

КУТОВИЙ РОЗПОДІЛ ОСКОЛКІВ ПОДІЛУ

В. Ю. Денисов

**Інститут ядерних досліджень
Національна академія наук України
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

Квантово-механічні обертаня

With every physical rotation R , we postulate a quantum mechanical rotation operator $D(R)$ which rotates quantum mechanical states.

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

In terms of the generators of rotation,

$$D(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i\phi\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}}{\hbar}\right)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ is rotation axis, and \mathbf{J} is angular momentum.

Трансляційний оператор

The rotation operator $\mathbf{R}(z, \theta)$, with the first argument z indicating the rotation axis and the second θ the rotation angle, can operate through the translation operator $\mathbf{T}(a)$ for infinitesimal rotations as explained below. This is why, it is first shown how the translation operator is acting on a particle at position x (the particle is then in the state $|x\rangle$ according to Quantum Mechanics).

Translation of the particle at position x to position $x+a$: $\mathbf{T}(a)|x\rangle = |x + a\rangle$

Because a translation of 0 does not change the position of the particle, we have (with 1 meaning the identity operator, which does nothing):

$$\mathbf{T}(0) = 1$$

$$\mathbf{T}(a)\mathbf{T}(da)|x\rangle = \mathbf{T}(a)|x + da\rangle = |x + a + da\rangle = \mathbf{T}(a + da)|x\rangle \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}(a)\mathbf{T}(da) = \mathbf{T}(a + da)$$

Taylor development gives:

$$\mathbf{T}(da) = \mathbf{T}(0) + \frac{d\mathbf{T}(0)}{da} da + \dots = 1 - \frac{i}{\hbar} p_x da$$

Трансляційний оператор

with

$$p_x = i\hbar \frac{dT(0)}{da}$$

From that follows:

$$T(a + da) = T(a)T(da) = T(a) \left(1 - \frac{i}{\hbar} p_x da \right) \Rightarrow$$

$$[T(a + da) - T(a)]/da = \frac{dT}{da} = -\frac{i}{\hbar} p_x T(a)$$

This is a differential equation with the solution $T(a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_x a\right)$.

Additionally, suppose a Hamiltonian \mathbf{H} is independent of the \mathbf{x} position. Because the translation operator can be written in terms of p_x , and $[p_x, \mathbf{H}] = 0$, we know that $[\mathbf{H}, T(a)] = 0$. This result means that linear momentum for the system is conserved.

Аналогічно для кутового моменту

Classically we have for the angular momentum $l = r \times p$. This is the same in quantum mechanics considering r and p as operators. Classically, an infinitesimal rotation dt of the vector $r=(x,y,z)$ about the z-axis to $r'=(x',y',z)$ leaving z unchanged can be expressed by the following infinitesimal translations (using Taylor approximation):

$$x' = r \cos(t + dt) = x - ydt + \dots$$

$$y' = r \sin(t + dt) = y + xdt + \dots$$

From that follows for states:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z, dt)|r\rangle &= \mathbf{R}(z, dt)|x, y, z\rangle = |x - ydt, y + xdt, z\rangle = \mathbf{T}_x(-ydt)\mathbf{T}_y(xdt)|x, y, z\rangle \\ &= \mathbf{T}_x(-ydt)\mathbf{T}_y(xdt)|r\rangle \end{aligned}$$

And consequently:

$$\mathbf{R}(z, dt) = \mathbf{T}_x(-ydt)\mathbf{T}_y(xdt)$$

Using $\mathbf{T}_k(a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_k a\right)$ from above with $k = x, y$ and Taylor expansion we get:

$$\mathbf{R}(z, dt) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (xp_y - yp_x)dt\right] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} l_z dt\right) = 1 - \frac{i}{\hbar} l_z dt + \dots$$

with $l_z = x p_y - y p_x$ the z-component of the angular momentum according to the classical cross product.

Для кУТОВОГО МОМЕНТУ

To get a rotation for the angle t , we construct the following differential equation using the condition $\mathbf{R}(z, 0) = 1$:

$$\mathbf{R}(z, t + dt) = \mathbf{R}(z, t)\mathbf{R}(z, dt) \Rightarrow$$

$$[\mathbf{R}(z, t + dt) - \mathbf{R}(z, t)]/dt = d\mathbf{R}/dt = \mathbf{R}(z, t)[\mathbf{R}(z, dt) - 1]/dt = -\frac{i}{\hbar}l_z\mathbf{R}(z, t) \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}(z, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t l_z\right)$$

Similar to the translation operator, if we are given a Hamiltonian \mathbf{H} which rotationally symmetric about the axis, $[l_z, \mathbf{H}] = 0$ implies $[\mathbf{R}(z, t), \mathbf{H}] = 0$. This result means that angular momentum is conserved.

For the spin angular momentum about the y-axis we just replace l_z with $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ and we get the spin rotation operator $\mathbf{D}(y, t) = \exp\left(-i\frac{t}{2}\sigma_y\right)$.

Кутова залежність фрагментів ділення при фотоподілу

Уинхолд, Демос и Халперн [80] первыми привлекли внимание к анизотропии углового распределения осколков при делении. Они изучали фотоделение тория и урана, используя тормозное излучение линейного ускорителя электронов МИТ на 16 Мэв. Осколки регистрировались под несколькими углами, и оказалось, что они испускаются преимущественно под 90° к направлению пучка фотонов для мишеней Th^{232} и U^{238} . Полученные угловые распределения описывались формулой $a + b \sin^2 \vartheta$. Анизотропия (отношение b/a) была выше у Th^{232} , чем у урана, но быстро падала, когда энергия γ -лучей достигала нескольких мегаэлектронвольт над порогом деления. В области гигантского резонанса (вокруг 14 Мэв) анизотропия была либо мала, либо вообще равна нулю. В некоторых экс-

80. Winhold E. J., Halpern I. Phys. Rev., 103, 990 (1956); Winhold, Demos, Halpern. Phys. Rev., 85, 728 (A) (1962); Phys. Rev. 87, 1139 (1952); Fairhall, Halpern, Winhold. Phys. Rev., 94, 733 (1954); Winhold E. J., Thesis Ph. D. Massachusetts Institute of Technology, Sept., 1953.

Фотон-безмасова нейтральна частинка.

Спін фотона дорівнює 1 (частинка є бозонім), але через нульову масу спокою більш відповідною характеристикою є спіральність.

Спіральність це проекція спина частинки на напрямок руху.

Фотон може перебувати тільки в двох спінових станах зі спіральністю, рівною +1 або -1.

Цій властивості в класичній електродинаміці відповідає циркулярна поляризація електромагнітної хвилі.

