

Статистичний розпад ядер

В.Ю. Денисов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Інститут ядерних досліджень, Київ, Україна

ПЛАН

1. ВСТУП
2. Густина рівней атомних ядер
3. Нейтронна ширина
4. Емісія заряджених частинок (Z)
5. γ -розпад
6. Поділ ядер
7. Розпад компаунд ядра
8. Висновки

1. Вступ

Компаунд-ядро (або складене ядро) може утворюватися при різних ядерних реакціях, як, наприклад, при

- поглинанні нейтронів;
- поглинанні γ -квантів;
- поглинанні протона-, альфа-, будь-якої легкої зарядженої частинки (d , ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ...);
- реакціях злиття важких іонів.

Поперечний переріз утворення компаунд-ядра та послідовний статистичний розпад у специфічний канал розпаду c (пов'язаний з емісією частинки c або фотона) є

$$\sigma(a + b \rightarrow CN \rightarrow c|E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma(a + b \rightarrow CN|E, \ell) \frac{\Gamma(CN \rightarrow c|E, \ell)}{\Gamma_{\text{total}}(CN|E, \ell)},$$

де $\sigma(a + b \rightarrow CN|E, \ell)$ є парціальний переріз формування компаунд ядра,

$\Gamma(CN \rightarrow c|E, \ell)$ є парціальна ширина розпаду компаунд ядра у канал c , та

$$\Gamma_{\text{total}}(CN|E, \ell) = \sum_{\text{all possible decay channels } c} \Gamma(CN \rightarrow c|E, \ell)$$

є повна ширина розпаду компаунд-ядра.

Розпад збуджених складених ядер описано статистичною теорією.

Процес статистичного розпаду не залежить від процесу утворення компаунд-ядра.

Іноді енергія збудження компаунд-ядра після емісії частинки c (CN^{1c}) з початкового компаунд-ядра (CN^0) висока, тому частинка c може випромінюватися знову і знову, тому

$$\sigma(a + b \rightarrow CN \rightarrow c|E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma(a + b \rightarrow CN|E, \ell) \frac{\Gamma(CN \rightarrow c|E, \ell)}{\Gamma_{\text{total}}(E, \ell)} \times \left[1 + \frac{\Gamma(CN^{1c} \rightarrow c|E, \ell)}{\Gamma_{\text{total}}(CN^{1c}|E, \ell)} + [1 + \dots] \right],$$

Ширина $\Gamma(CN \rightarrow c|E, \ell)$ зв'язана с матричним елементом переходу (або коефіцієнтом передачі $T(c|E, \ell)$) та густиною рівнів компаунд-ядра $\rho(E)$.

2. Густина рівнів компаунд-ядра

Густина рівнів Фермі-газу

Розглянемо ядерний стан $|i\rangle$ з енергією E_i , якій задовольняє рівнянню Шредінгера

$$H|i\rangle = \left[\sum_{\nu} \varepsilon_{P\nu} n_{P\nu} + \sum_{\nu} \varepsilon_{N\nu} n_{N\nu} \right] |i\rangle = E_i |i\rangle.$$

Тут E_i - енергія стану i багаточастинкової системи, що має Z протонів і N нейтронів, $\varepsilon_{P\nu}$ і $\varepsilon_{N\nu}$ є енергії протона і нейтрона одночастинок, $n_{P\nu}$ і $n_{N\nu}$ - розподіли заповнення відповідного стану одночастинок.

Нуклони є ферміонами, тому можливі значення заповнення станів становлять 0 або 1. Кількість протонів і нейтронів є

$$\sum_{\nu} n_{P\nu} |i\rangle = Z |i\rangle,$$
$$\sum_{\nu} n_{N\nu} |i\rangle = N |i\rangle.$$

Густина рівнів багаточастинкової системи (ядра), яка має Z протонів та N нейтронів з енергією E є

$$\rho(N, Z, E) = \sum_i \delta(Z - Z_i) \delta(N - N_i) \delta(E - E_i).$$

Для простоти ми розглянемо нижче частинки одного виду, тому густина рівнів станів є

$$\rho(N, E) = \sum_i \delta(N - N_i) \delta(E - E_i).$$

Перетворення Лапласа і зворотне перетворення Лапласа є відповідно

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(E)\} = \int_0^{\infty} dE e^{-sE} f(E),$$

$$f(E) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{sE} F(s).$$

Корисні співвідношення

$$\Theta(E - E_i) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\beta E_i}}{\beta}\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta e^{\beta E} \frac{e^{-\beta E_i}}{\beta},$$

$$\delta(E - E_i) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\beta E_i}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta e^{\beta E} e^{-\beta E_i}.$$

Застосувати перетворення Лапласа і зворотне перетворення Лапласа. Тоді

$$\rho(N, E) = \sum_i \delta(N - N_i) \delta(E - E_i).$$

трансформується у

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dE \int_0^\infty dN e^{-\beta E + \alpha N} \rho(N, E) &= \sum_i \int_0^\infty dE \int_0^\infty dN e^{-\beta E + \alpha N} \delta(N - N_i) \delta(E - E_i) = \sum_i e^{-\beta E_i + \alpha N_i} \\ &\equiv \sum_i \langle i | e^{-\beta E_i + \alpha N_i} | i \rangle \equiv Sp[e^{-\beta H + \alpha N}] \equiv Z(\beta, \alpha), \end{aligned}$$

де $Z(\beta, \alpha)$ є велика статистична сума.

Густину станів можна оцінити за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$\rho(N, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} d\beta \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N} Z(\beta, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} d\beta \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N + \ln Z(\beta, \alpha)}.$$

Врахував

$$H|i\rangle = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} n_{\nu} |i\rangle = E_i |i\rangle,$$
$$\sum_{\nu} n_{\nu} |i\rangle = N |i\rangle.$$

отримаємо

$$Z(\beta, \alpha) = \sum_i \langle i | e^{-\beta E_i + \alpha N_i} | i \rangle = \sum_i \langle i | e^{\sum_{\nu} [-\beta \varepsilon_{\nu} + \alpha] n_{\nu}} | i \rangle.$$

Беручи до уваги, що сума відбувається за всіма станами системи i та кожним одночастинковим станом з індексом ν , який є вільним $n_{\nu} = 0$ або зайнятим $n_{\nu} = 1$, то

$$e^{[-\beta \varepsilon_{\nu} + \alpha] n_{\nu}} = \begin{cases} 1, & \text{if } n_{\nu} = 0, \\ e^{-\beta \varepsilon_{\nu} + \alpha}, & \text{if } n_{\nu} = 1, \end{cases}$$

ми отримуємо

$$Z(\beta, \alpha) = \prod_{\nu} [1 + e^{-\beta \varepsilon_{\nu} + \alpha}].$$

Отже, ми підміняємо суму по станам системи i на суму по одночастинковим станів ν .

Статистичні значення оцінюються для безперервних станів, тому ми переходимо з дискретного спектру в безперервний спектр, тобто підміняємо $\sum_{\nu} \rightarrow g \int_0^{\infty} d\varepsilon$ (тут ми пропонуємо, що енергії одночастинок є позитивні та початкова енергія рівна 0)

$$\ln Z(\beta, \alpha) = \ln \prod_{\nu} [1 + e^{-\beta \varepsilon_{\nu} + \alpha}] = g \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta \varepsilon + \alpha}].$$

$$\begin{aligned}
\ln Z(\beta, \alpha) &= g \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] = g \int_0^{\alpha/\beta} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] + g \int_{\alpha/\beta}^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] \\
&= g \int_0^{\alpha/\beta} d\varepsilon \ln [(e^{\beta\varepsilon-\alpha} + 1) e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] + g \int_{\alpha/\beta}^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] \\
&= g \int_0^{\alpha/\beta} d\varepsilon \ln [1 + e^{\beta\varepsilon-\alpha}] + g \int_0^{\alpha/\beta} d\varepsilon (\alpha - \beta\varepsilon) + g \int_{\alpha/\beta}^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}].
\end{aligned}$$

Враховував

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha/\beta} d\varepsilon \ln [1 + e^{\beta\varepsilon-\alpha}] &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\alpha} \ln [1 + e^{-x}]|_{\alpha \rightarrow \infty} = \frac{\pi^2}{12\beta}, \\
g \int_{\alpha/\beta}^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{-\beta\varepsilon+\alpha}] &= \frac{\pi^2}{12\beta}.
\end{aligned}$$

ми отримуємо

$$\ln Z(\beta, \alpha) = g \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\pi^2}{6\beta} \right].$$

Як відмічено раніше

$$\rho(N, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} d\beta \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N + \ln Z(\beta, \alpha)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} d\beta \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N + g \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\pi^2}{6\beta} \right]}.$$

Функція

$$S(\alpha, \beta) = \beta E - \alpha N + g \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\pi^2}{6\beta} \right]$$

є ентропія, яка в околі точці (α_0, β_0) визначена рівнянням

$$\left. \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right|_{(\alpha_0, \beta_0)} = \left\{ E - g \left[\frac{\alpha^2}{2\beta^2} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} \right] \right\} \Big|_{(\alpha_0, \beta_0)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right|_{(\alpha_0, \beta_0)} = \left(-N + g \frac{\alpha}{\beta} \right) \Big|_{(\alpha_0, \beta_0)} = 0,$$

можна розкласти як

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta) &= S(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{\partial^2 S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} (\alpha - \alpha_0)^2 \\ &= S(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2} g \left[\frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{3\beta^3} \right] (\beta - \beta_0)^2 + \frac{-g\alpha}{\beta^2} (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{g}{\beta} (\alpha - \alpha_0)^2 \end{aligned}$$

Використовував позначення $\beta = \beta_0 + ix_1$ і $\alpha = \alpha_0 + ix_2$

$$\begin{aligned} \rho(N, E) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} d\beta \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N + g \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\pi^2}{6\beta} \right]} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} d\beta \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\alpha e^{S(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} e^{S(\alpha_0, \beta_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{\frac{-1}{2}g \left[\frac{\alpha^2}{\beta^3} + \frac{\pi^2}{3\beta^3} \right] x_1^2 + \frac{g\alpha}{\beta^2} x_1 x_2 + \frac{-1}{2} \frac{g}{\beta} x_2^2} \end{aligned}$$

Останній інтеграл беремо за наближенні сідловій точці

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i x_j} = \frac{2\pi}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{1/2}}.$$

Знайдемо співвідношення між β_0 , α_0 та енергією Фермі. З визначень кількості частинок N та енергії основного стану E_0 знайдемо, що

$$E_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu_{Fermi}} \varepsilon_{\nu} = g \int_0^{\varepsilon_{Fermi}} d\varepsilon \varepsilon = \frac{g}{2} \varepsilon_{Fermi}^2,$$

$$N = \sum_{\nu=1}^{\nu_{Fermi}} 1 = g \int_0^{\varepsilon_{Fermi}} d\varepsilon = g \varepsilon_{Fermi},$$

Використовуючи рівняння сідловій точці $N = g \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ ми знаходимо $\varepsilon_{Fermi} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$.

Знаходимо ще одне рівняння в сідловій точці та отримаємо

$$E = g \left[\frac{\alpha_0^2}{2\beta_0^2} + \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} \right] = E_0 + aT^2 = E_0 + E^*,$$

де $T = 1/\beta_0$ є температура системи, $a = \frac{\pi^2}{6}g$ є густина рівнів та $E^* = aT^2$ є енергія збудження.

