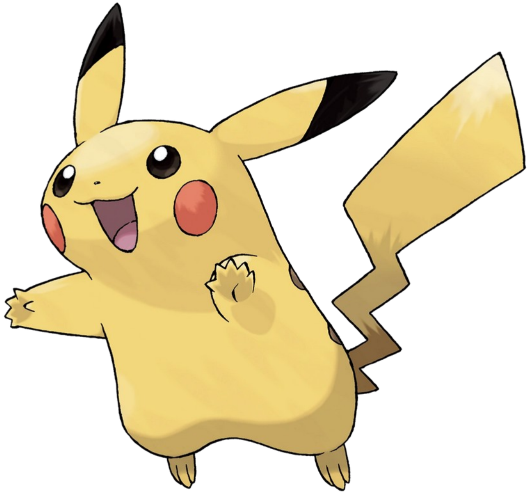
Механіка Ньютона. Механіка Лагранжа. Механіка Гамільтона

Еволюція механіки

Механіка Ньютона

Механіка Лагранжа



Механіка Гамільтона

Фото з pokemon.fandom.com

Закони Ньютона

- Існують такі системи відліку, в яких тіло, на яке не діють жодні сили, або сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю, зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху

$$\vec{F}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{v}=const$$

- В інерційній системі відліку прискорення матеріальної точки зі сталою масою прямо пропорційне рівнодійній всіх сил, що діють на неї, і обернено пропорційне її масі

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- Сили, що виникають при взаємодії двох тіл, є рівними за модулем і протилежними за напрямом

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2}=-\vec{F}_{2\rightarrow 1}$$

Механіка Ньютона

Розглянемо просту задачу коливання маятника

$x = l \cdot \varphi$ - шлях

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}$ - з 2-го закону Ньютона

$$m\ddot{x} = -mg\sin\varphi$$

$$\ddot{x} = -g\sin\varphi$$

$\ddot{x} + g\sin\frac{x}{l} = 0$ або $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

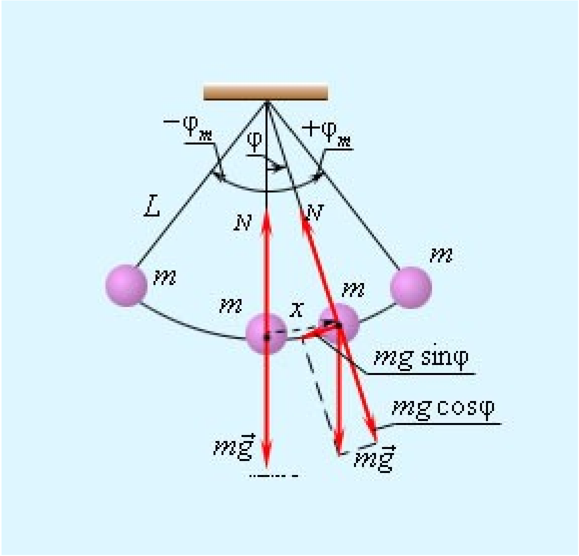


Фото з zhu.edu.ua

Механіка Ньютона

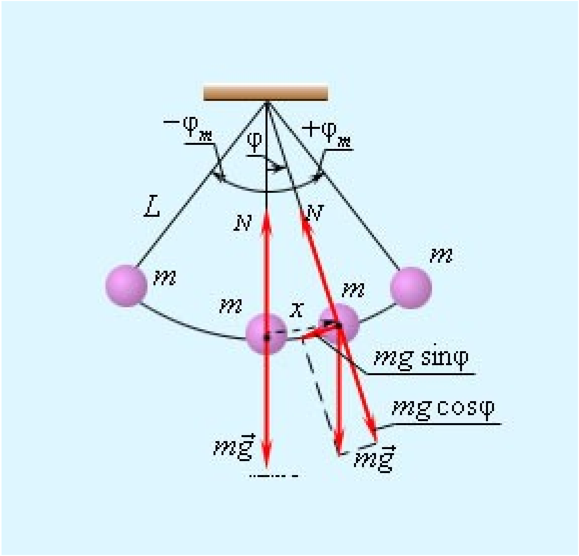
$$\ddot{x} + g\sin\frac{x}{l} = 0$$

$$\sin x \approx x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$x(t) = x_{max}\sin(\omega t + \varphi_0)$$



Механіка Лагранжа

Кожну механічну систему можна характеризувати за допомогою певної функції *L*

$$L(q, \dot{q}, t)$$

Де *q* — зведені координати. Інтеграл цієї функції називається дія *S* і має приймати найменше з усіх можливих значень. Це є принцип найменшої дії.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

Механіка Лагранжа

Знайдемо найменше значення дії *S*. Для цього розглянемо приріст $q(t)+\delta q(t)$. До того ж $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$.