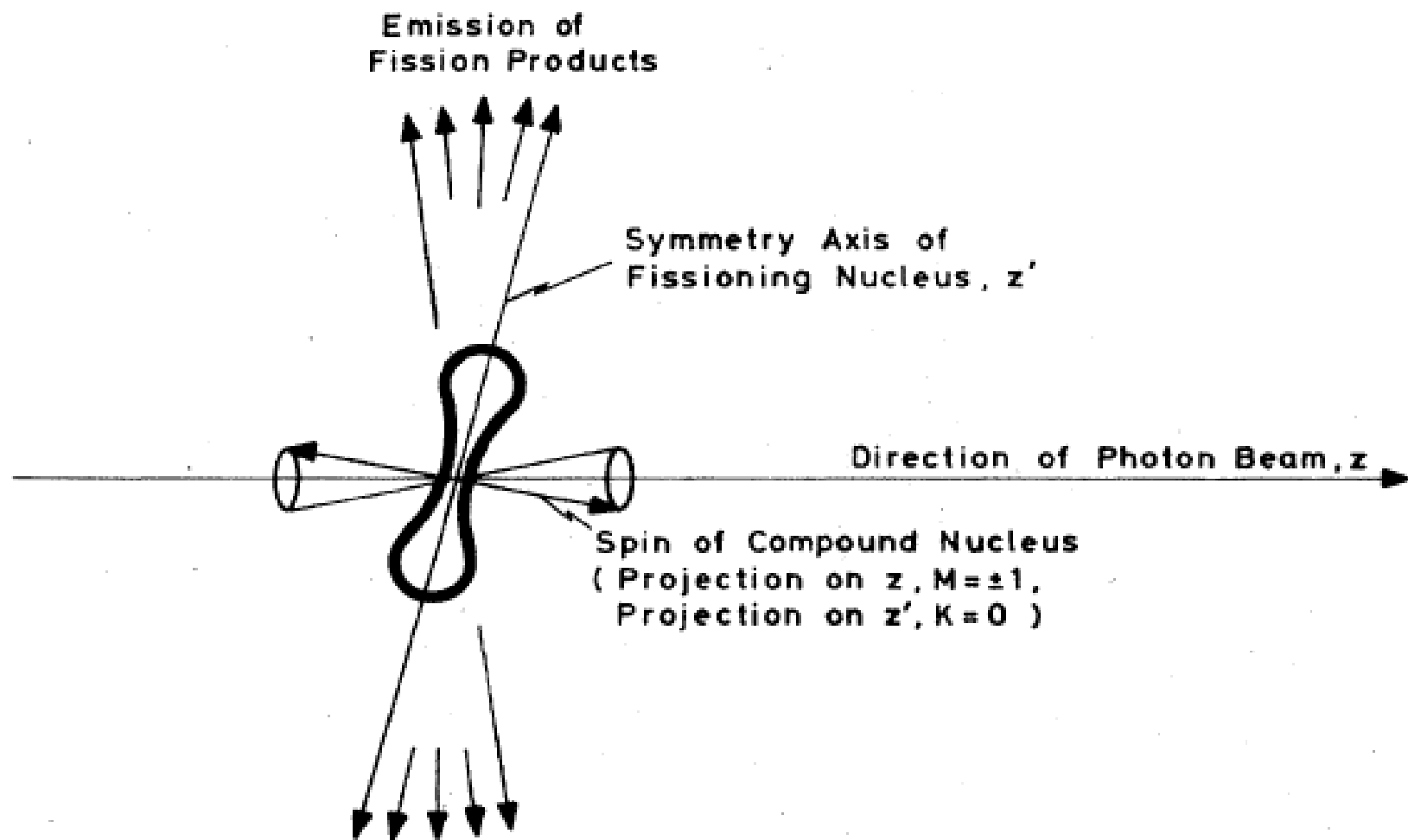


FIG. 3. The relations of Fig. 2 explain the angular distribution of fission products from an even nucleus in a photofission reaction dominated by dipole absorption and fission through a transition state with $K = 0$.

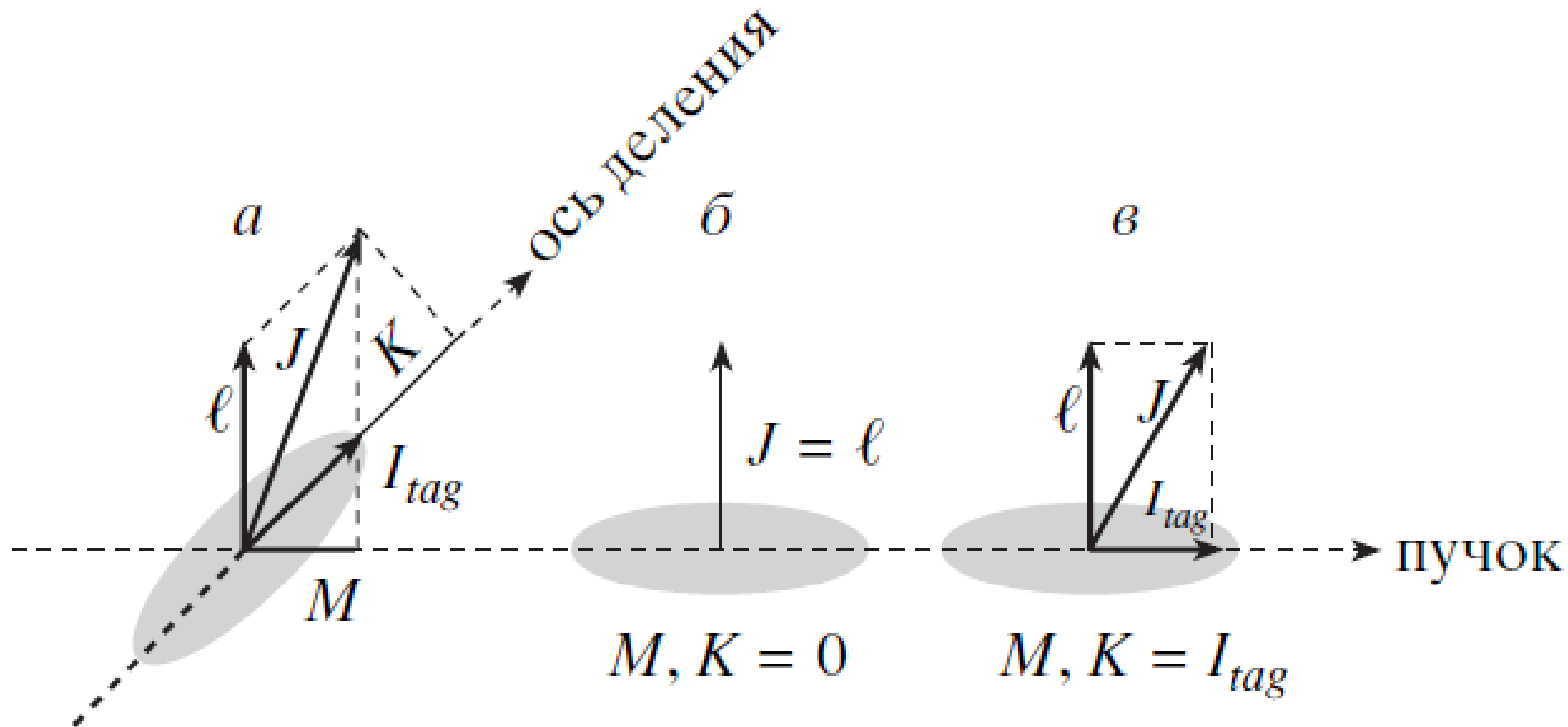
Оптимальные выходы осколков деления* в зависимости от максимальной энергии тормозного спектра E_0 и угла по отношению к пучку γ -квантов θ (Кац, Берг, Браун)