У сідловій точці

$$S(\alpha_0, \beta_0) = 2aT = 2\sqrt{aE^*}.$$

Густина рівнів фермі-газових частинок одного типу є

$$\rho(N, E^*) = \frac{\exp(2\sqrt{aE^*})}{\sqrt{48E^*}}.$$

Якщо розглянути два види частинок (Z - протони та N - нейтрони, $A = N + Z$), то густина рівнів фермі-газу з A частинок двох типів з енергією збудження E^* є

$$\rho(A, E^*) = \frac{\exp(2\sqrt{aE^*})}{12\sqrt{2}a^{1/4}(E^*)^{5/4}}.$$

Густина рівней, яка залежить від спина

Густина рівнів двокомпонентних фермі-газових станів ядер з A нуклонами, зі спіном J та енергії збудження E^* у наближенні відносна малих кутових моментах (тобто при $\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathcal{J}} \ll E^*$) є

$$\rho(A, E^*, J) = \frac{(2J + 1) \exp[-(J + 1/2)^2 / (2\sigma^2)]}{2\sqrt{2}\pi\sigma^3} \rho(A, E^*).$$

Тут

$$\rho(A, E^*) = \frac{\exp(2\sqrt{aE^*})}{12\sqrt{2}a^{1/4}(E^*)^{5/4}}$$

- густина рівнів станів у двокомпонентному фермі-газі, що складається з частинок A та з енергією збудження E^* ,

$$\sigma^2 = \frac{6}{\pi^2} \overline{m^2} \sqrt{aE^*}$$

є параметр спиновий густини, $\overline{m^2}$ є усереднений квадрат проєкцій одночастинкових кутових моментів.

Відметимо, що сума m дає M , де M є проєкція повного кутового моменту J , та

$$\overline{m^2} = \frac{\mathcal{J}_{solid}}{\frac{6}{\pi^2}a},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{solid} &= M_{\text{nucleon}} \int dV(x^2 + y^2)\rho(r) = M_{\text{nucleon}} \int dV(x^2 + y^2)\frac{3A}{4\pi R^3}\theta(R - r) \\
&= M_{\text{nucleon}} \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \frac{3A}{4\pi R^3} = \frac{3M_{\text{nucleon}}A}{8R^3} \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2)^2 \\
&= \frac{3M_{\text{nucleon}}A}{4} R^2 \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{2}{5} M_{\text{nucleon}} r_0^2 A^{5/3}.
\end{aligned}$$

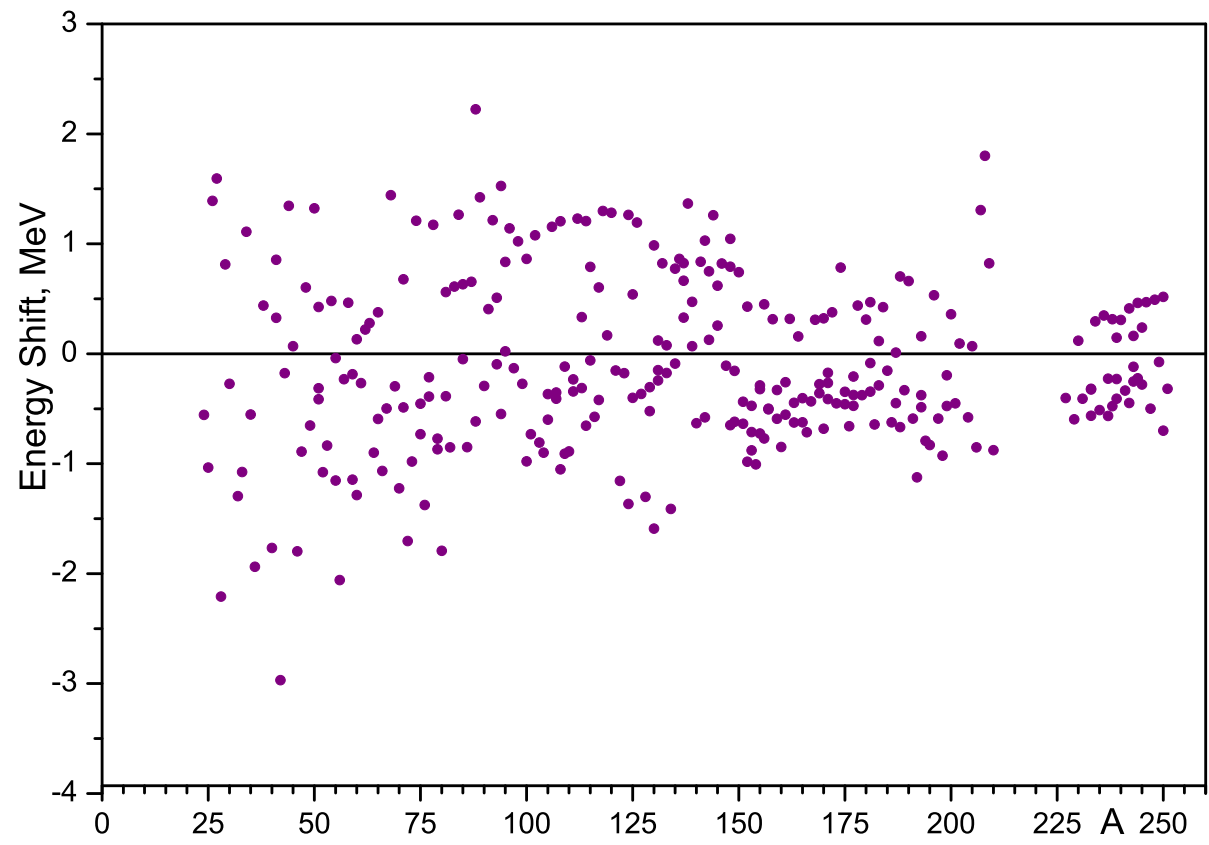
Сили спарювання та вплив щілини спарювання

Завдяки силі спарювання енергетичний спектр має щілину поблизу Фермі-енергії.

Пари нуклонів повинні бути розірвані, перш ніж кожен нуклон може бути збуджений окремо.

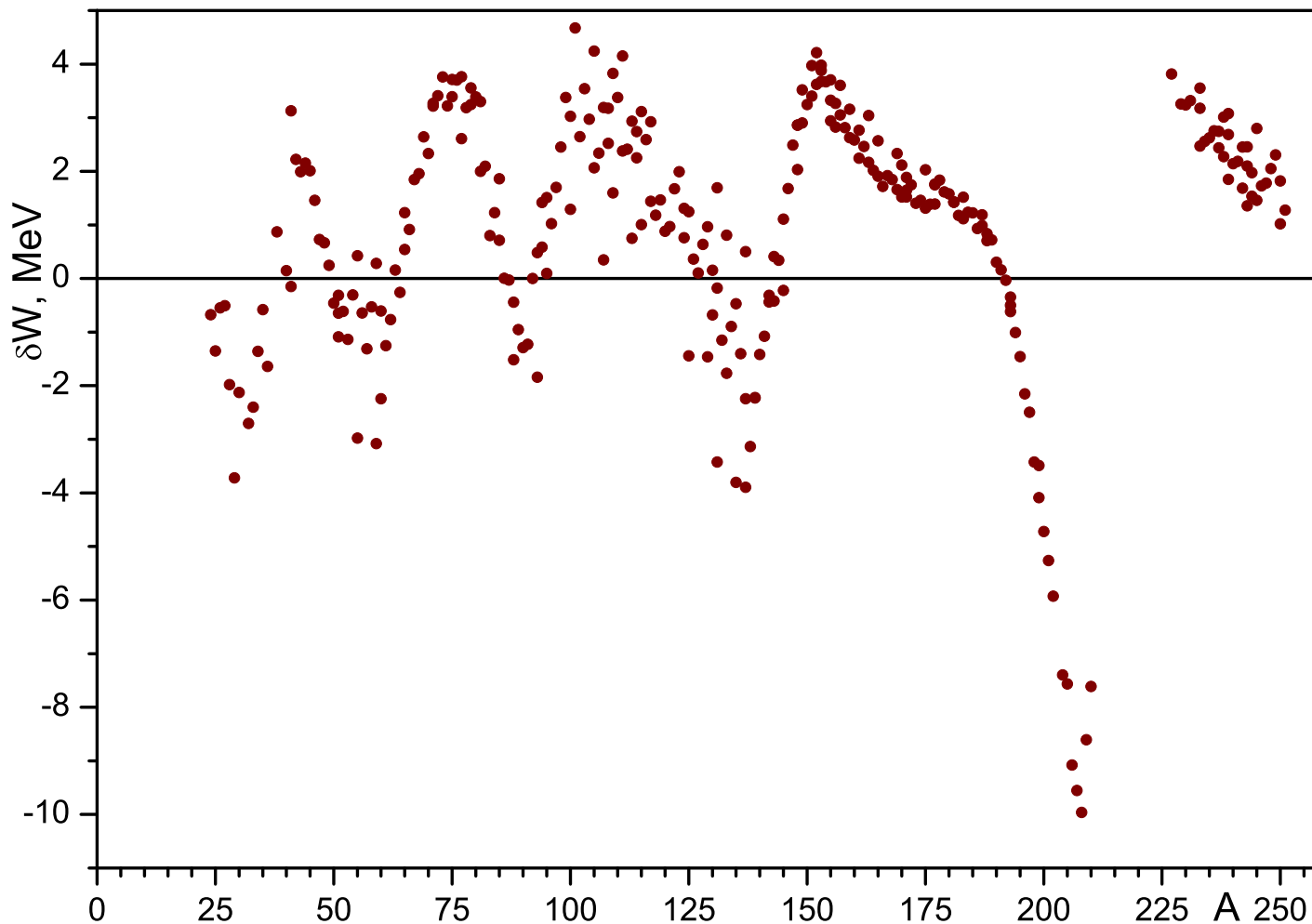
Тому розумно вводити ефективну енергію збудження, яка враховує вплив щілини спарювання.

$$E_{\text{eff}}^* = E^* - \begin{cases} \delta_p + \delta_n, & \text{for } -i, \\ \delta_n, & \text{for } -i, \\ \delta_p, & \text{for } -i, \\ 0, & \text{for } -i. \end{cases}$$



Залежність оболонкової поправки від енергії збудження

⇒ Крім того, є сильні неоднорідності у спектрі рівнів, які індуковані оболонковою структурою. Кількість рівнів у магічних ядрах поблизу енергії Ферми менше, ніж у немагічних. Негативні значення оболонкової поправки роблять ядра більш жорсткими, тоді як позитивні значення оболонкової поправки роблять ядра більш м'якими. Тому виникає вплив на параметр густини енергетичних рівнів a , які пов'язано з оболонковою поправкою.



⇒ Значення оболонкових поправок залежить від енергії збудження. Ефект оболонки розвивається з зростом температури. Отже, параметр a є монотонно залежить від A при великій енергії збудження, де зникає нерівномірність розподілу енергетичних рівнів, яка пов'язана з оболонковою структурою.

$$a(A, Z, E^*) \equiv \frac{E^*}{T^2} = a_{inf}(A, Z) \left[1 + \frac{\delta W(A, Z)}{E^*} (1 - \exp(-\gamma E^*)) \right]$$

При високих енергіях збудження E^* :

$$a = a_{inf}(A, Z),$$

.

