Матриці.
Транспоновані, обернені, спряжені, ермітові матриці.
Добуток матриць.
Власні функції та власні значення

Що таке “Матриця”?

«Ма́триця» (англ. The Matrix) — культовий науково-фантастичний фільм, який зняли в 1999 році сестри Вачовскі (тоді ще брати Вачовскі). Фільм зображує майбутнє, у якому люди насильно під'єднані повсталими машинами до Матриці — інтерактивної комп'ютерної програми, що симулює дійсність. У такий спосіб машини одержують із людей енергію, що потрібна їм для продовження існування.

А тепер серйозно!

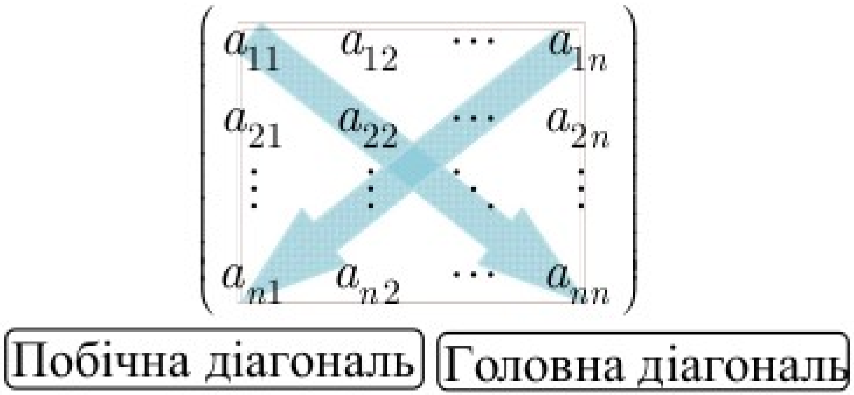
Матрицею *A* розміром *m* X *n* називають прямокутну таблицю математичних об’єктів розташованих у *m* рядках та *n* стовпцях, і позначають

$$A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-й рядок} \\ \uparrow j\text{-й стовпець} & \end{array}$$

Елемент a_{ij} матриці розташовано в *i*-му рядку і *j*-му стовпці.

Типи матриць

- Матрицю розміром m X n , усі елементи якої дорівнюють нулю, називають нульовою матрицею і позначають O_{mXn}
- Якщо $m = n$, то матрицю A називають квадратною матрицею порядку n. Набір елементів a_{11}, a_{22} ,..., a_{nn} утворює головну діагональ, а набір a_{1n} a_{2n-1},..., a_{n1} — побічна діагональ.



Типи матриць

- Квадратну матрицю, всі елементи якої нижче (вище) від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають верхньою (нижньою) трикутною матрицею.
- Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають діагональною матрицею.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Типи матриць

- Діагональну матрицю порядку *n*, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називають одиничною матрицею і позначають E_n.

$$\boxed{E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Типи матриць

- Матрицю розміром 1 Х n називають матрицею-рядком (рядком) завдовжки n.
- Матрицю розміром m Х 1 називають матрицею-стовпцем (стовпцем) заввишки m.

Лінійні дії над матрицями

- Матриці A та B називають рівними, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,...,m$, $j=1,..,n$.
- Сумою матриць A та B розміром m X n називають матрицю $A + B$ розміром m X n, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць-доданків — $(a_{ij}+b_{ij})$.
- Добутком матриці A розміром m X n на дійсне число α називають матрицю A розміром m X n, кожен елемент якої дорівнює добуткові відповідного елемента матриці A на число α — $\alpha \cdot a_{ij}$.