$E_0, \text{ Мэв}$	Угол отклонения $\theta, \text{ град}$				α в выражении $W(\theta) = 1 + \alpha \sin^2 \theta$	
	α	25	45	60		90
Th^{232}						
6,5	$1,0 \pm 0,3$	—	—	—	20 ± 5	> 25
7,0	$1,00 \pm 0,04$	—	$4,1 \pm 0,2$	$6,7 \pm 0,3$	$8,4 \pm 0,3$	13 ± 1
7,5	$1,0 \pm 0,1$	—	$5,1 \pm 0,4$	$6,0 \pm 0,4$	$8,8 \pm 0,5$	$7,2 \pm 0,7$
8,0	$1,00 \pm 0,09$	—	$2,4 \pm 0,2$	$3,6 \pm 0,3$	$5,1 \pm 0,3$	$6,7 \pm 0,7$
9,0	$1,0 \pm 0,1$	—	—	—	$3,4 \pm 0,3$	$2,8 \pm 0,4$
10,0	$1,00 \pm 0,04$	$1,16 \pm 0,05$	$1,67 \pm 0,08$	$1,97 \pm 0,08$	$2,4 \pm 0,1$	$1,63 \pm 0,06$
14,0	$1,00 \pm 0,05$	—	—	—	$1,43 \pm 0,08$	$0,46 \pm 0,09$
20,0	$1,00 \pm 0,05$	—	—	—	$1,13 \pm 0,06$	$0,14 \pm 0,06$
U^{238}						
6,0	$1,0 \pm 0,3$	—	—	—	$6,0 \pm 1,4$	$6,6 \pm 2$
6,3	$1,0 \pm 0,1$	—	$3,6 \pm 0,4$	—	$5,9 \pm 0,6$	$5,8 \pm 1$
6,5	$1,0 \pm 0,2$	—	—	—	$4,5 \pm 0,7$	$4,4 \pm 1$
7,0	$1,00 \pm 0,08$	$1,5 \pm 0,1$	$2,0 \pm 0,2$	$2,4 \pm 0,2$	$2,9 \pm 0,2$	$1,84 \pm 0,2$
8,0	$1,00 \pm 0,06$	—	—	—	$2,1 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
9,4	$1,00 \pm 0,04$	—	$1,22 \pm 0,06$	—	$1,43 \pm 0,06$	$0,46 \pm 0,06$
10,0	$1,00 \pm 0,04$	—	—	—	$1,38 \pm 0,04$	$0,41 \pm 0,05$
14,0	$1,00 \pm 0,04$	—	—	—	$1,08 \pm 0,04$	$0,09 \pm 0,04$
20,0	$1,00 \pm 0,03$	—	—	—	$1,05 \pm 0,03$	$0,05 \pm 0,03$

* Все приведенные здесь величины есть числа отсчетов на единицу γ -излучения, нормированные на выход под углом 0° .

Комар, Бочелов, Фадеев изучали давление U^{238} пучком тормозных γ -квантов с энергией 35 Мэв и измеряли анизотропию [«Атомная энергия», 15, 191 (1963)].

Angular dependence of fission fragments at fission induced by particles



С позиций классической теории вектор углового момента падающего нейтрона примерно перпендикулярен к направлению пучка ($m_L = 0$, $m_s = \pm 1/2$). Составное ядро, образованное четно-четной мишенью и падающим нейтроном, также имеет вектор углового момента, ориентированный приблизительно перпендикулярно к направлению пучка нейтронов. Большая часть энергии возбуждения составного ядра идет на его деформацию, на достижение седловой точки и занято лишь нижнее ядерное состояние. Нижнее состояние соответствует наименьшему вращательному моменту (и энергии). Следовательно, вектор углового момента и ось симметрии ядра примерно параллельны друг другу и перпендикулярны к направлению пучка. Тогда осколки разлетаются под углом 90° к пучку. При более высоких энергиях ось симметрии ядра вращается почти перпендикулярно к вектору углового момента и получается угловое распределение с максимумом в продольном направлении. Уилетс и Чейз

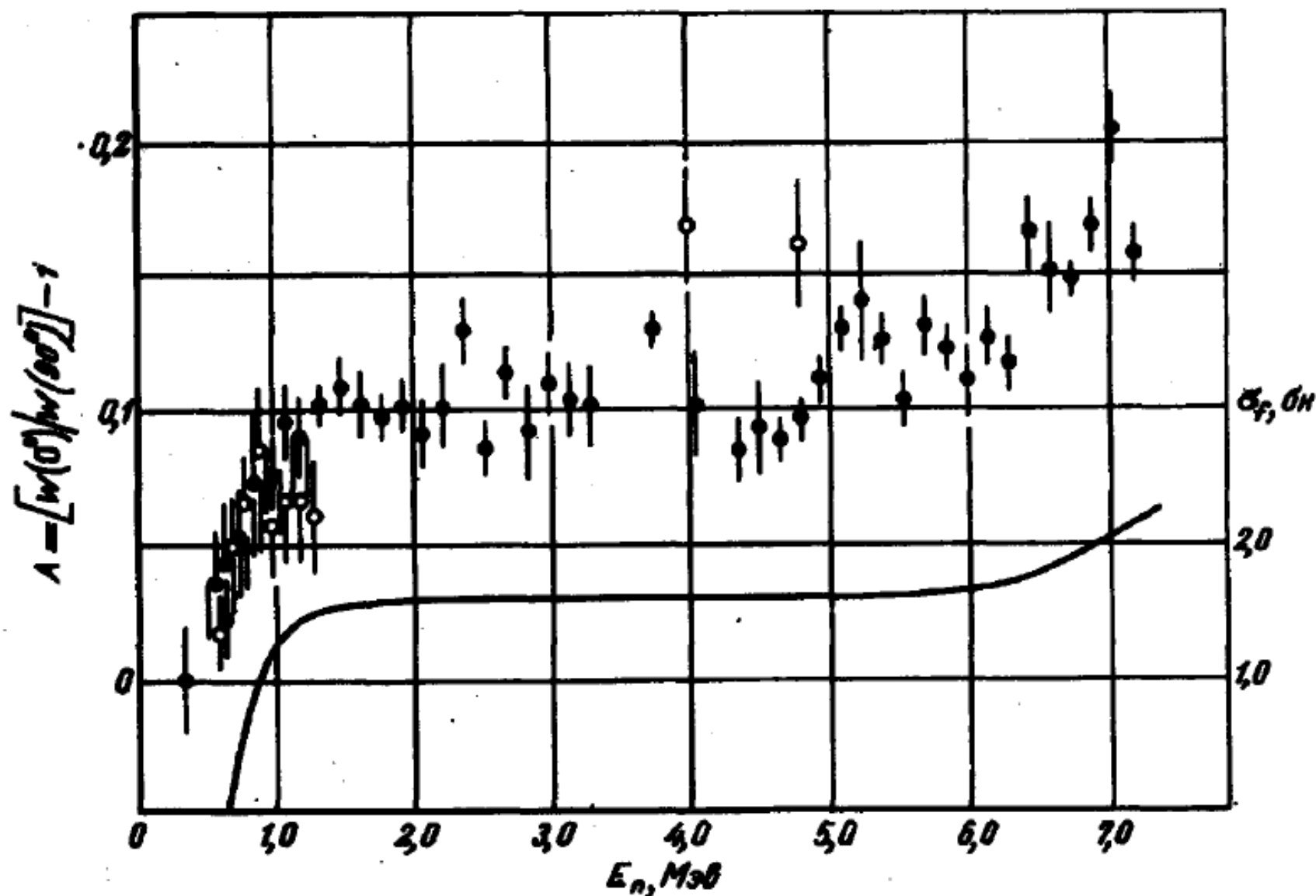


Рис. 1. Угловая анизотропия осколков деления $\text{Am}^{241} (n, f)$ как функция энергии нейтронов. o — данные [3], ● — данные настоящей работы. Внизу схематически показан ход сечения деления σ_f .