При $E^* = 0$:

$$a = a_{inf}(A, Z) [1 + \gamma \delta W(A, Z)],$$

де

$$a_{inf}(A, Z) = \frac{A}{a_0} \approx 0.0722396A + 0.195267A^{2/3} \approx \frac{A}{13} \div \frac{A}{8}$$

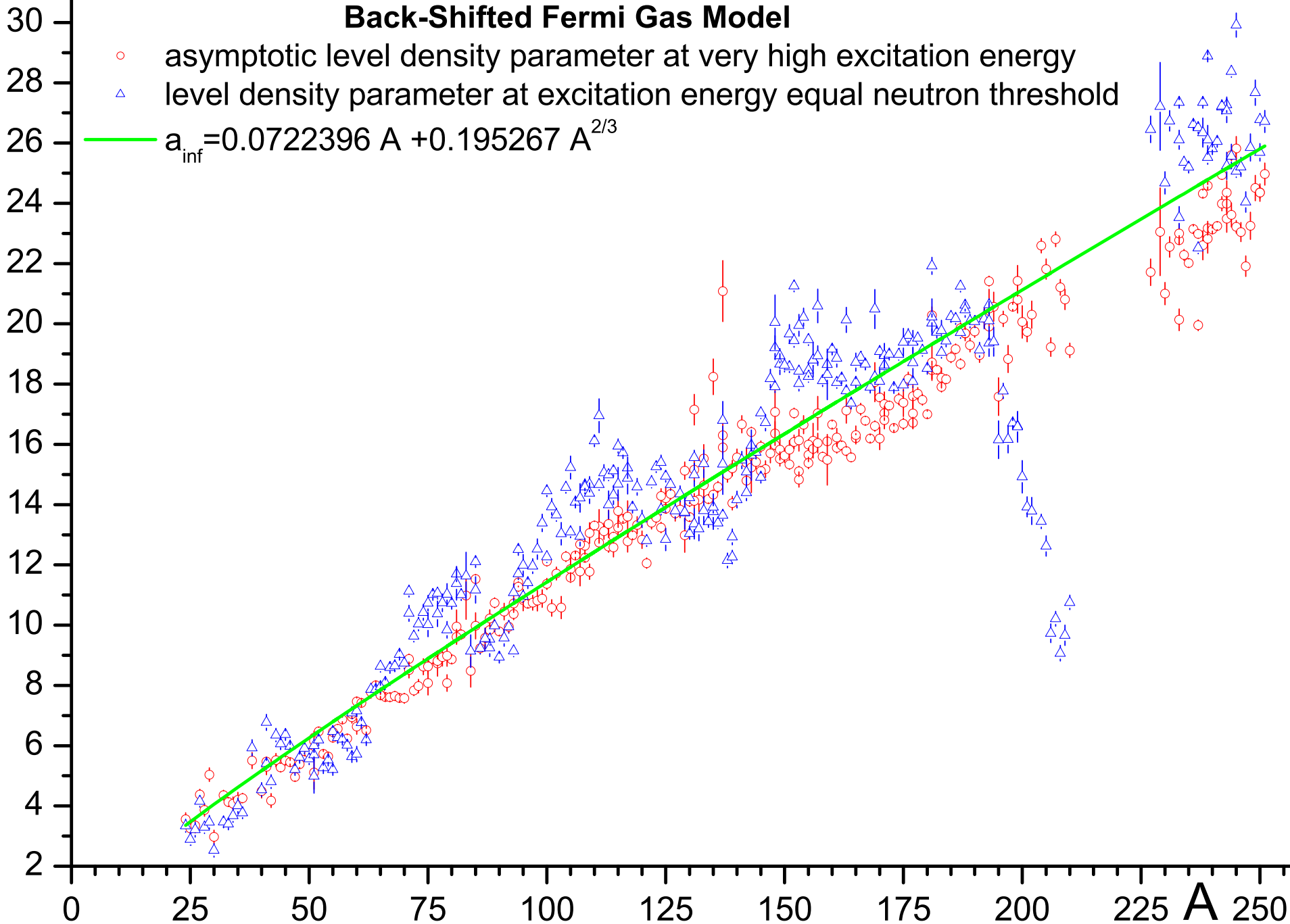
є асимптотичне значення параметра густини рівнів та

$\delta W(A, Z)$ є значення оболонковій поправки, $\gamma = 0.410289$.

Back-Shifted Fermi Gas Model

- asymptotic level density parameter at very high excitation energy
- △ level density parameter at excitation energy equal neutron threshold
- $a_{\text{inf}} = 0.0722396 A + 0.195267 A^{2/3}$

$a, 1/\text{MeV}$



Ротаційне та вібраційне підсилення густини рівнів

Загальний Гамільтоніан та хвильові функції в адіабатичному наближенні можна записати як

$$H = H_{\text{in}} + H_{\text{vib}} + H_{\text{rot}},$$

$$\Psi = \phi_{\text{in}} \otimes \phi_{\text{vib}} \otimes \phi_{\text{rot}}.$$

Відповідна статистична сума є

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= Sp[\exp(-\beta H)] = Sp[\exp(-\beta(H_{\text{in}} + H_{\text{vib}} + H_{\text{rot}}))] \\ &= Sp[\exp(-\beta H_{\text{in}})] Sp[\exp(-\beta H_{\text{vib}})] Sp[\exp(-\beta H_{\text{rot}})] \\ &= Z_{\text{in}}(\beta) Z_{\text{vib}}(\beta) Z_{\text{rot}}(\beta). \end{aligned}$$

де

$$Z_{\text{in}}(\beta) = \sum_i \langle i | e^{-\beta E_i} | i \rangle$$

є статистична сума фермі-газа,

$$Z_{\text{vib}}(\beta) = \sum_{\nu} \langle i | e^{-\beta \hbar \omega (\nu + 1/2)} | i \rangle$$

є статистична сума, яка пов'язана з вібраційним рухом,

$$Z_{\text{rot}}(\beta) = \sum_J (2J + 1) \langle i | e^{-\beta \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathcal{I}_{\perp}}} | i \rangle$$

є статистична сума, яка пов'язана з обертальним рухом.

За допомогою методу сідлової точки ми отримуємо

$$\rho(E^*) = K_{\text{vib}}(E^*) K_{\text{rot}}(E^*) \rho_{\text{in}}(E^*),$$

тут $K_{\text{vib}}(E^*)$ and $K_{\text{rot}}(E^*)$ є відповідні підсилюючі коефіцієнти. Де

$$K_{\text{rot}}(E^*) = \begin{cases} 1 & \text{for spherical nuclei,} \\ \mathcal{J}_{\perp} T & \text{for deformed nuclei,} \end{cases}$$

$$K_{\text{vib}}(E^*) \approx \prod_{\ell=2,3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega_{\ell}\nu/T) = \prod_{\ell=2,3} \frac{1}{(1 - \exp(-\hbar\omega_{\ell}/T))^{2\ell+1}}.$$

Де $\omega_{\ell} = \sqrt{C_{\ell}/B_{\ell}}$ є частота поверхневих коливань мультипольності ℓ .

Адіабатична оцінка K_{rot} збільшує густину рівнів у 50÷100 разів. Відметимо, що в випадку вібраційного підсилення $K_{\text{vib}} \approx 2\div 20$ ($K_{\text{vib}}^{\ell=2} \approx 4\div 6$, $K_{\text{vib}}^{\ell=3} \approx 8\div 10$ at $E^* = B_{\text{neutron}}$).

Існує багато інших наближень до густини енергетичних рівнів !!!

Наближення постійній температурі для густини енергетичних рівнів

Воно дуже корисно для різних оцінок

$$\rho(A, E^*) \propto \exp(E^*).$$

Поліпшена узагальнена надтекуча модель (EGSM)

Враховується плавна залежність енергетичного щільності від енергії збудження, а також враховуються багато інших важливих інгредієнтів ядерної структури.

EGSM включає більш точне врахування високих кутових моментів, які важливі для реакцій, викликаних важкими іонами.

$$E_{\text{true excitation energy related to temp.}}^* = E^* - E_{\text{rot}} = E^* - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2\mathcal{J}}.$$

Енергія обертання в EGSM віднімається від енергії внутрішнього збудження. Це протиставляється розгляду в моделях, які обговорювались раніше і в яких залежність від спіна трактується як окремий фактор, що характеризується параметром відключення спину.

3. Випарування нейтронів з ядер

$$\begin{aligned}\Gamma_n(E^*, L, A, Z) &= \int_0^{E^* - E_{\text{sep}}} d\varepsilon \gamma(\varepsilon, E^*, L, A, Z) \\ &= \frac{4m_n R_A}{\hbar^2} \int_0^{E^* - E_{\text{sep}}} d\varepsilon \sum_{j_n} \frac{\varepsilon \rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, |\mathbf{L} - \mathbf{j}_n|, A - 1, Z, \beta_{\text{gs}})}{2\pi \rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})} T_n(E^*, \varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z)\end{aligned}$$

є повна ширина випромінювання нейтронів із компаунд-ядра з A нуклонами, Z протонами, обертальний моментом L та енергією збудження E^* .

Тут ε , ℓ_n , j_n є енергія, обертальний кутовий момент і повний кутовий момент випаруваного нейтрона, m_n - маса нейтрона, R_A - радіус ядра, E_{sep} є енергія відокремлення нейтрона від початкового компаунд-ядра, $\rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})$ є густина рівнів початкового компаунд-ядра, $\rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, |\mathbf{L} - \mathbf{j}_n|, A - 1, Z, \beta_{\text{gs}})$ густина рівнів кінцевого компаунд-ядра, яке сформовано після нейтронної емісії, $T_n(E^*, \varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z)$ є коефіцієнт передачі.

Коефіцієнт передачі може бути оцінений у рамках півкласичного підходу WKБ як

$$T_n(E^*, \varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z) = 1 / \{1 + \exp[\mathcal{A}(\varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z)]\},$$

де

$$\mathcal{A}(\varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z) = \frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2M(V_{\text{nucl}}(r, R_0, d) + V_{\text{LS}}(r, R_0, d, J, L) + V_{\text{rot}}(r)) - \varepsilon} dr,$$

є дія, M є маса нейтрона, a та b є поворотними точками.

Взаємодія між нейтроном та ядром

$$V_{\text{tot}}(r) = V_{\text{nucl}}(r, R_0, d) + V_{\text{LS}}(r, R_0, d, J, L) + V_{\text{rot}}(r)$$

де ядерна частина взаємодії параметризовано потенціалом Вудса-Саксону

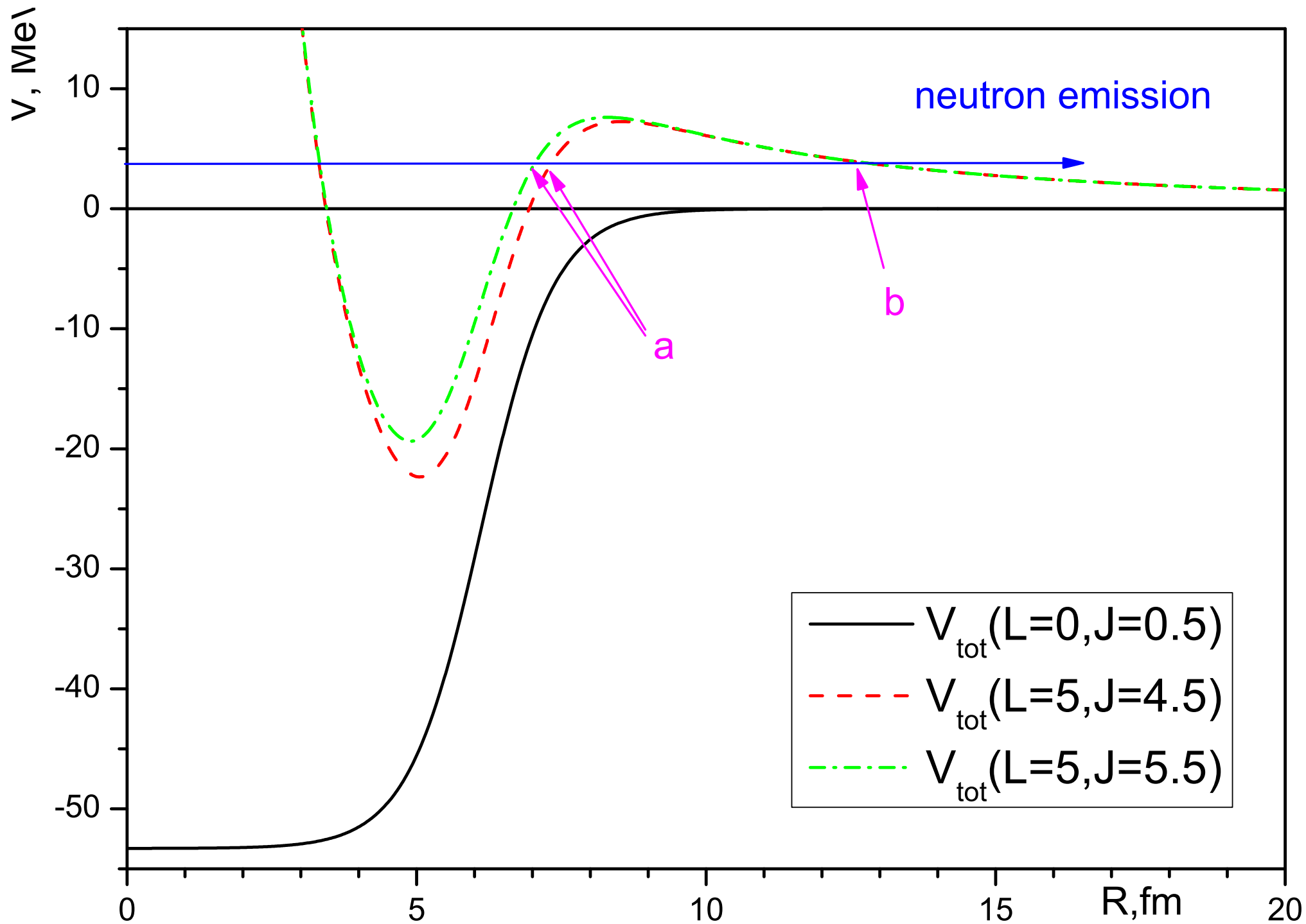
$$V(r, R_0, d) = \frac{V_0}{1 + \exp((r - R_0)/d)},$$

