвильові числа k_1 та k_2 визначаються як $k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_i}$, тобто вони є додатними при будь-якій енергії. Для наступних розрахунків ми ведемо визначення *умовно нормованої дельта-функції*, відповідно до наступного виразу:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(a - x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(a) & \text{при } x_1 \leq a \leq x_2, \\ 0 & \text{при } a < x_1 \text{ або } a > x_2. \end{cases} \tag{M.20}$$

Таке визначення може бути переписано більш короткою формулою:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(a - x) \delta(x) dx = f(a) \Big|_{x_1 \leq a \leq x_2}. \tag{M.21}$$

Тепер ми перетворимо інтеграли у (M.19) так

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 g(E_1) g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) \times \\
& \times [\delta(k_1 - k_2) f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2)] = \\
& = \frac{\hbar}{m} \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} \int_0^{E_0} g^2(E_1) f_{31}(E_1, E_1) k_1 dE_1 + \\
& + \int_0^{E_0} g(E_1) dE_1 \int_0^{E_0} g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'', x) f_{32}(E_1, E_2) dE_2
\end{aligned} \tag{M.22}$$

та отримаємо наступну формулу для функції f :

$$\begin{aligned}
f(E_0, x) = & \frac{i}{g(E_0)} \int_0^{E_0} g^2(E_1) f_{31}(E_1, E_1) k_1 dE_1 \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \times \\
& \times \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) \left\{ x \cdot [\delta(k_3 - k_4) \cdot f_{11}(E_3, E_4) + f_{12}(E_3, E_4)] - \right. \\
& - \left[f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4-k_3} + \right. \\
& + \left. f_{22}(E_3, E_4) \right] \left. \right\} \cdot \frac{\hbar}{m} \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} + \\
& + \frac{i}{g(E_0)} \int_0^{E_0} dE_1 g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2 g(E_2) f_{32}(E_1, E_2) \times \\
& \times \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) g(E'') \varphi_0(E'', x) \times \\
& \times \left\{ x \cdot [\delta(k_3 - k_4) \cdot f_{11}(E_3, E_4) + f_{12}(E_3, E_4)] - f_{22}(E_3, E_4) - \right. \\
& - \left. f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} \Big|_{k=k_4+k_3} - f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} \Big|_{k=k_4-k_3} \right\}.
\end{aligned} \tag{M.23}$$

Цей вираз має достатньо складний вигляд. Щоб його розрахувати, спочатку ми будемо шукати перший інтеграл:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) \left\{ x \cdot [\delta(k_3 - k_4) \cdot f_{11}(E_3, E_4) + f_{12}(E_3, E_4)] - \right. \\
& - \left[f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4-k_3} + \right. \\
& + \left. f_{22}(E_3, E_4) \right] \left. \right\} \cdot \frac{\hbar}{m} \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) \delta(k_3 - k_4) \times \\
&\times f_{11}(E_3, E_4) \cdot \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} + \\
&+ x \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{12}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} - \\
&- \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) \left\{ f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} \right\} \times \\
&\times \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} - \\
&- \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) \cdot f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4-k_3} \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} - \\
&- \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{22}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4}.
\end{aligned} \tag{M.24}$$

Перший інтеграл у цьому виразі дорівнює

$$\begin{aligned}
&\int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{11}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} \times \\
&\times \delta(k_3 - k_4) dE_4 = \frac{\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \int_0^{E_0} g^2(E_3) f_{11}(E_3, E_3) k_3 dE_3.
\end{aligned} \tag{M.25}$$

Другий інтеграл у виразі (M.24) практично скорочується, та тому його далі потрібно знаходити чисельно. Тепер розглянемо третій інтеграл (без коефіці-

ента нормування):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} \right\} \cdot \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} dE_4 = \\
& = \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} \right\} \cdot \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} k_4 dk_4.
\end{aligned} \tag{M.26}$$