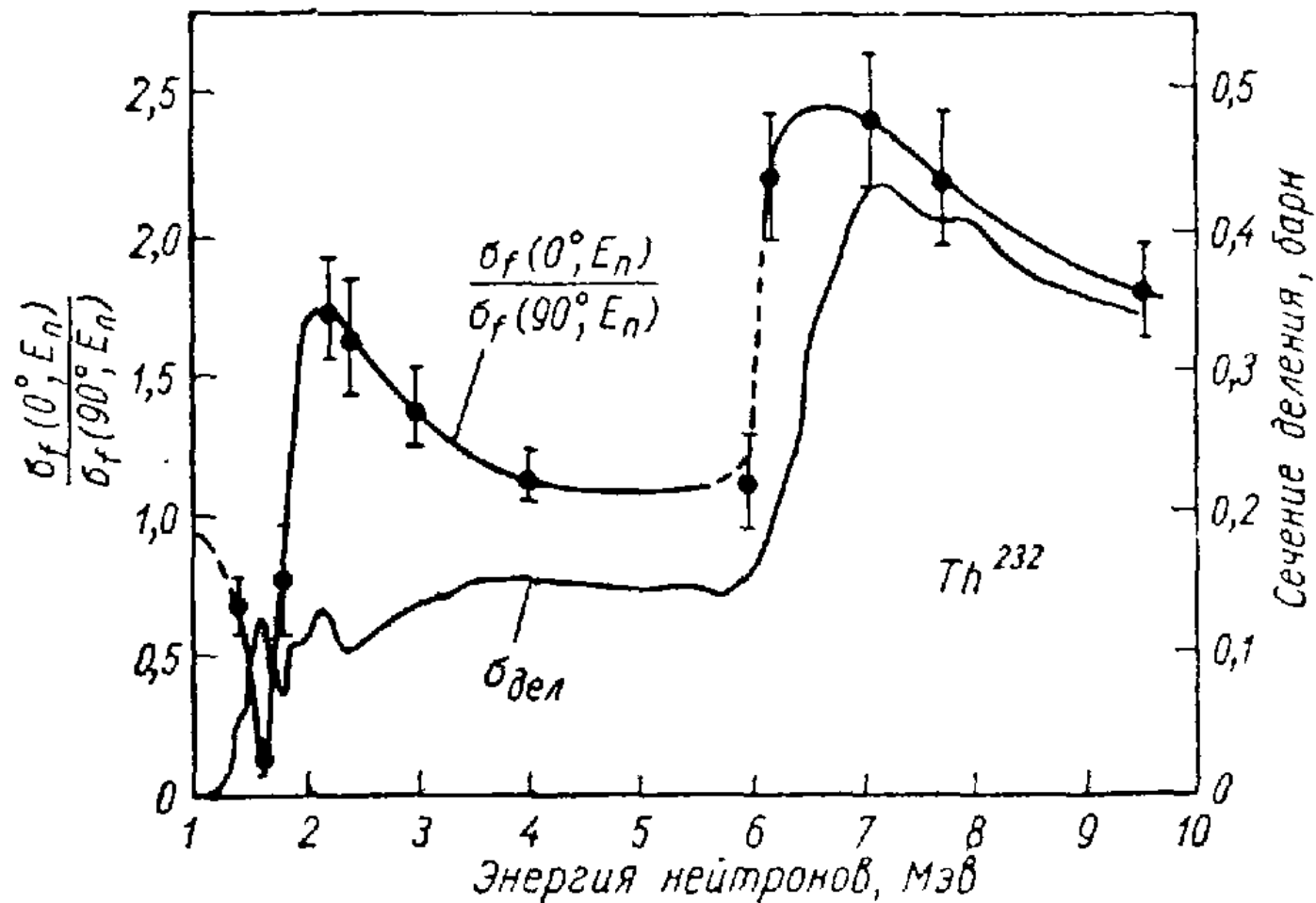


Рис. 23. Зависимость анизотропии углового распределения осколков при делении Th^{232} нейтронами от энергии. Анизотропия определена как отношение числа осколков, испущенных в направлении пучка к числу осколков, испущенных в перпендикулярном направлении. Здесь же приведено сечение деления [89].

**Анизотропия ($0^\circ/90^\circ$) разлета осколков при делении α -частицами
и дейтронами (Халперн, Коффин [98])**

Ядро-мишень	Энергия, Мэв		
	α -частиц 43	дейтронов 22	протонов 10
Pu ²³⁹	$1,37 \pm 0,03$	$1,17 \pm 0,04$	$1,03 \pm 0,03$
Np ²³⁷	$1,40 \pm 0,03$	$1,19 \pm 0,04$	$1,05 \pm 0,03$
U ²³⁵	$1,44 \pm 0,03$	$1,21 \pm 0,04$	$1,09 \pm 0,03$
U ²³⁸	$1,54 \pm 0,03$	$1,25 \pm 0,04$	$1,07 \pm 0,03$
Th ²³²	$1,76 \pm 0,03$	$1,42 \pm 0,04$	$1,12 \pm 0,03$
Ra ²²⁶	$2,04 \pm 0,05$	$1,28 \pm 0,04$	—
Bi ²⁰⁹	$2,02 \pm 0,07$	—	—

10.9.4. Статистическая теория угловых распределений

Большую часть результатов, полученных в упомянутых работах, можно суммировать следующим образом [104]:

1. Осколки разлетаются с наибольшей вероятностью по направлению пучка и против.

2. Анизотропия увеличивается с ростом размера частиц, вызывающих деление.

3. Анизотропия при делении нечетных ядер примерно та же, что и при делении четно-четных ядер, в отличие от ситуации, существующей в фотоделении при низких энергиях.

4. При делении быстрыми нейтронами наблюдается возрастание анизотропии всякий раз, когда энергия становится достаточно велика, чтобы сделать возможным деление остаточного ядра, которое образуется после испарения определенного числа нейтронов.

5. С увеличением энергии бомбардирующих частиц средняя анизотропия меняется медленно.

6. Анизотропия максимальна для значений отношения масс, соответствующих асимметричному делению.

7. Анизотропия уменьшается с увеличением Z^2/A ядра-мишени.