спін-орбітальна частина взаємодії, яка пов'язана з похідної потенціалу Вудса-Саксону

$$\begin{aligned} V_{\text{LS}}(r, R_0, d, J, L) &= \frac{\kappa}{r} \frac{d}{dr} \frac{V_0}{1 + \exp((r - R_0)/d)} (\vec{L}\vec{S}) \\ &= \frac{\kappa}{2r} \frac{d}{dr} \frac{V_0}{1 + \exp((r - R_0)/d)} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \\ &= \frac{\kappa}{2r} \frac{d}{dr} \frac{V_0}{1 + \exp((r - R_0)/d)} \begin{cases} L, & \text{if } J = L + 1/2, \\ -(L + 1), & \text{if } J = L - 1/2, \end{cases} \end{aligned}$$

та обертанний внесок дорівнює

$$V_{\text{rot}}(r) = \frac{\hbar^2 L(L + 1)}{2M_N r^2}.$$



Спектр випаровування нейтронів, тобто відносна кількість нейтронів, що виділяються із складеного ядра з енергією в діапазоні від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ пропорційна

$$\gamma(\varepsilon, E^*, L, A, Z) = \frac{\varepsilon \rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, |\mathbf{L} - \mathbf{j}_n|, A - 1, Z, \beta_{\text{gs}})}{2\pi \rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})} T_n(E^*, \varepsilon, \ell_n, j_n, A, Z).$$

Для s -хвильових нейтронів маємо

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon, E^*, L = 0, A, Z) &= \frac{\varepsilon \rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, A - 1, Z, \beta_{\text{gs}})}{2\pi \rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})} \\ &\propto \frac{(E^*)^{5/4}}{(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon)^{5/4}} \varepsilon \exp(2\sqrt{a(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon)} - 2\sqrt{aE^*}). \end{aligned}$$

Тут ми використовували Фермі-газовий вираз для густини рівнів

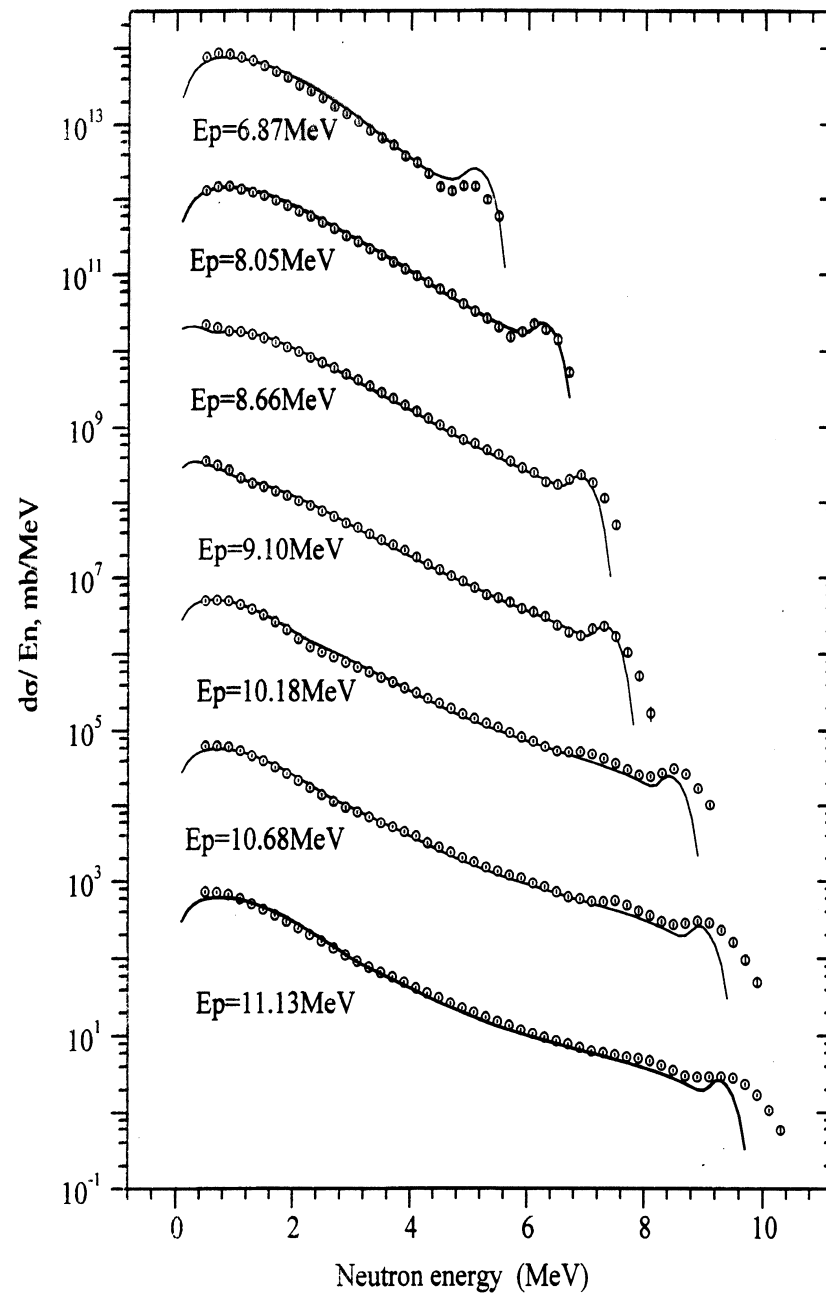
$$\rho(A, E^*) = \frac{\exp(2\sqrt{aE^*})}{12\sqrt{2}a^{1/4}(E^*)^{5/4}}.$$

Відметимо, що для $E^* - E_{\text{sep}} \gg \varepsilon$ and $E^* \gg E_{\text{sep}}$

$$\gamma(\varepsilon, E^*, L = 0, A, Z) \propto \varepsilon \exp(-\sqrt{(a/E^*)}\varepsilon).$$

є розроділ Максвелу.

Angle-integrated neutron emission spectra
from $^{118}\text{Sn}(p,n)^{118}\text{Sb}$ reaction.



4. Випарування заряджених частинок (Z)

$$\begin{aligned}\Gamma_Z(E^*, L, A, Z) &= \int_0^{E^* - E_{\text{sep}}} d\varepsilon \gamma(\varepsilon, E^*, L, A - A_Z, Z - Z) \\ &= \int_0^{E^* - E_{\text{sep}}} d\varepsilon \sum_{j_Z} \frac{\rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, |\mathbf{L} - \mathbf{j}_Z|, A - A_Z, Z - Z, \beta_{\text{gs}})}{2\pi\rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})} T_n(E^*, \varepsilon, \ell_Z, j_Z, A - A_Z, A_Z, Z - Z, Z)\end{aligned}$$

є повна ширина випромінювання нейтронів з компаунд-ядра з A нуклонами, Z протонами, кутовим моментом L та енергією збудження E^* .

Тут ε , ℓ_Z , j_Z - це енергія, орбітальний імпульс і загальний кутовий момент, що випромінюється, E_{sep} - енергія відокремлення зарядженої частинки від початкового сполучного ядра, $\rho(E^*, L, A, Z, \beta_{\text{gs}})$ - густина рівнів початкового сполучного ядра, $\rho(E^* - E_{\text{sep}} - \varepsilon, |\mathbf{L} - \mathbf{j}_Z|, A - A_Z, Z - Z, \beta_{\text{gs}})$ - густина рівнів кінцевого ядра сполуки (після викиду частинки Z), $T_n(E^*, \varepsilon, \ell_Z, j_Z, A - A_Z, A_Z, Z - Z, Z)$ - коефіцієнт передачі.

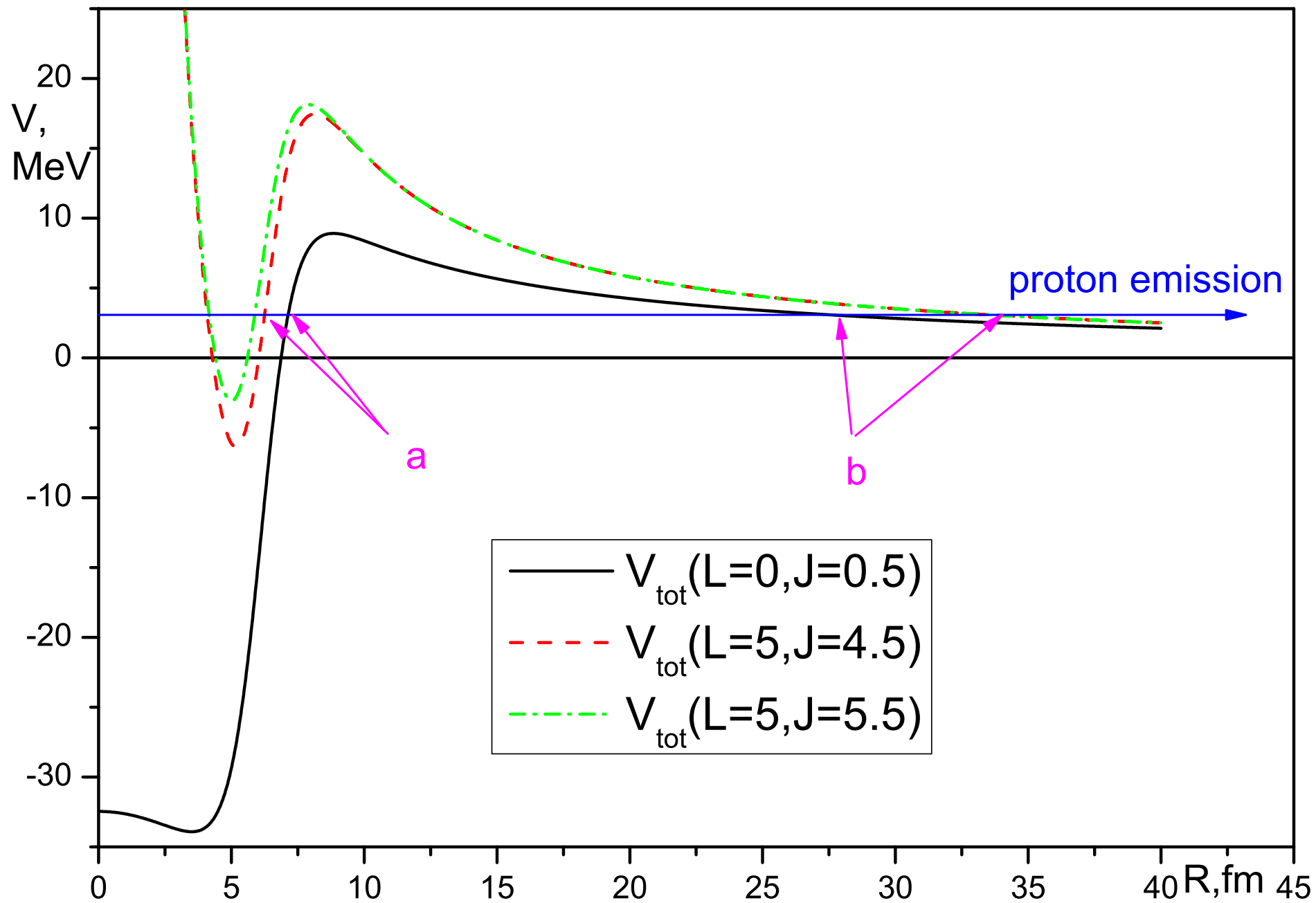
Коефіцієнт передачі може бути оцінений у рамках півкласичного підходу WKБ як