Ми маємо властивість:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} &= \frac{\partial k_4}{\partial k} \frac{\partial}{\partial k_4} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} + \frac{\partial k_3}{\partial k} \frac{\partial}{\partial k_3} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} = \\
&= \frac{\partial}{\partial k_4} \delta(k_4 + k_3) + \frac{\partial}{\partial k_3} \delta(k_4 + k_3).
\end{aligned} \tag{M.27}$$

Тоді перепишемо (M.26) як

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4+k_3} \right\} \times \\
& \times \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} dE_4 = \\
& = \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k_4} \delta(k_4 + k_3) \times \\
& \times \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} k_4 dk_4 + \\
& + \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \frac{\partial}{\partial k_3} \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(+)}(E_3, E_4) \cdot \delta(k_4 + k_3) \times \\
& \times \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} k_4 dk_4 = 0.
\end{aligned} \tag{M.28}$$

Таким чином, цей інтеграл дорівнює нулю (згідно до умов задачі, енергія має тільки додатні значення). Для четвертого інтеграла у виразі (M.24) ми

знаходимо (без коефіцієнта нормування):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} g(E_4) f_{21}^{(-)}(E_3, E_4) \times \\
& \times \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \delta(k) \Big|_{k=k_4-k_3} \right\} dE_4 = \quad (\text{M.29}) \\
& = -\frac{2\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \int_0^{E_0} g(E_3) \frac{\partial}{\partial k_3} \left\{ g(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right\} dE_3.
\end{aligned}$$

Цей інтеграл можна проінтегрувати по частинам:

$$\begin{aligned}
& = -\frac{2\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \int_0^{E_0} g(E_3) \frac{\partial}{\partial k_3} \left\{ g(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right\} dE_3 = \\
& = -\frac{2\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \cdot \left\{ \left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - \right. \\
& \left. - \int_0^{E_0} g(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3} dE_3 \right\}. \quad (\text{M.30})
\end{aligned}$$

Тоді права частина формули (M.24) отримає вигляд:

$$\begin{aligned}
& x \cdot \frac{\hbar^2}{m^2} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \cdot \int_0^{E_0} g^2(E_3) f_{11}(E_3, E_3) k_3 dE_3 + \\
& + x \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{12}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} + \\
& + \frac{2\hbar^2}{m^2} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \cdot \left\{ \left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - \right. \\
& \left. - \int_0^{E_0} g(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3} dE_3 \right\} - \\
& - \frac{\hbar}{m} \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{22}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4}. \quad (\text{M.31})
\end{aligned}$$

Тепер ми знаходимо функцію f :

$$\begin{aligned}
f(E_0, x) &= \\
&= \frac{i}{g(E_0)} \frac{\hbar}{m} J_1(E_0) \left\{ x \frac{\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \cdot J_2(E_0) + x \cdot J_3(E_0, x) + \right. \\
&+ \frac{2\hbar}{m} g(E_0) \varphi_0(E_0, x) \left(\left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - J_4(E_0) \right) - J_5(E_0, x) \left. \right\} + \\
&+ \frac{i}{g(E_0)} \cdot \left\{ x \cdot \frac{\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot J_2(E_0) + x \cdot J_7(E_0, x) + \right. \\
&+ \frac{2\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot \left[g^2(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \right] \Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - \\
&- \left. \frac{2\hbar}{m} \cdot J_6(E_0, x) \cdot J_4(E_0) - J_8(E_0, x) \right\},
\end{aligned} \tag{M.32}$$

де

$$\begin{aligned}
J_1(E_0) &= \int_0^{E_0} g^2(E_1) f_{31}(E_1, E_1) k_1 dE_1, \\
J_2(E_0) &= \int_0^{E_0} g^2(E_3) f_{11}(E_3, E_3) k_3 dE_3, \\
J_3(E_0, x) &= \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{12}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4}, \\
J_4(E_0) &= \int_0^{E_0} g(E_3) f_{21}^{(-)}(E_3, E_3) k_3 \frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3} dE_3,
\end{aligned} \tag{M.33}$$