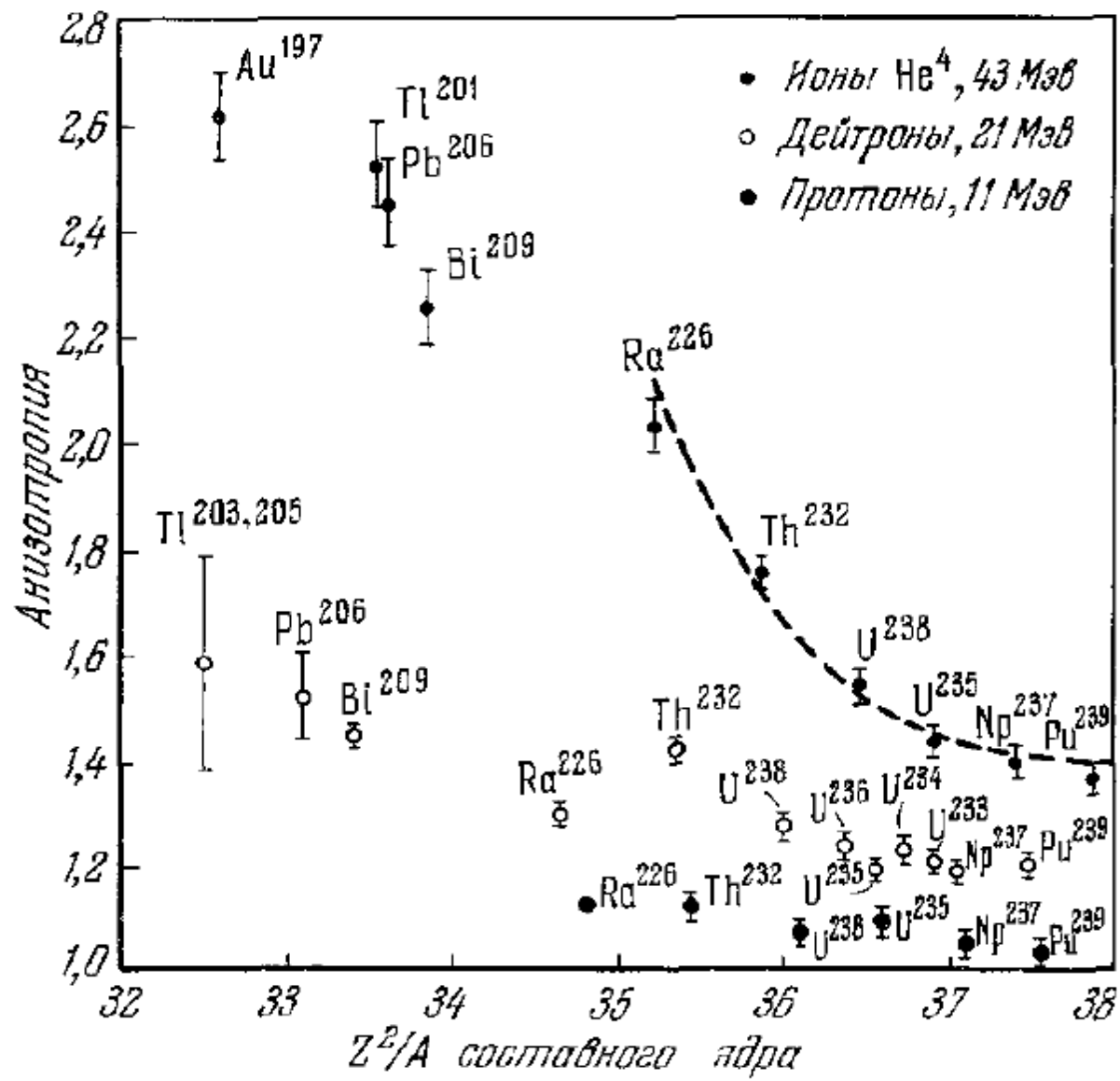
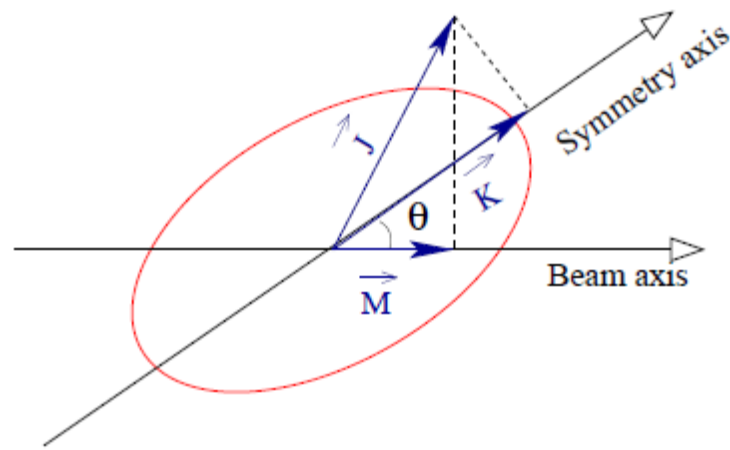


Рис. 19. Зависимость анизотропии углового распределения осколков деления от Z^2/A составного ядра при облучении ряда ядер протонами, дейтонами и альфа-частицами $^{225}, ^{226}, ^{228}$.

Халперн и Струтинский [105] и Гриффин [86] разработали статистическую теорию для объяснения этих закономерностей. Эта теория основывается на предположениях Бора [85] и применима в тех случаях, когда большое число квантовых состояний становится энергетически доступным в седловой точке.

105. Halpern I., Strutinski V. M. Paper P/1513, Proceedings of the Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 15, Geneva (1958); Halpern I. Ref. 104, Nucl. Phys., 27, 348 (1961); Струтинский В. М. «Атомная энергия», 6, 508 (1957).



$$\begin{aligned}
 E_{\text{rot}}^{J,K} &= \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}}(J^2 - K^2) + \frac{\hbar^2}{2I_{\parallel}}K^2 \\
 &= \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}}J^2 + \frac{\hbar^2 K^2}{2} \left(\frac{1}{I_{\parallel}} - \frac{1}{I_{\perp}} \right) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}}J^2 + \frac{\hbar^2}{2I_{\text{eff}}}K^2
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

where,

$$\frac{1}{I_{\text{eff}}} = \frac{1}{I_{\parallel}} - \frac{1}{I_{\perp}}$$

Here I_{\parallel} is the moment of inertia parallel to the symmetry axis and I_{\perp} is the moment of inertia perpendicular to the symmetry axis.

The density of levels in the transition state is dependent on the thermodynamic energy $(E - E_{rot}^{J,K})$ available to the nucleus,

$$\rho(J, K) \propto e^{\frac{(E - E_{rot}^{J,K})}{T}} \quad (6.2)$$

where E is the total energy and T is the temperature at the saddle point. For fixed E and T and J,

$$\begin{aligned} \rho(K) &\propto e^{-\frac{K^2}{T}} \\ &\propto e^{-\frac{k^2 K^2}{2I_{eff} T}} \end{aligned}$$

This is equivalent to a truncated Gaussian K distributions,

$$\begin{aligned} \rho(J, K) &\propto e^{-\frac{K^2}{2K_0^2}} : \text{when } K \leq J \\ &= 0 : \text{when } K > J \end{aligned}$$

which is characterized by a variance

$$K_0^2 = \frac{I_{eff} T}{k^2}$$

The probability of emitting fission fragments from a transition state with quantum numbers J, M and K at angle θ is given by

$$\begin{aligned} P_{M,K}^J(\theta) &= (2J + 1) \frac{2\pi \sin\theta R d\theta}{4\pi R^2} |d_{M,K}^J(\theta)|^2 \\ &= \frac{2J + 1}{2} |d_{M,K}^J(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (6.3)$$

where $P_{M,K}^J(\theta)$ represents the probability of emitting fission fragments at angle θ into the conical volume defined by the angular increment $d\theta$. The normalization is such that the probability integrates to unity for limits 0 to π . The area of the angular ring on a sphere of radius R through which the fission fragments are passing is given by the width of the strip $Rd\theta$ times the circumference of the ring $2\pi R \sin\theta$. The annular ring area must be divided by the total area of the sphere $4\pi R^2$ in order to give the probability as given by $P_{M,K}^J(\theta)$.