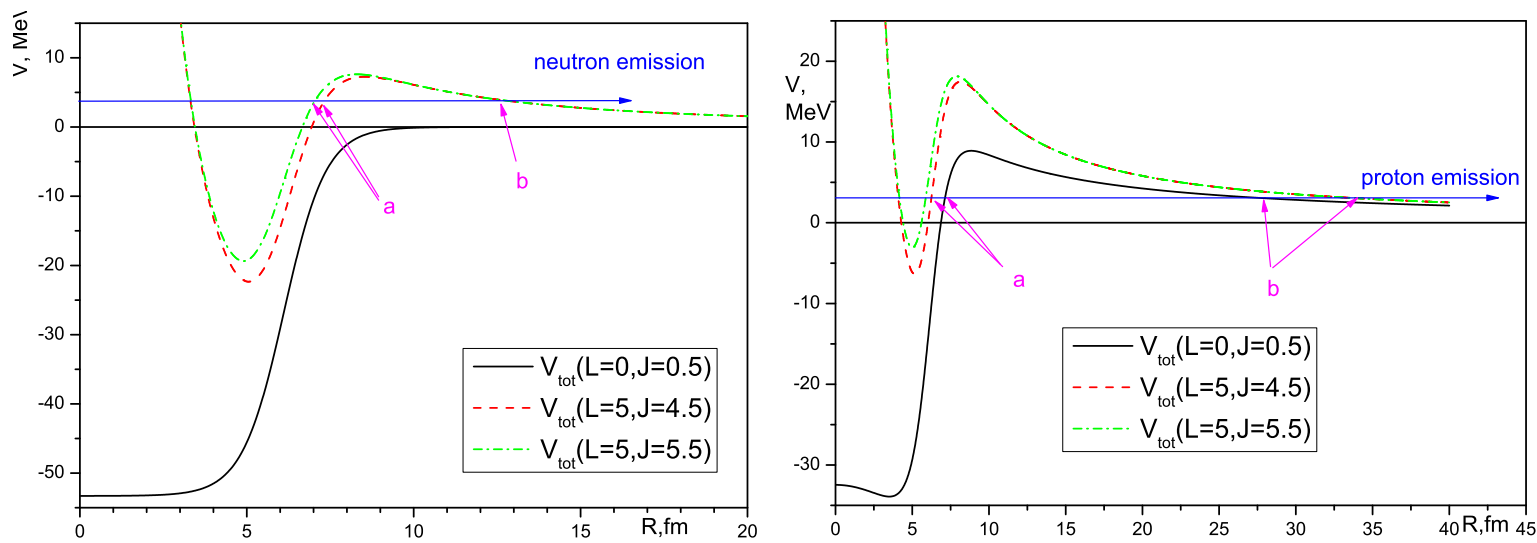
$$T_n(E^*, \varepsilon, \ell_Z, j_Z, A - A_Z, A_Z, Z - Z, Z) = 1/\{1 + \exp[\mathcal{A}(\varepsilon, \ell_Z, j_Z, A - A_Z, A_Z, Z - Z, Z)]\},$$

де

$$\mathcal{A}(\varepsilon, \ell_Z, j_Z, A - A_Z, A_Z, Z - Z, Z) = \frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2M \frac{(A - A_Z)A_Z}{A} (V_{\text{nucl}}(r) + V_{\text{LS}}(r, j_Z, L) + V_{\text{Coulomb}}(r) + V_{\text{rot}}(r)) - \varepsilon}$$

є дія, a та b є поворотними точками.





Коефіцієнт пропускання нейтрона при $\ell_n = 0 \in T = 1$ (немає бар'єру).

Коефіцієнт пропускання нейтрона при $\ell_n \neq 0 \in T < 1$, оскільки існує бар'єр, індукований відцентровим потенціалом.

Коефіцієнт пропускання нейтрона набагато вищий, ніж для заряджених частинок для ядер по долині стійкості завдяки кулонівській взаємодії $\frac{(Z-Z)Ze^2}{R}$.

Коефіцієнт пропускання нейтрона близький до коефіцієнта пропускання протона в ядрах з дефіцитом нейронів.

Коефіцієнт пропускання для більш зарядженої частинки менший, ніж для менш заряджених частинок, що випромінюються та утворюють одне й те саме компаунд-ядро, оскільки кулонівська взаємодія, наприклад, $\frac{(Z-Z)Ze^2}{R} < \frac{[Z-(Z+1)](Z+1)e^2}{R}$ за $Z > 2 * Z$.

Коефіцієнт пропускання зарядженої частинки від більш зарядженої компаунд-ядра менший, ніж для менш зарядженого компаунд-ядра, тому що кулонівська взаємодія, наприклад, $\frac{(Z-Z)Ze^2}{R} < \frac{[(Z+z)-(calZ)](Z+1)e^2}{R}$.

5. γ -розпад

$$\Gamma_{\gamma}(E^*, j_i, A, Z) = \int d\varepsilon \sum_{j_f=|j_i-1|}^{j_f=|j_i+1|} \frac{\rho(E^* - \varepsilon, j_f, A, Z, \beta_{gs})}{\rho(E^*, j_i, A, Z, \beta_{gs})} \frac{3.31 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} (A - Z) Z \varepsilon^4 \Gamma}{A[(E_0^2 - \varepsilon^2)^2 + (\varepsilon \Gamma)^2]}$$

ε – ширина емісії γ . $E_0 \approx 80 \cdot A^{1/3}$ MeV і $\gamma \approx 5$ MeV ε , відповідно, енергія і ширина гігантського дипольного резонансу.

Corsi, et al., APPB42,619, (2011): Analysis has shown that the hindrance of GDR decay in the selfconjugate nucleus ^{80}Zr makes possible the evaluation of the degree of isospin mixing present in a highly excited compound nucleus

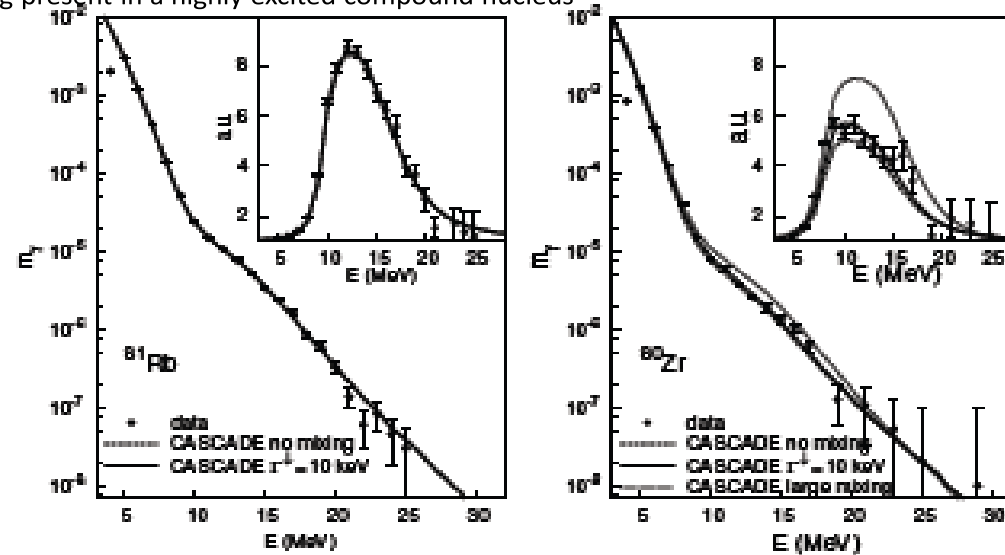


Fig. 2. The high energy γ -ray spectra measured in the reaction $^{37}\text{Cl} + ^{44}\text{Ca} \rightarrow ^{81}\text{Rb}$ at $E^* = 83$ MeV (left panel) and in the $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca} \rightarrow ^{80}\text{Zr}$ ($E^* = 83$ MeV) reaction (right panel). In the insets, the linearised spectra are shown. The statistical model calculations (see text) are displayed with continuous line [22, 21].

6. Поділ ядра

$$\Gamma_{\text{fis}}(E^*, l, A, Z) = \int_0^{E^*} d\varepsilon \frac{\rho(\varepsilon, l, A, Z, \beta_{\text{sadl}})}{2\pi\rho(E^*, l, A, Z, \beta_{\text{gs}})} T_{\text{fis}}(E^*, \varepsilon, B_{\text{CN}}^*, l, A, Z)$$

is the fission width.

Коефіцієнт пропускання ділення $T_{\text{fis}}(E^*, \varepsilon, B(E^*), A, Z)$ ядра при енергії збудження E^* обчислюється за допомогою наближення Хілла-Уілера,

$$T_{\text{fis}}(E^*, \varepsilon, B(E^*), l, A, Z) = 1/[1 + \exp(-2\pi(\varepsilon - B(E^*)) / (\hbar\omega))].$$

Кривизна $\hbar\omega$ бар'єру поділу залежить від часу спонтанного поділу T_{sf} основного стану

$$\hbar\omega = 2\pi B / \ln(T_{\text{sf}}/T_0 - 1)$$

та $T_0 = 2\pi(\ln 2)\hbar/E_{\text{zp}}$. Тут ми беремо однакове значення енергії нульової коливаний $E_{\text{zp}} = 0.7 \text{ MeV}$.

Розщеплення збудженого ядра - це ізоентропічний процес. За методом оболонкової поправки Струтинського, бар'єр ділення B^* ядра при $l = 0$ задається як

$$B^* = [\mathcal{E}_{\text{sadl}}^{\text{macro}} + \delta\mathcal{E}_{\text{sadl}}^{\text{shell}}(E^*)] - [\mathcal{E}_{\text{gs}}^{\text{macro}} + \delta\mathcal{E}_{\text{gs}}^{\text{shell}}(E^*)],$$

де $\mathcal{E}_{\text{sadl}}$ і \mathcal{E}_{gs} - макроскопічні енергії, обчислені для ядра при деформації точки сідла та основного стану відповідно. Ми переписуємо вираз для бар'єру у формі

$$B^* \approx [\mathcal{E}_{\text{sadl}}^{\text{macro}} - \mathcal{E}_{\text{gs}}^{\text{macro}}] - \delta\mathcal{E}_{\text{gs}}^{\text{shell}}(E^*),$$

тому що енергія оболонкової поправки в точці сідла близька до нуля.