$$\begin{aligned}
J_5(E_0, x) &= \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 g(E_4) f_{22}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_3-E_4}, \\
J_6(E_0, x) &= \int_0^{E_0} dE_1 g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2 g(E_2) f_{32}(E_1, E_2) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_1-E_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_7(E_0, x) &= \int_0^{E_0} dE_1 g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2 g(E_2) f_{32}(E_1, E_2) \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 \times \\
&\quad \times g(E_4) f_{12}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_1-E_2+E_3-E_4}, \\
J_8(E_0, x) &= \int_0^{E_0} dE_1 g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2 g(E_2) f_{32}(E_1, E_2) \int_0^{E_0} dE_3 g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 \times \\
&\quad \times g(E_4) f_{22}(E_3, E_4) \left\{ g(E') \varphi_0(E', x) \right\} \Big|_{E'=E_0+E_1-E_2+E_3-E_4}.
\end{aligned} \tag{M.34}$$

ДОДАТОК Н

Список публікацій здобувача за темою
дисертації у фахових наукових виданнях (без
публікацій у журналах за матеріалами
конференцій)

1. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Does sub-barrier bremsstrahlung in α -decay of ^{210}Po exist? *Prog. Theor. Phys.* **109** (2), 203–211 (2003).
2. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Angular analysis of bremsstrahlung in α -decay, *Europ. Phys. Journ.* **A28** (3), 283–294 (2006).
3. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, and C. Saccá, Bremsstrahlung emission during α -decay of ^{226}Ra *Mod. Phys. Lett.* **A23** (31), 2651–2663 (2008).
4. G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, C. Saccá, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, Bremsstrahlung emission accompanying alpha-decay of ^{214}Po , *Europ. Phys. Journ.* **A36** (1), 31–36 (2008).
5. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying α -decay of deformed nuclei, *Nucl. Phys.* **A823** (1–4), 38–46 (2009).
6. S. P. Maydanyuk, Multipolar approach for description of bremsstrahlung during α -decay and unified formula of the bremsstrahlung probability, *The Open Nucl. Part. Phys. J* **2**, 17–33 (2009) [open access].

7. С. П. Майданюк, Мультипольний підхід до опису гальмівного випромінювання при α -розпаді, Журн. Фіз. Досл. **13** (№ 3), 3201 (2009) [15 с., укр.].
8. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous of ^{252}Cf , Phys. Rev. **C82** (1), 014602 (2010) [9 pages].
9. S. P. Maydanyuk, Multipolar model of bremsstrahlung accompanying proton decay of nuclei, Jour. Phys. **G38** (8), 085106 (2011).
10. S. P. Maydanyuk, Model for bremsstrahlung emission accompanying interactions between protons and nuclei from low energies up to intermediate energies: Role of magnetic emission, Phys. Rev. **C86** (1), 014618 (2012) [21 pages].
11. S. P. Maydanyuk and P.-M. Zhang, New approach to determine proton-nucleus interactions from experimental bremsstrahlung data, Phys. Rev. **C91** (2), 024605 (2015) [20 pages].
12. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New approach for obtaining information on the many-nucleon structure in α decay from accompanying bremsstrahlung emission, Phys. Rev. **C93** (1), 014617 (2016) [14 pages].
13. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Manifestation of the important role of nuclear forces in the emission of photons in pion scattering off nuclei, Phys. Rev. **C98** (5), 054613 (2018) [12 pages].
14. X. Liu, S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L. Liu, First investigations of hypernuclei in reactions via analysis of bremsstrahlung photons, Phys. Rev. **C99** (6), 064614 (2019) [24 pages].

15. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, Nucleon microscopy in proton-nucleus scattering via analysis of bremsstrahlung emission, *Phys. Rev.* **C99** (6), 064602 (2019) [31 pages].
16. F. Cardone, S. P. Maidanyuk, R. Mignani, and V. S. Olkhovsky, Multiple internal reflections during particle and photon tunneling, *Found. Phys. Lett.* **19** (5), 441–457 (2006).
17. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Проблема проникності бар'єрів у задачі протонного розпаду: повністю квантовий підхід та початкові умови розпаду, *Журн. Фіз. Досл.* **14** (4), 4002 (2011) [15 с., укр.].
18. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Problem of nuclear decay by proton emission in fully quantum consideration: Calculations of penetrability and role of boundary condition, *Journ. Mod. Phys.* **2** (6), 572–585 (2011).
19. С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, Метод багаторазових внутрішніх відбиттів як засіб визначення ймовірностей злиття в задачах захоплення альфа-частинок ядрами, *Журн. Фіз. Досл.* **18** (1), 1001 (2011) [11 с., укр.].
20. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and S. V. Belchikov, Quantum design using a multiple internal reflections method in a study of fusion processes in the capture of alpha-particles by nuclei, *Nucl. Phys.* **A940**, 89–118 (2015).
21. S. P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, and L.-P. Zou, New quasibound states of the compound nucleus in α -particle capture by the nucleus, *Phys. Rev.* **C96** (1), 014602 (2017) [13 pages].
22. S. P. Maydanyuk, Wave function of the Universe in the early stage of its evolution, *Europ. Phys. Journ.* **C 57** (4), 769–784 (2008).

23. S. P. Maydanyuk, A fully quantum method of determination of penetrability and reflection coefficients in quantum FRW model with radiation, *Int. Journ. Mod. Phys. D* **19** (4), 392–435 (2010).
24. S. P. Maydanyuk, Resonant structure of the early-universe space-time, *Eur. Phys. Journ. Plus* **126** (8), 76–94 (2011).
25. В. С. Ольховский, С. П. Майданюк, Э. Реками, О несамосопряженных операторах в описании наблюдаемых в квантовой теории и ядерной физике, *ЭЧАЯ* **41** (Вып. 4), 951–995 (2010) [Eng.: *Physics of Particles and Nuclei* **41** (4), 508–530 (2010)].
26. E. Recami, V. S. Olkhovsky, and S. P. Maydanyuk, On non-selfadjoint operators for observables in quantum mechanics and quantum field theory, *Int. Journ. Mod. Phys. A* **25** (9), 1785–1818 (2010).
27. С. П. Майданюк, Тунелювання крізь бар'єри Альбрехта з дисипативними компонентами, *Журн. Фіз. Досл.* **19** (3), 3001 (2015).
28. S. P. Maydanyuk, SUSY-hierarchy of one-dimensional reflectionless potentials, *Annals Phys.* **316** (2), 440–465 (2005).

ДОДАТОК О
Список наукових праць, що засвідчують
апробацію результатів дисертації на
конференціях та як глави у книгах

1. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Bremsstrahlung in alpha-decay: Angular analysis of spectra, *Prob. At. Sci. Tech.. Ser.: Nucl. Phys. Inv.* **44** 5, 19–21 (2004).
2. G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Giardina, G. Fazio, C. Saccá, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, and D. A. Smirnov, Radiation of bremsstrahlung accompanying the α -decay of heavy nuclei, *Radiation Effects and Defects in Solid* **164** (5–6), 283–286 (2009).
3. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio G. Mandaglio, and M. Manganaro, Bremsstrahlung emission accompanying decays and spontaneous fission of heavy nuclei, *Int. Journ. Mod. Phys.* **E19** (5), 1189–1196 (2010).
4. S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, and G. Giardina, Bremsstrahlung emission of photons accompanying ternary fission of ^{252}Cf , *Journ. Phys.: Conf. Ser.* **282**, 012016 (2011).
5. S. P. Maydanyuk, Quantum method of determination of penetrability in FRW model with radiation, *Visn. Kiev. Univ., Ser.: Fiz. Mat. Nauk.* **3**, 47–52 (2010).
6. S. P. Maydanyuk, New exactly solvable reflectionless potentials of Gamov's type, *Surveys in High Energy Physics* **19** (3–4), 175–192 (2004).