The $d_{M,K}^J(\theta)$ functions are defined by the following relation:

$$d_K^J(\theta) = [J!J!(J+K)!(J-K)!]^{1/2} \sum_x \frac{(-1)^x (\sin \frac{\theta}{2})^{K+2x} (\cos \frac{\theta}{2})^{2J-K-2x}}{(J-K-x)!(J-x)!(x+K)!x!} \quad (6.4)$$

where the sum is over $x=0,1,2,\dots$ and contains all terms in which no negative values appears in the denominator of the sum for any one of the quantities in parentheses. The angular distribution $W_{M,K}^J(\theta)$ is obtained by dividing the probability for emitting fission fragments at angle θ by $\sin\theta$,

$$W_{M,K}^J(\theta) \propto \frac{2J+1}{2} |d_{M,K}^J|^2 \quad (6.5)$$

The angular distribution of the fission fragments, produced due to the fission of a completely fused nucleus mainly depends upon three factors:

- (i) Transmission coefficient, T_J for passage through the transition state
- (ii) Level density $\rho(E, K)$
- (iii) Probability distribution $P_{M,K}^J(\theta)$.

In the limit when the target and projectile spins are zero and no particle emission from the initial compound nucleus occurs before fission, i.e., $M=0$, the angular distributions

$$|d_{0,K}^J(\theta)|^2 \cong \frac{1}{\pi} [(J + \frac{1}{2})^2 \sin^2 \theta - K^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Следующим шагом является интегрирование $W_{I,K}$ по гауссовскому распределению по K . Распределение для фиксированного I и заданного K_0^2 дается Халперном и Струтинским в следующем виде:

$$W(\theta)_{I, K_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{2K_0} \exp(-I^2 \sin^2 \theta / 4K_0^2) J_0(iI^2 \sin^2 \theta / 4K_0^2), \quad (14)$$

где J_0 —функция Бесселя, а N —нормировочная константа (она близка к единице при $I > K_0$).

Если $I^2/4K_0^2$ много больше единицы, то можно показать, что

$$\frac{W(0^\circ)}{W(90^\circ)} = 1 + \frac{I^2}{(2K_0)^2}. \quad (15)$$

Here K_0^2 is the variance of the K distribution and $\langle J^2 \rangle$ is the second moment of the compound nuclear spin distribution. K_0^2 is given as

$$K_0^2 = \frac{I_{eff} T}{h^2} \quad (6.10)$$

where I_{eff} is the effective moment of inertia and T is the temperature at the saddle.

The temperature T is given as

$$T = \sqrt{\frac{E^*}{a}} \quad (6.11)$$

**Анизотропия ($0^\circ/90^\circ$) разлета осколков при делении α -частицами
и дейтронами (Халперн, Коффин [98])**

Ядро-мишень	Энергия, Мэв		
	α -частиц 43	дейтронов 22	протонов 10
Pu ²³⁹	$1,37 \pm 0,03$	$1,17 \pm 0,04$	$1,03 \pm 0,03$
Np ²³⁷	$1,40 \pm 0,03$	$1,19 \pm 0,04$	$1,05 \pm 0,03$
U ²³⁵	$1,44 \pm 0,03$	$1,21 \pm 0,04$	$1,09 \pm 0,03$
U ²³⁸	$1,54 \pm 0,03$	$1,25 \pm 0,04$	$1,07 \pm 0,03$
Th ²³²	$1,76 \pm 0,03$	$1,42 \pm 0,04$	$1,12 \pm 0,03$
Ra ²²⁶	$2,04 \pm 0,05$	$1,28 \pm 0,04$	—
Bi ²⁰⁹	$2,02 \pm 0,07$	—	—

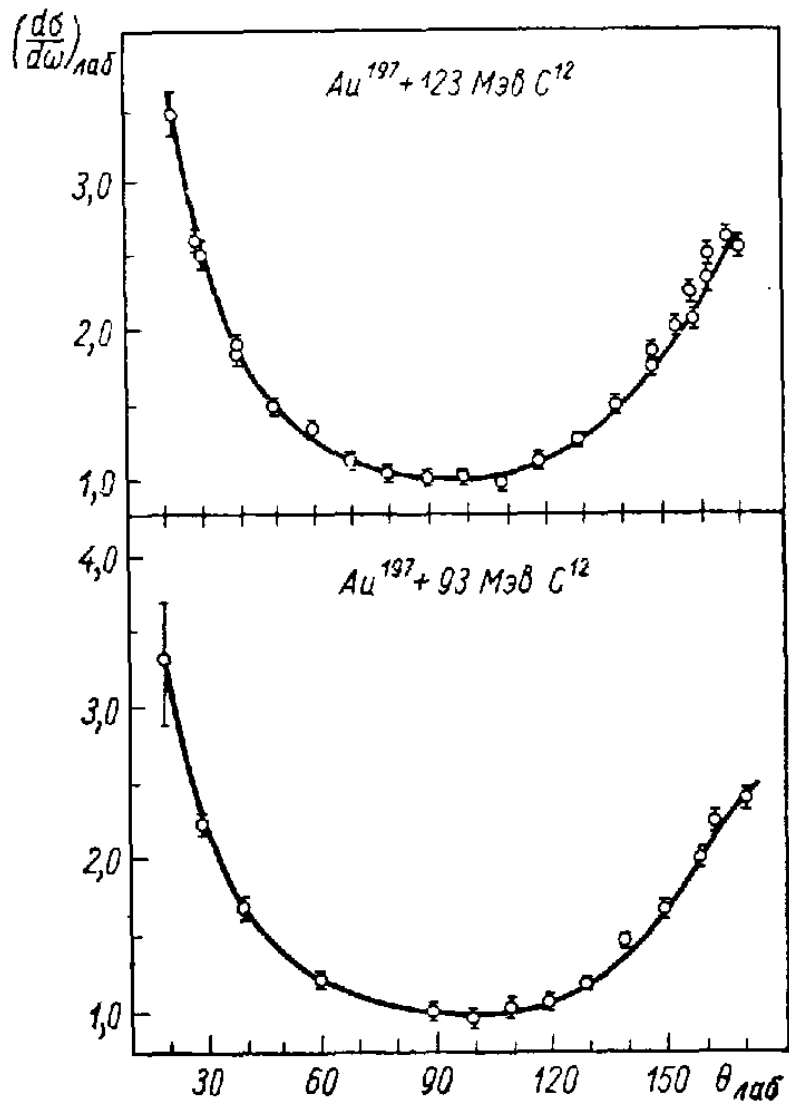


Рис. 30. Угловые распределения осколков деления в лабораторной системе согласно измерениям Гордона и др. [103].