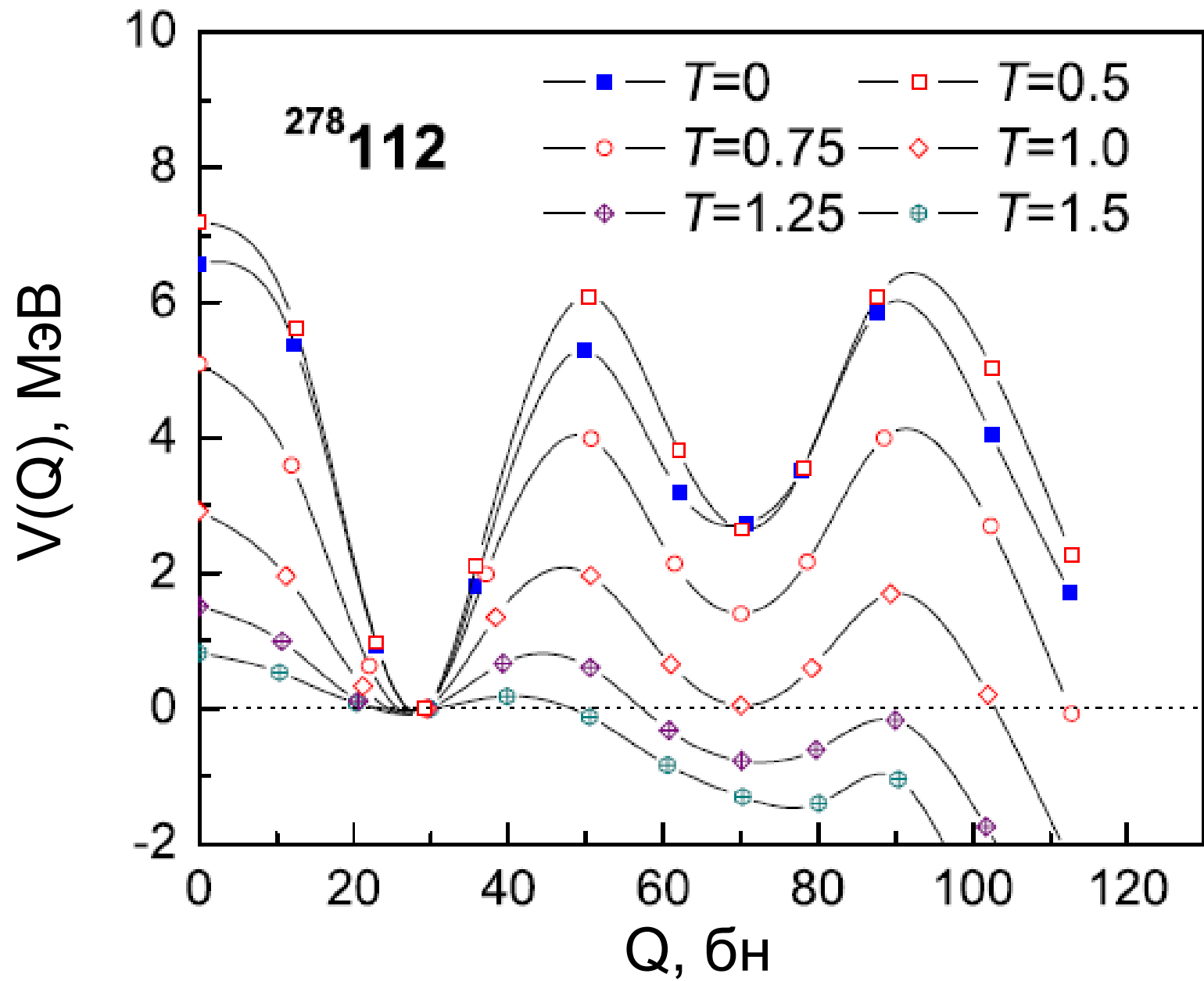
Енергія оболонкової поправки збуджених ядер менша, як у основному стані, вона зменшується зі збільшенням енергії збудження E^* . Використовуємо наступний анзац

$$\delta\mathcal{E}^{\text{shell}}(E^*) = \delta\mathcal{E}^{\text{shell}}(0)f(E^*),$$

where

$$f(E^*) = \exp(-\gamma E^*).$$

Значення параметра затухання γ недостатньо відомі. Наприклад, два різних значення $\gamma = 0,064$ MeV і $\gamma = 0,05$ MeV були скориговані для ядер у зоні свинцю. Параметр демпфування γ також залежить від числа протона та нейтрона.



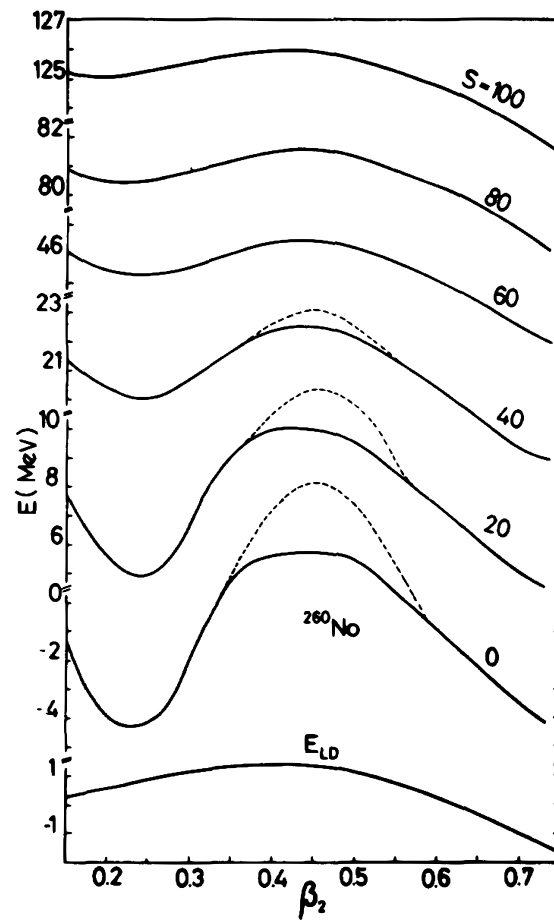
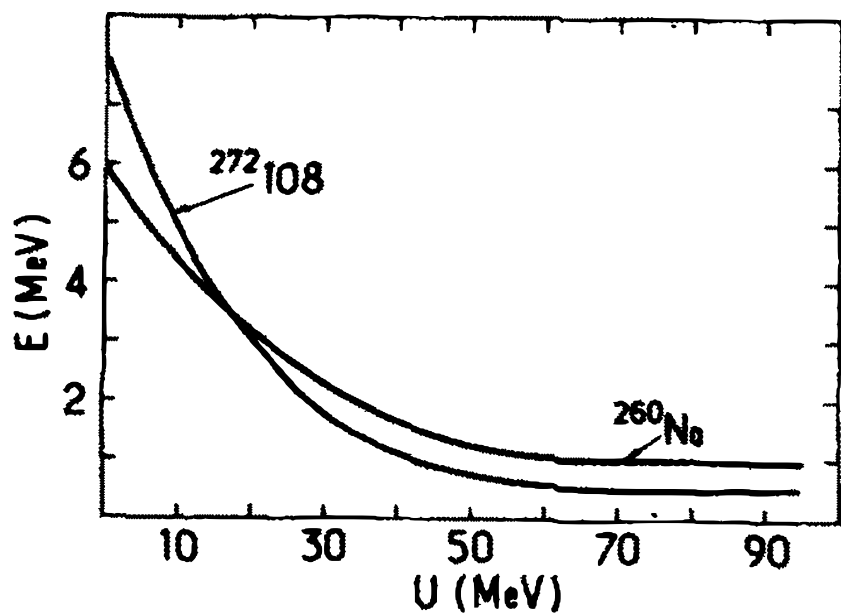


Fig. 1. The energy $E(S)$ in the nucleus ^{260}No at constant entropy, as a function of deformation. The liquid-drop component E_{LD} is indicated at the bottom. The dashed curve shows the $E(S)$ values for the axial-symmetric shape of the nucleus.

Ширина поділу в підході Бора-Уілера

$$\Gamma_f^{\text{BW}}(E^*) = \frac{1}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_f} dK \rho(E^* - B_f - K) = \frac{1}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_f} de \rho(e)$$

знайдена коли B_f незалежить від ε^* .

Ширина поділу в підході Zubov et al.

$$\Gamma_f^{\text{Z}}(E^*) = \frac{1}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_f(E^*)} dK \rho(E^* - B_f(E^*) - K) = \frac{1}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_f(E^*)} de \rho(e)$$

знайдена коли $B_f(\varepsilon^*)$ залежить від ε^* у точці $\varepsilon^* = E^*$.

Новий вираз для ширини поділу

$$\Gamma_f(E^*) = \frac{2}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{\varepsilon_{\text{max}}^*} d\varepsilon^* \frac{\rho(\varepsilon^*)}{N_{\text{tot}}} N_{\text{saddle}}(\varepsilon^*).$$

Співвідношення $\rho(\varepsilon^*)/N_{\text{tot}}$ під інтегралом - це ймовірність знайти компаунд-ядро з внутрішньою енергією теплового збудження ε^* в сідловій точці ,

$$N_{\text{tot}} = \int_0^{\varepsilon_{\text{max}}^*} d\varepsilon^* \rho(\varepsilon^*)$$

ε загальна кількість станів, доступних для поділу, у випадку енергетично залежного ділення бар'єру, і $\varepsilon_{\text{max}}^*$ - максимальне значення внутрішньої енергії теплового збудження компаунд-ядра в точці сідла, яке визначається як рішення рівняння

$$\varepsilon_{\text{max}}^* + B_f(\varepsilon_{\text{max}}^*) = E^*.$$

Це рівняння пов'язане із законом збереження енергії, тобто сума теплової ε_{\max}^* та потенційної $B_f(\varepsilon_{\max}^*)$ енергій дорівнює повної енергії збудження E^* .

Бар'єр ділення ядра з внутрішнім енергією теплового збудження з інтервалу $[\varepsilon^*, \varepsilon^* + d\varepsilon^*] \in B_f(\varepsilon^*)$. Кількість рівнів у стані переходу до поділу (у сідловій точці) з енергіями $e \geq \varepsilon^* + B_f(\varepsilon^*)$ які доступні до поділу є

$$N_{\text{saddle}}(\varepsilon^*) = \int_0^{E^* - B_f(\varepsilon^*) - \varepsilon^*} dK \rho(E^* - B_f(\varepsilon^*) - K) = \int_{\varepsilon^*}^{E^* - B_f(\varepsilon^*)} d\rho(e).$$

Відметімо, що $\lim_{E^* \rightarrow B_f} \Gamma_f(E^*) = \Gamma_f^{\text{BW}}(E^*)$ у випадку незалежного від енергій збудження бар'єру поділу

$$\begin{aligned} \Gamma_f(E^*)|_{B_f(\varepsilon^*)=B_f} &= \frac{2}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_f} d\varepsilon^* \frac{\rho(\varepsilon^*)}{N_{\text{tot}}} \int_{\varepsilon^*}^{E^* - B_f} d\rho(e) \\ &= \frac{2}{2\pi\rho(E^*)N_{\text{tot}}} \int_0^{E^* - B_f} d \left[\frac{-1}{2} \left(\int_{\varepsilon^*}^{E^* - B_f} d\rho(e) \right)^2 \right] = \frac{- \left(\int_{\varepsilon^*}^{E^* - B_f} d\rho(e) \right)^2 \Big|_{\varepsilon^*=0}^{\varepsilon^*=E^* - B_f}}{2\pi\rho(E^*) \int_0^{E^* - B_f} d\rho(e)} = \Gamma_f^{\text{BW}}(E^*). \end{aligned}$$

Ширина випромінювання нейтронів у підході Бора-Уілера є

$$\Gamma_n(E^*) = \frac{1}{2\pi\rho(E^*)} \int_0^{E^* - B_n} dK K \rho_d(E^* - B_n - K),$$

де $\rho_d(e)$ - густина рівнів енергії дочірнього ядра, що утворюється після випромінювання нейтронів. Підкреслимо, що енергія зв'язку нейтронів B_n не залежить від ε^* .

Ми розглянемо експоненціальне згасання внеску оболонкових поправок в бар'єр поділу з ε^*

$$B_f(\varepsilon^*) = B_{\text{ld}} + B_{\text{shell}} \exp(-\gamma_D \varepsilon^*).$$

Експоненціальне згасання оболонкових поправок є реалістичне наближення.