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt=0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0$$

Механіка Лагранжа

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0$$

$$\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$$

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q\,dt=0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0}$$

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}=0$$

Механіка Лагранжа

Рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

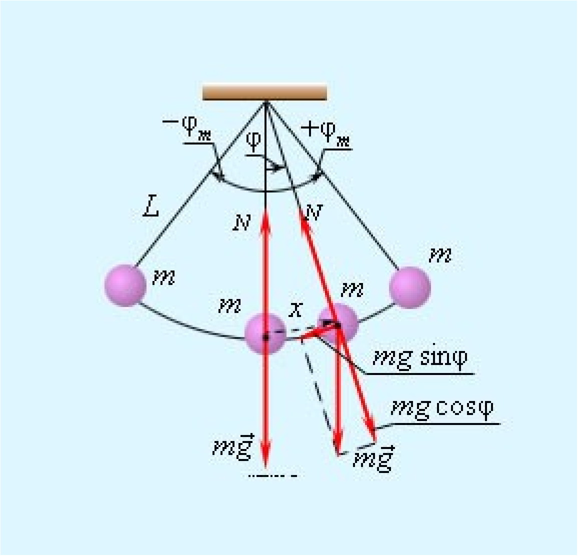
Де q — зведені координати, L — функція Лагранжа:

$$L = T - U$$

T — кінетична енергія, U — потенціальна енергія

Механіка Лагранжа

Розглянемо ту ж саму задачу, але з використанням функції Лагранжа



$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = -mgl \cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos\varphi$$

Механіка Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-mgl\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=ml^2\ddot{\varphi}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0$$

Отримали те саме: $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$

Механіка Гамільтона

Запишемо повний диференціал функції Лагранжа

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \dot{p}\, dq + p\, d\dot{q}$$

Де *q* — зведені координати, *p* — зведені імпульси.

$$p\, d\dot{q} = d(p\dot{q}) - \dot{q}\, dp$$

$$d(p\dot{q} - L) = -\dot{p}\, dq + \dot{q}\, dp$$

Механіка Гамільтона

Функція Гамільтона, або *гамільтоніан:*

$$H(p,q,t)=p\dot{q}-L$$

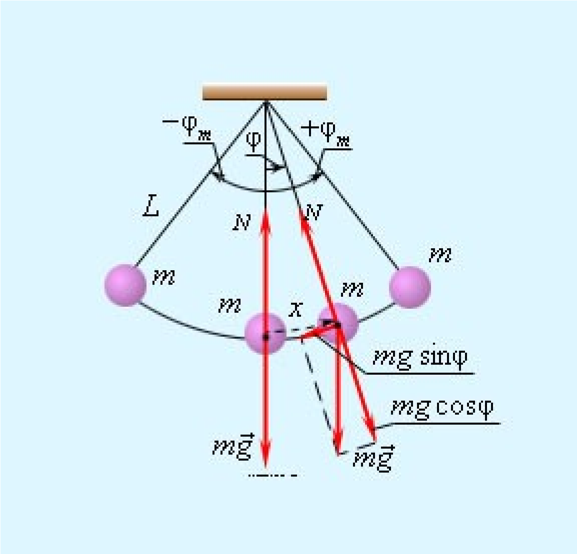
$$dH=-\dot{p}\,dq+\dot{q}\,dp$$

Рівняння Гамільтона:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

Механіка Гамільтона

Розглянемо ту ж саму задачу, але з використанням функції Гамільтона. Гамільтоніан *H* в цьому випадку дорівнює повній енергії.



$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$U = -mgl\cos\frac{x}{l}$$

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} - mgl\cos\frac{x}{l}$$

Механіка Гамільтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} - mgl\cos\frac{x}{l}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg\sin\frac{x}{l}$$

$$m\ddot{x} = -mg\sin\frac{x}{l}$$

Отримали те саме: $\ddot{x} + g\sin\frac{x}{l} = 0$

Домашнє завдання

Знайти для коливання бруска, який приєднано до пружини,

1) функцію Лагранжа;

2) функцію Гамільтона.

Тертям бруска о поверхню можна знехтувати.

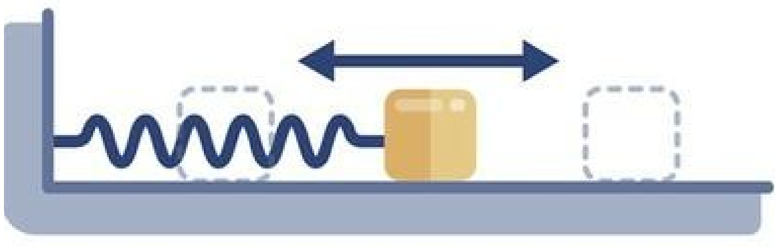


Фото з vseosvita.ua

Джерела

- Lagrangian and Hamiltonian Mechanics in Under 20 Minutes: Physics Mini Lesson
- Why Lagrangian Mechanics is BETTER than Newtonian Mechanics F=ma | Euler-Lagrange Equation | Parth G
- Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика . — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 .- ст. 9-22, 171-173 - ISBN 5-9221-0055-6 (Т. I).