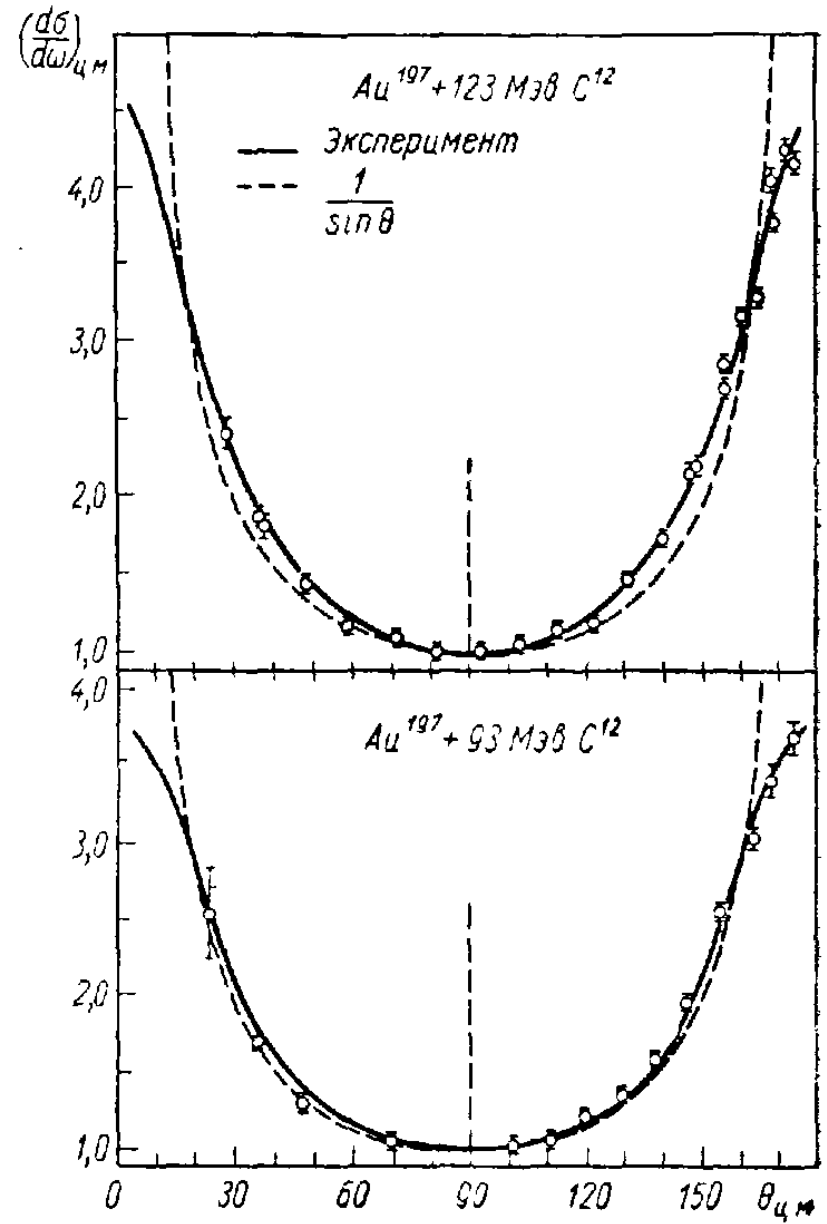


Рис. 31. Угловые распределения осколков в системе центра масс согласно работе [103].

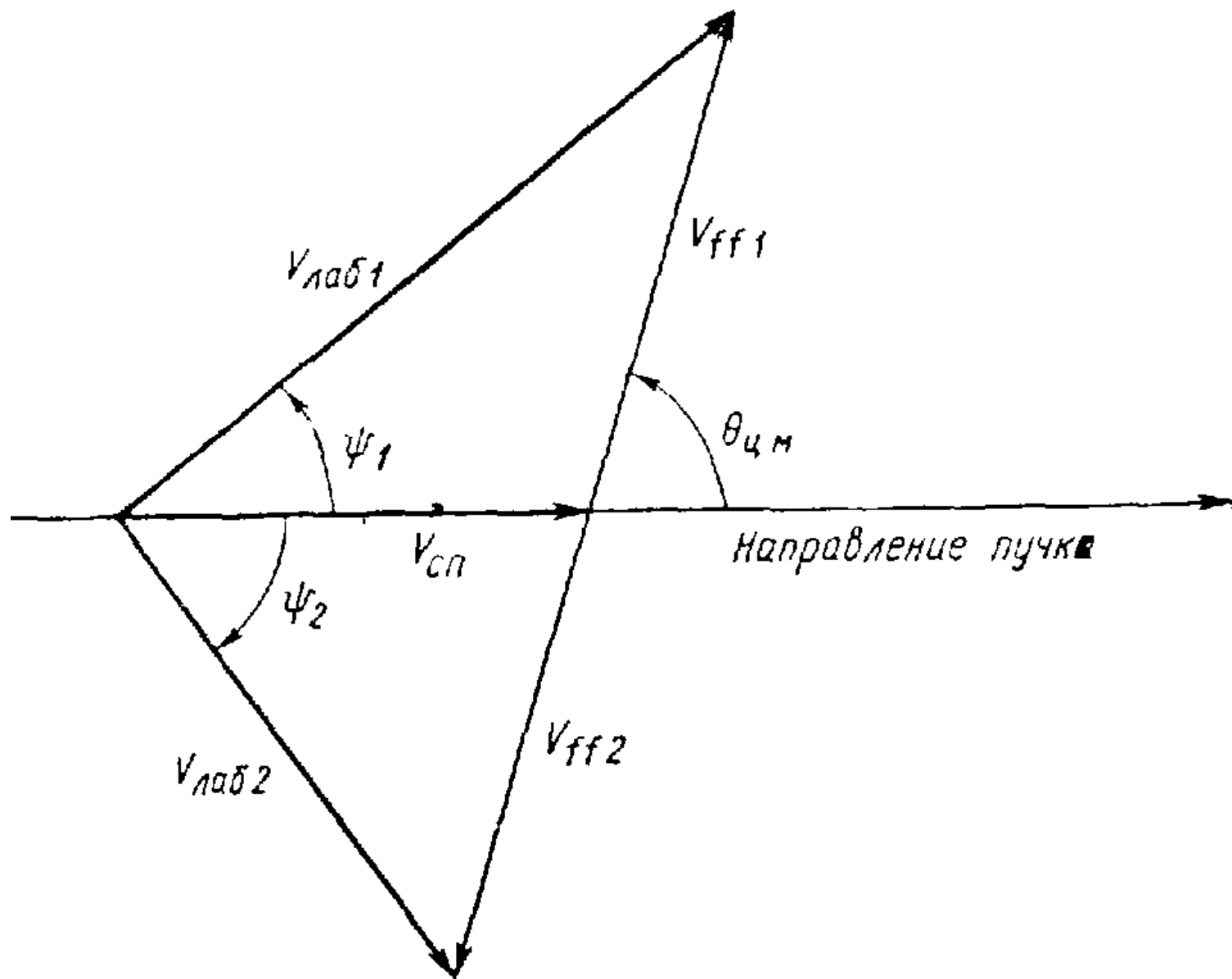
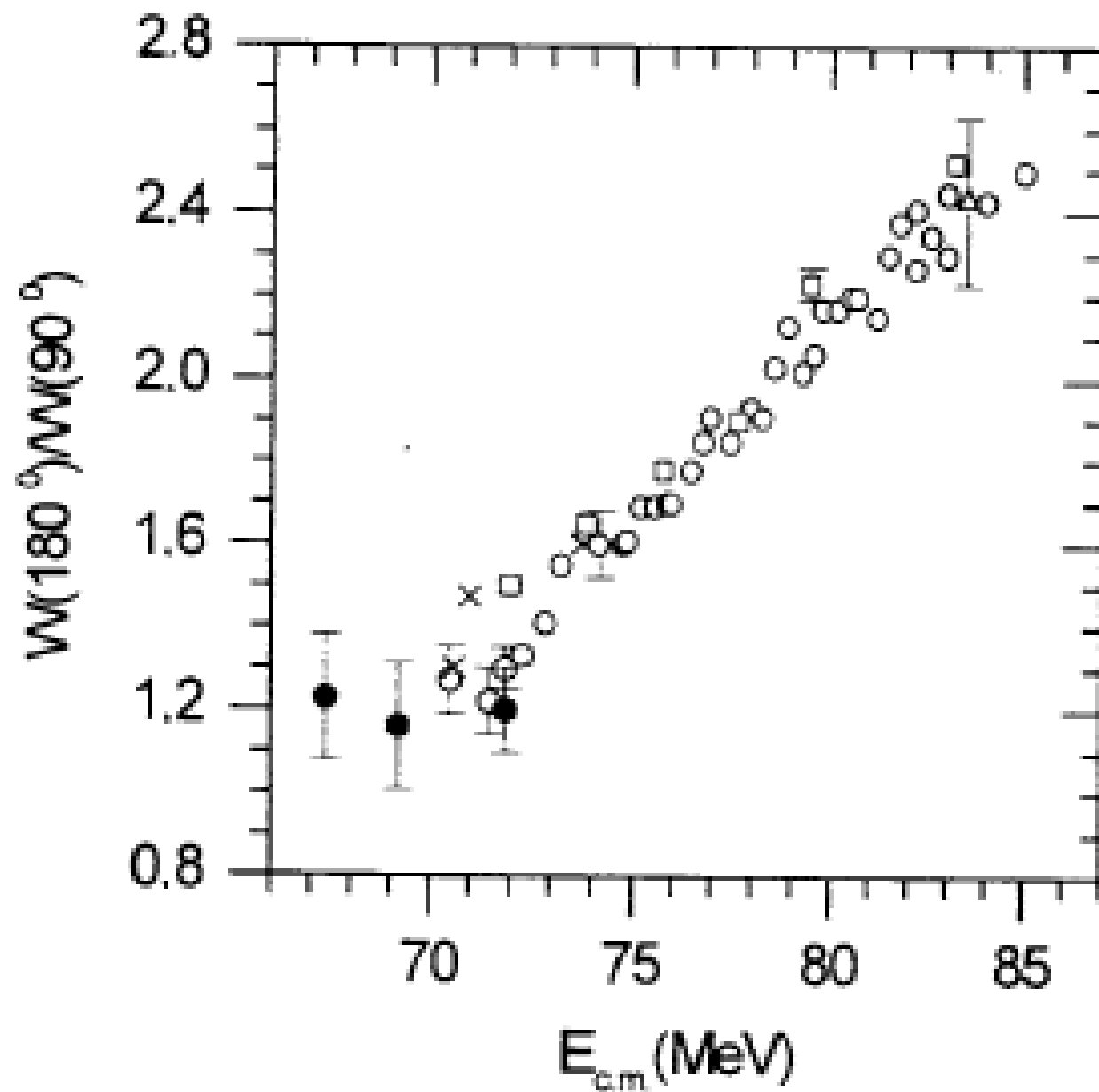