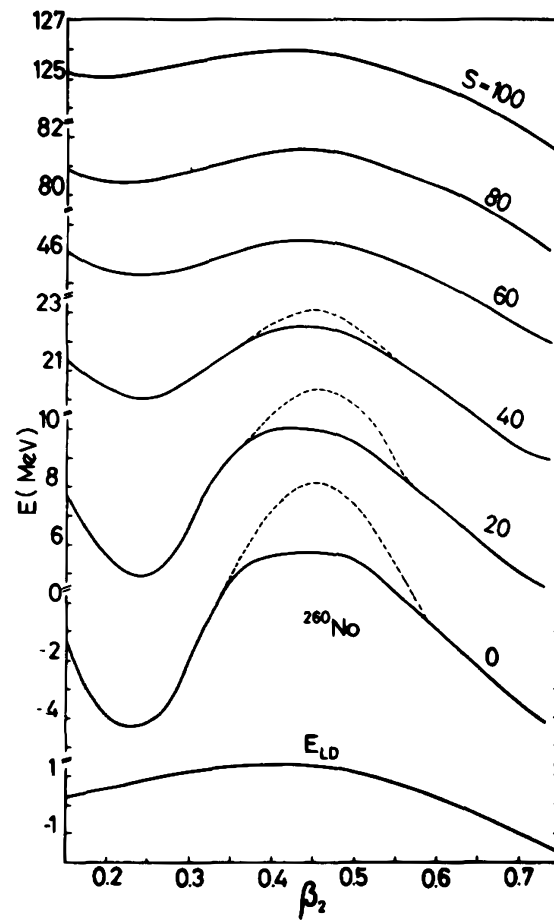
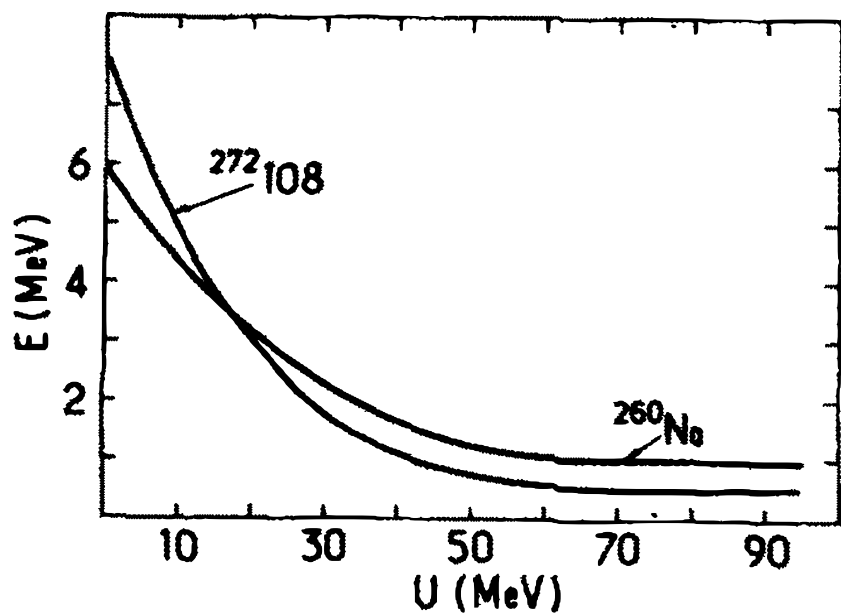
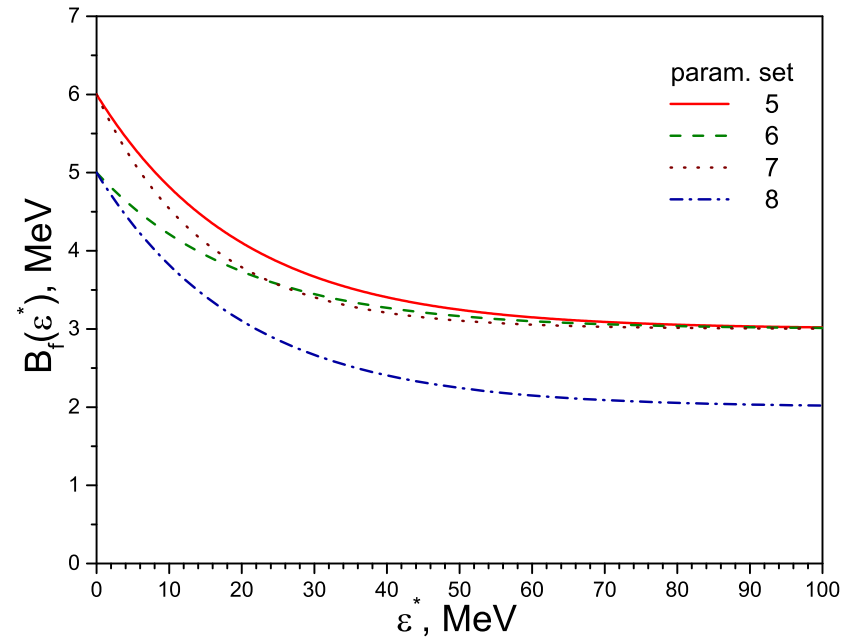
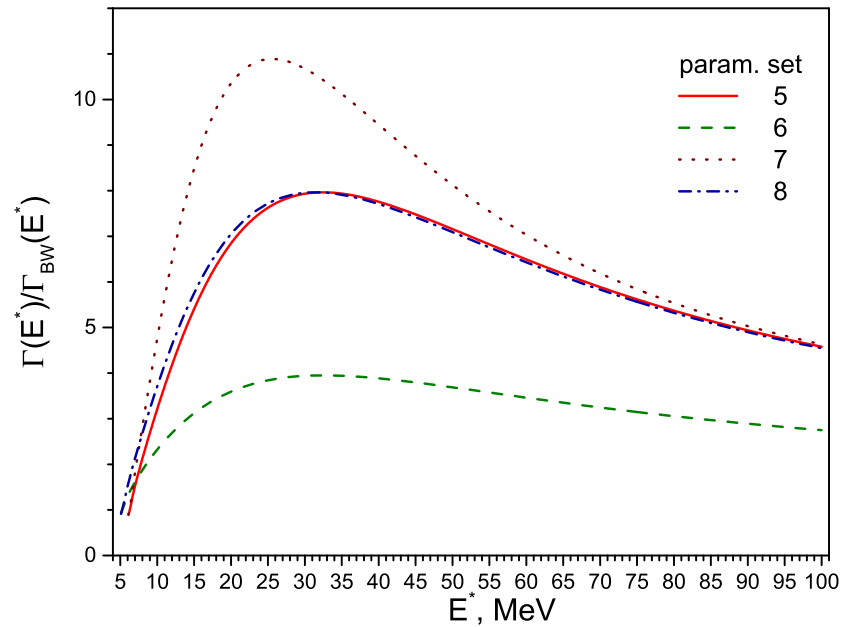
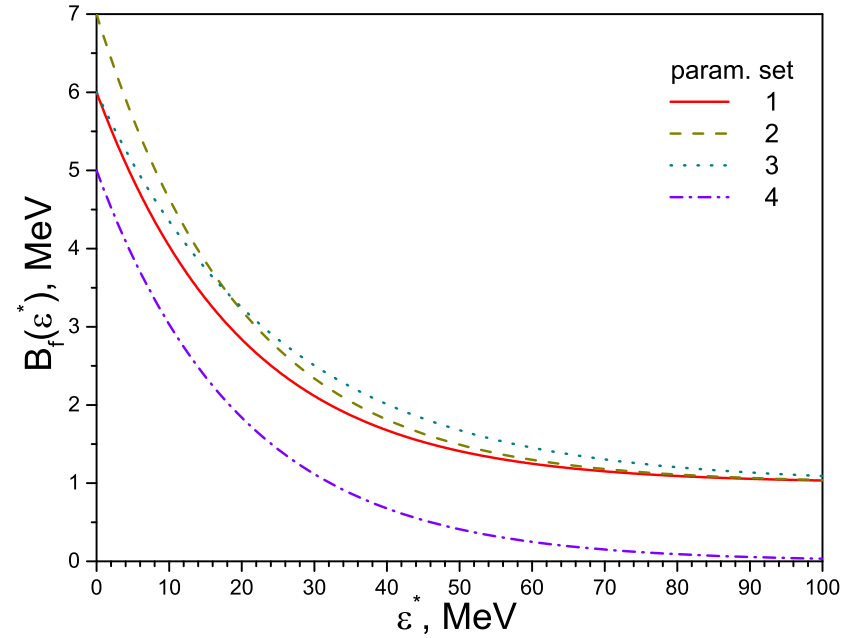
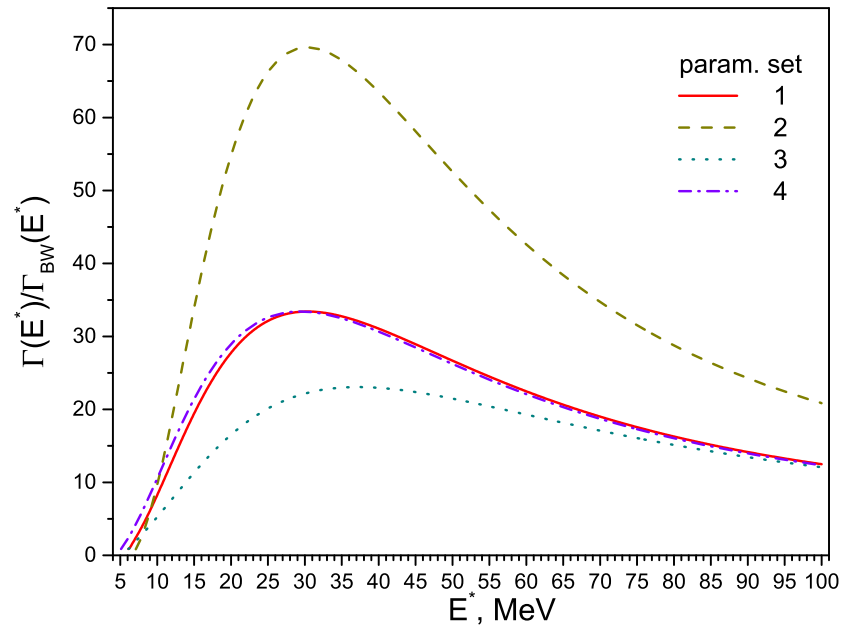


Fig. 1. The energy $E(S)$ in the nucleus ^{260}No at constant entropy, as a function of deformation. The liquid-drop component E_{LD} is indicated at the bottom. The dashed curve shows the $E(S)$ values for the axial-symmetric shape of the nucleus.

Відношення $\Gamma_f(E^*)/\Gamma_f^{BW}(E^*)$ показує вплив енергозалежного бар'єру поділу у ширину.



Залежності $\Gamma(E^*)/\Gamma_{BW}(E^*)$ і бар'єру ділення від енергії збудження для різних наборів параметрів.

Надважкі ядра (вгору). Актиніди (вниз).

Значення параметрів для різних наборів.

set	$B_{\text{ld}}, \text{MeV}$	$B_{\text{shell}}, \text{MeV}$	$\gamma_D^{-1}, \text{MeV}$
1	1	5	20
2	1	6	20
3	1	5	25
4	0	5	20
5	3	3	20
6	3	2	20
7	3	3	15
8	2	3	20

$$B_f(\varepsilon^*) = B_{\text{ld}} + B_{\text{shell}} \exp(-\gamma_D \varepsilon^*).$$

Відношення $R(E^*) = \Gamma_n(E^*)/\Gamma_f(E^*)$ є важлива характеристика розпаду важких ядер.

8. Розпад компаунд-ядра

З сильно збуджених сполучних ядер можуть виділятися різні частинки.