Властивості лінійних дій над матрицями

- комутативність додавання матриць: $A + B = B + A$
- асоціативність додавання матриць: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- властивість нульової матриці: $A + O = A$
- властивість протилежної матриці: $A + (-A) = O$
- $1 \cdot A = A$
- дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел: $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання матриць: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- асоціативність множення матриці на число: $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$

Самостійне завдання

Для матриць *A* та *B* знайти матриці *A*+*B*, 2*A*, *A*-*B*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Відповідь

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1) & 2+0 & 3+1\\ 4+2 & 5+(-3) & 6+4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 6 & 2 & 10\end{pmatrix};$$

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-(-1) & 2-0 & 3-1\\ 4-2 & 5-(-3) & 6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 8 & 2\end{pmatrix}. \bullet$$

Множення матриць

- Матрицю *A* називають узгодженою з матрицею *B*, якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.
- Добутком рядка *x* завдовжки *n* на стовпець *y* заввишки *n* називають число, яке дорівнює сумі добутків елементів рядка на відповідні елементи стовпця, тобто

$$\boxed{\overleftarrow{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.}$$

Множення матриць

Добутком матриці A_{mXl} на матрицю B_{lXn} називають матрицю $C = AXB$ розміром m X n , кожний елемент c_{ij} якої дорівнює добуткові i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B, тобто

$$\boxed{C_{m\times n} = A_{m\times l} \cdot B_{l\times n} = (c_{ij})_{m\times n} \overset{\text{def}}{=} \left(\overleftarrow{a}_i \cdot \overrightarrow{b}_j\right)_{m\times n}.}$$

Добуток матриць запроваджують лише для узгоджених матриць.

Зауваження!

Множення матриць не комутативне! Тобто, якщо існує добуток *AB*, то може не існувати добуток *BA*, але, навіть, коли існують обидва,— вони можуть бути нерівними. Наприклад,

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \neq BA.$$

Властивості множення матриць

- асоціативність множення матриць:

  $A_{m\text{x}n} \text{ x } (B_{n\text{x}l} \text{ x } C_{l\text{x}p}) = (A \text{ x } B) \text{ x } C$

- дистрибутивність множення матриць щодо додавання матриць:

  $C_{l\text{x}m} \text{ x } (A_{m\text{x}n} + B_{m\text{x}n}) = C \text{ x } A + C \text{ x } B$,

  $(A_{m\text{x}n} + B_{m\text{x}n}) \text{ x } C_{n\text{x}l} = A \text{ x } C + B \text{ x } C$

- асоціативність множення матриць щодо множення на число:

  $\alpha(A_{m\text{x}n} \text{ x } B_{n\text{x}l}) = (\alpha A) \text{ x } B = A \text{ x } (\alpha B)$

- властивість одиничної матриці: $A_{m\text{x}n} \text{ x } E_n = E_m \text{ x } A_{m\text{x}n} = A$
- властивість нульової матриці: $A_{m\text{x}n} \text{ x } O_{n\text{x}l} = O_{m\text{x}l}$, $O_{l\text{x}m} \text{ x } A_{m\text{x}n} = O_{l\text{x}n}$

Показникові функції матриць

Матрицю A можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна. Натуральний степінь k квадратної матриці A розуміють як

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k}$$

Многочленом $f(A)$ від матриці A (матричним многочленом) називають вираз:

$$\boxed{f(A) \overset{\text{def}}{=} a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 E_n \quad (A^0_{n\times n} \overset{\text{def}}{=} E_n).}$$

А як щодо експоненти в степені матриці A?

Самостійне завдання

Для матриць *A* та *B* знайти матриці *A*Х*B* та *B*Х*A*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Відповідь

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & 5 \\ 6 & & -2 \\ 7 & & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & \boxed{1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1} & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матриця *B* розміром 3 X 3 не узгоджена з матрицею *A* розміром 2 X 3. Отже, добутку *B*X*A* не існує.

Транспонування матриць

Заміну рядків матриці на її стовпці, а стовпців — на рядки, називають транспонуванням матриці і позначають

$$\boxed{\overleftarrow{x} \xrightarrow{\mathrm{T}} \vec{x}, \quad \vec{x} \xrightarrow{\mathrm{T}} \overleftarrow{x}.}$$

Матрицю розміром *n* X *m* , яку одержують з матриці *A* розміром *m* X *n* транспонуванням стовпців (рядків), називають транспонованою матрицею до *A* і позначають A^T

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} — & (\vec{a}_1)^{\mathrm{T}} & — \\ — & (\vec{a}_2)^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & (\vec{a}_n)^{\mathrm{T}} & — \end{pmatrix}.$$

Матрицю *A* називають симетричною, якщо $A^T = A$, і кососиметричною, якщо $A^T = - A$.