Рис. 32. Векторная диаграмма связи между системой центра масс и лабораторной системой при делении на два осколка.

ANISOTROPY OF FISSION FRAGMENTS
FOR THE REACTION $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$

*B.I.Pustyl'nik, L.Calabretta¹, Yu.Ts.Oganessian, M.G.Itkis, E.M.Kosulin,
S.P.Tretyakova, T.Yu.Tretyakova*



УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ В РЕАКЦИЯХ ПОЛНОГО СЛИЯНИЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

© 2007 г. Д. О. Еременко, А. В. Дерменев, В. А. Дроздов, С. Ю. Платонов, О. В. Фотина, М. Х. Эсламизаде, О. А. Юминов

$W(0^\circ)/W(90^\circ)$

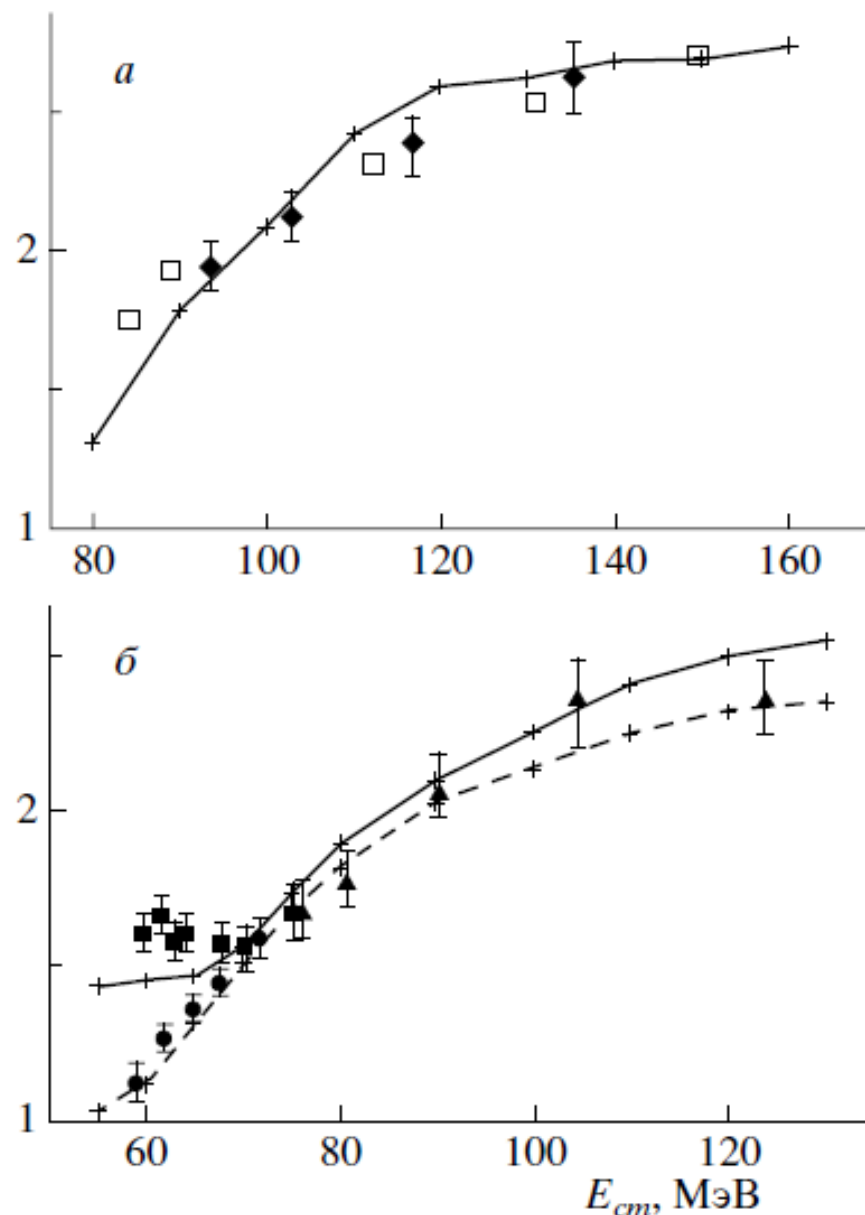


Рис. 8. Анизотропия угловых распределений осколков деления для реакций $^{16}\text{O} + ^{232}\text{Th}$ (а) и $^{12}\text{C} + ^{236,235}\text{U}$ (б).

Дякую за увагу!!!