7. S. P. Maydanyuk, One-dimensional inverse power reflectionless potential $V(x) = \text{const} \cdot |x - x_0|^{-n}$, Prob. At. Scienc. Tech. Ser: Nucl. Phys. Inv. **44** (5), 22–25 (2004).
8. S. P. Maydanyuk, Quantum mechanics of nuclear decays. Nuclear Science of the Series “Energy Science and Technology” (Studium Press LLC, USA, 2014), **4**, 428 [33 pages].
9. S. P. Maydanyuk, A. Del Popolo, V. S. Olkhovsky, and E. Recami, A Fully Quantum Model of Big Bang. Chapter in book “Quantum Mechanics” (Intech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
10. S. P. Maydanyuk and V. S. Olkhovsky, Full Quantum Study of the FRW Model with Radiation and Chaplygin Gas. Chapter in book “The Big Bang: Theory, Assumptions and Problems”, pp. 185–196 (Nova Publisher, Jason R. O’Connell and Alice L. Hale Ed., ISBN: 978-1-61324-577-4, 2012).
11. V. S. Olkhovsky, E. Recami, and S. P. Maydanyuk, Time as Quantum Observable, Canonical Conjugated to Energy. Chapter in book “Measurements in Quantum Mechanics” (InTech Press, Edited by M. R. Pahlavani, 2012).
12. S. P. Maydanyuk, *Nuclear bremsstrahlung: methods of quantum mechanics and electrodynamics in tasks of emission of photons* (Palmarium Academic Publishing, Saarbrücken, 2012), 148 p.
13. S. P. Maydanyuk and S. V. Belchikov, Method of determination of the most probable coordinate of formation of α -particle in α -decay, 25 p., arXiv: 0805.4165.

Автор вважає своїм приємним обов'язком висловити щиру подяку, перш за все, доктору фізико-математичних наук, професору В. С. Ольховському за постійну підтримку і обговорення отриманих результатів, який, будучи попереднім науковим керівником моєї кандидатської дисертації, з самого початку моїх досліджень давав повну свободу на спроби у помилках та пошуки будь-яких нових рішень і нових задач. Особливу вдячність хотілося б висловити І. Є. Кашубі та А. К. Зайченко за суттєву допомогу при оволодінні чисельними методами (що стало суттєвим при отриманні результатів), О. Г. Магнеру та В. В. Улещенко за постійні цікаві дискусії та підтримку впродовж всього часу роботи у дослідженнях (що склали матеріал дисертації), А. Т. Рудчику та А. Собічевському (A. Sobiczewski, The Andrzej Soltan Institute for Nuclear Studies, Nuclear Theory Department, Warsaw, Poland) за постійну підтримку на надхнення у дослідженнях, А. Й. Стешенко за його допомогу та натхнення при оволодінні моделлю деформованих осциляторних оболонки у теорії ядра, Ю. А. Познякову за цікаві та корисні дискусії по квантовій механіці, теоріям розсіяння та оберненої задач, Шангюю Джоу (Shan-Gui Zhou, Kavli Institute for Theoretical Physics China (KITPC), Beijing) та Джигангу Сяо (Zhigang Xiao, Tsinghua University, Beijing) за підтримку у моїх дослідженнях та аналіз їх застосування у інших задачах, а також моїм співавторам Пенмінгу Джангу, Ліпінгу Зоу, Дж. Джардіна, Дж. Мандагліо, М. Манганаро, С. В. Бельчикову, С. О. Омельченко. Також вважаю за необхідне подякувати всім співробітникам відділу теорії ядерних процесів, співробітникам відділу теорії ядра, співробітникам відділу фізики важких іонів Інституту ядерних Досліджень НАНУ, співробітникам відділу ядерної фізики високих енергій Інституту Сучасної Фізики (Institute of Modern Physics, Lanzhou, CAS) співробітникам відділу теорії ядра і квантової теорії поля Інституту Теоретичної Фізики ім. М. М. Боголюбова НАНУ за численні наукові дискусії на семінарах та конференціях, що було проведено з моєю участю.