Властивості транспонування матриць

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Самостійне завдання

Транспонувати матриці *x* та *A*

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Відповідь

$$\vec{x}^{\mathrm{T}} = \overleftarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обернені матриці

Оберненою матрицею до квадратної матриці *A* порядку *n* називають матрицю A^{-1} таку, що

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

Матрицю *A*, для якої існує обернена матриця, називають оборотною.

Властивості обернених матриць

- Якщо обернена матриця існує, то вона єдина
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^{k} = (A^{k})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

Визначник матриці

Визначником (детермінантом) матриці *A* називають число | *A* | = det *A*, яке обчислюють за правилом:

1) якщо *n* = 1, то

$$|a_{11}| = a_{11}$$

2) якщо *n* > 1, то

$$det\ A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik}$$

де M_{ik} — визначник матриці порядку (*n* - 1), яку одержимо з матриці *A* викреслюванням *i*-го рядка та *k*-го стовпця.

Самостійне завдання

Знайти визначник матриці *A*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-5 \cdot 3 - 2 \cdot (-7)) - (-3)(3 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + 1(3 \cdot (-7) - (-5) \cdot 5) =$$

$$= 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 = -1$$

Ермітово-спряжені матриці

Матриця, ермітово-спряжена до матриці *A* з комплексними елементами, отримується в результаті транспонування матриці *A* і заміни кожного її елемента на комплексно-спряжений.

$$a_{ij}^{*} = \overline{a_{ji}}$$

Визначення також може бути записане так:

$$A^{*} = (\overline{A})^{T} = \overline{A^{T}}$$

Де *A* з рискою — це заміна елементів матриці на комплексно-спряжені.

Властивості ермітово-спряжених матриць

- $(A^*)^* = A$
- $(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
- $\det (A^*) = (\det A)^*$

Самостійна робота

Знайти ермітово-спряжену матрицю до матриці А

$$A=\begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ 2-2i & i \end{pmatrix}$$

Відповідь

$$A^* = \begin{pmatrix} 3-i & 2+2i \\ 5 & -i \end{pmatrix}$$

Унітарні матриці

Квадратна матриця U порядку n з комплексними елементами називається унітарною, якщо

$$U^*U = UU^* = E_n$$

де U^* — ермітово-спряжена матриця до матриці U.

Властивості унітарних матриць

- $U^{-1} = U^*$
- U^* також є унітарною
- Добуток унітарних матриць є унітарною матрицею
- $|\det(U)| = 1$

Ермітові матриці

Квадратна матриця A порядку n з комплексними елементами називається ермітовою чи само-спряженою, якщо вона дорівнює своїй ермітово-спряженій матриці, тобто

$$A = A^*$$

Властивості ермітових матриць

- Діагональні елементи ермітової матриці є дійсними числами
- Визначник ермітової матриці — дійсне число
- Власні значення ермітової матриці є дійсними числами
- Обернена матриця до ермітової, якщо існує, то є ермітовою матрицею
- Сума ермітових матриць є ермітовою матрицею

Власні вектори та власні значення

Власний вектор квадратної матриці A з власним значенням λ — це ненульовий вектор v, для якого виконується співвідношення

$$Av = \lambda v$$

Власні значення матриці A порядку n і тільки вони є коренями характеристичного поліному матриці A

$$p(\lambda)=\det(\lambda E_n - A) = 0$$

Самостійне завдання

Знайти власні значення для матриці *A*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь

$$det\left(\lambda E_2 - A\right) = det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\lambda - 1\right)^2 - \left(-1\right) \cdot 0 = \left(\lambda - 1\right)^2$$

$$\left(\lambda - 1\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

Домашнє завдання

Знайти власні значення для матриці *B*.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Джерела

- Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. Посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. ст. 9-18; ISBN 966–8725–05–0
- Ермітово-спряжена матриця
- Унітарна матриця
- Ермітова матриця
- Власні вектори та власні значення