Тому необхідно враховувати всі режими розпаду при оцінці повної ширини

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{tot}}(E^*, l, A, Z) &= \Gamma_n(E^*, l, A, Z) + \Gamma_{2n}(E^*, l, A, Z) + \Gamma_{3n}(E^*, l, A, Z) + \dots \\ &+ \sum_{\text{all possible charge particles } Z} \Gamma_Z(E^*, l, A, Z) \\ &+ \Gamma_\gamma(E^*, l, A, Z) \\ &+ \Gamma_{\text{fis}}(E^*, l, A, Z).\end{aligned}$$

Відношення мод розпаду α та β :

$$\frac{\Gamma_\alpha(E^*, l, A, Z)}{\Gamma_\beta(E^*, l, A, Z)}$$

Наприклад, для ядер, що діляться,

$$\frac{\Gamma_n(E^*, l, A, Z)}{\Gamma_{\text{fis}}(E^*, l, A, Z)}$$

$$\frac{\Gamma_n(E^*, l, A, Z)}{\Gamma_{\text{fis}}(E^*, l, A, Z)} \propto \exp \left[\sqrt{2a_n(E^* - B_n)} - \sqrt{2a_{\text{fiss}}(E^* - B_{\text{fiss}})} \right].$$

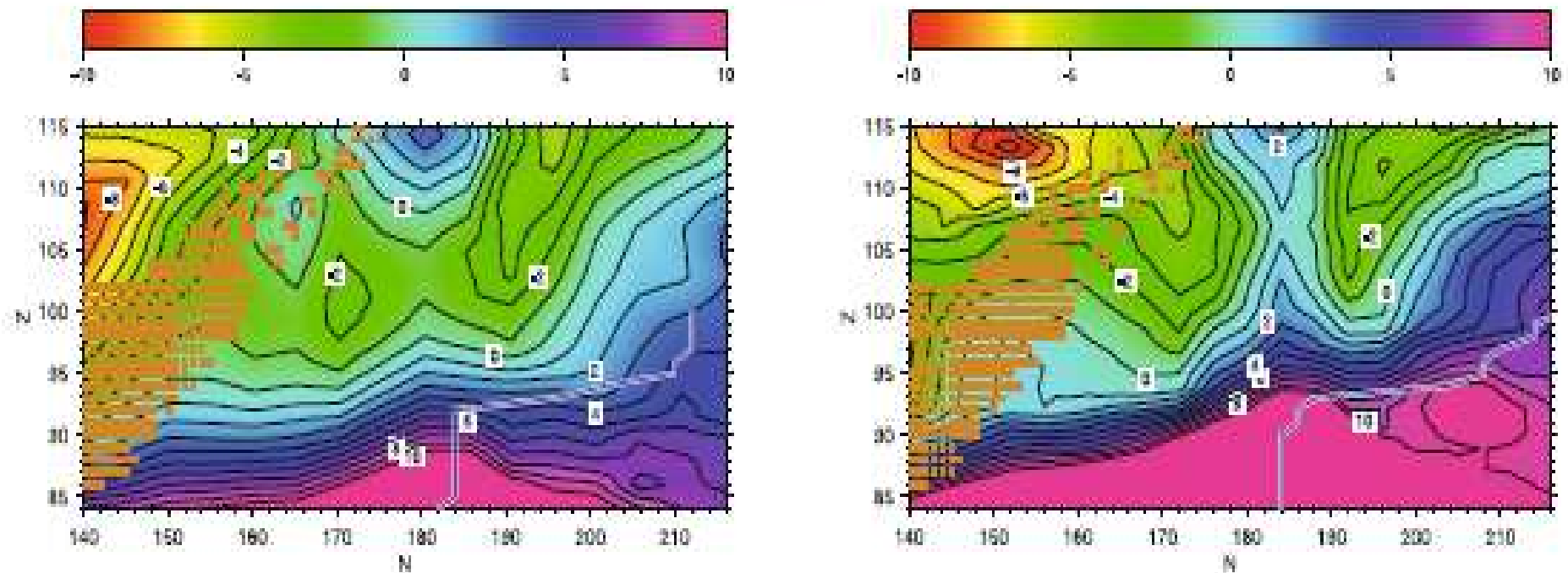
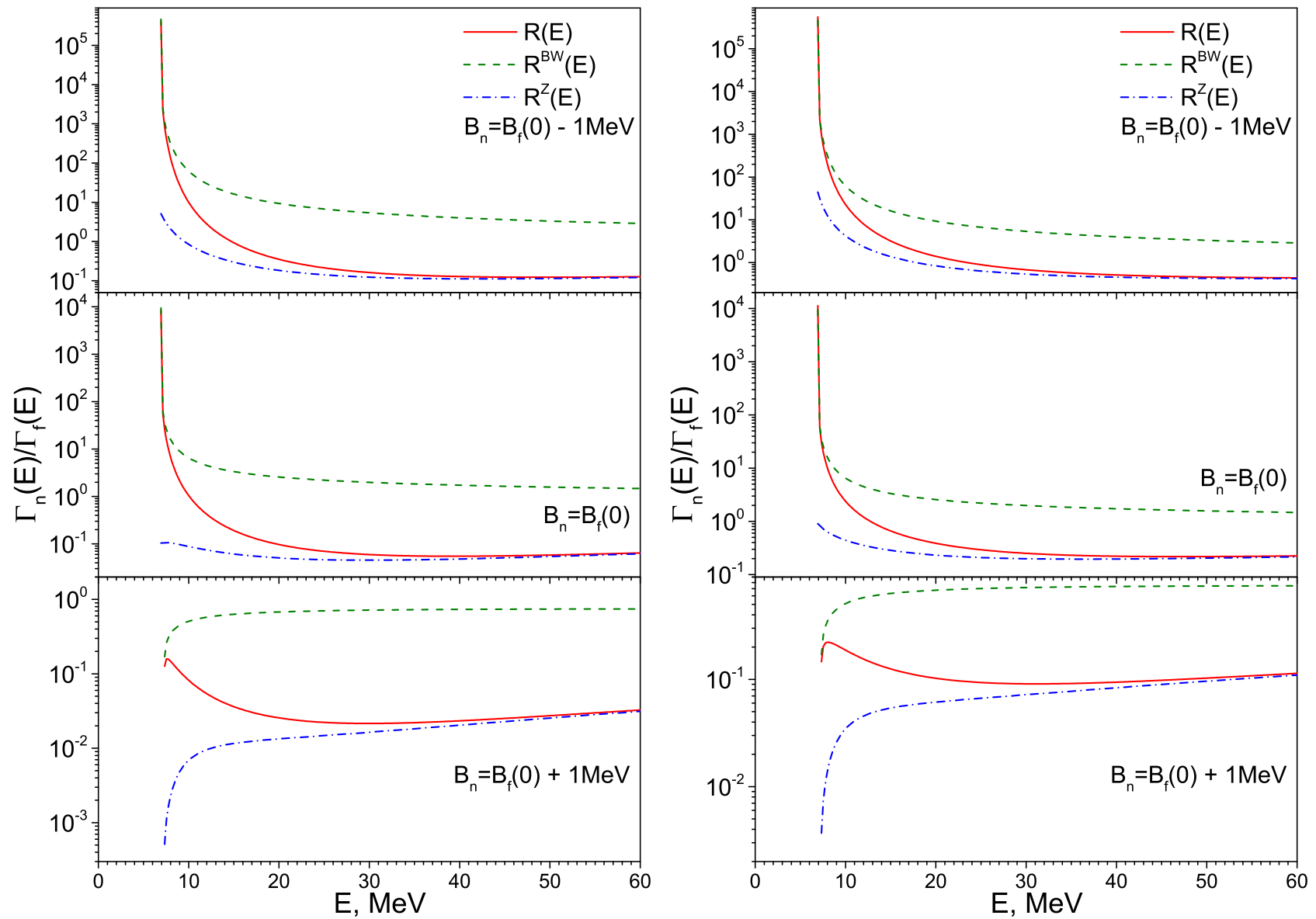


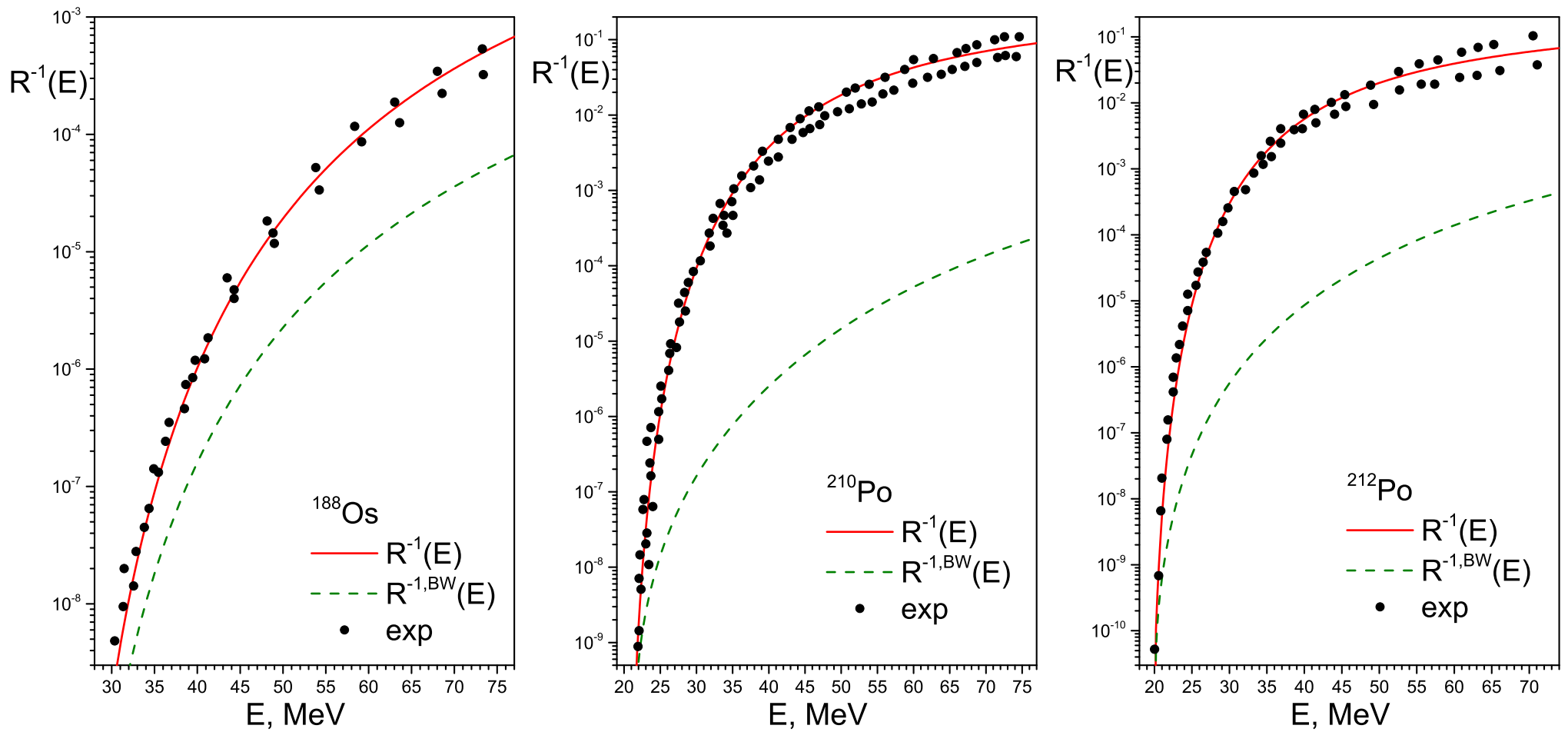
Fig. 4. Contour plot of the quantity $B_f - S_n$ (in MeV) for two choices of models for masses and fission barriers: FRDM masses plus TF fission barriers (*left*) and ETFSI-predictions (*right*). Also indicated are known superheavy nuclei (boxes) and the drip-line (line), where $B_f - S_n$ determines whether the *r*-process continues towards heavier nuclei or fission cycling to lighter fission products occurs.



Залежність відношення $R^{\text{BW}}(E) = \Gamma_n(E)/\Gamma_f^{\text{BW}}(E)$, $R^Z(E) = \Gamma_n(E)/\Gamma_f^Z(E)$, та $R(E) = \Gamma_n(E)/\Gamma_f(E)$ від повної енергії збудження E розраховано для ядра з $A = 250$ нуклонами, та різними значеннями B_n .

Ліворуч: Крапельний внесок у бар'єр поділу $B_{\text{ld}} = 1$ MeV, оболонковий внесок у бар'єр поділу $B_{\text{shell}} = 5$ MeV.

Праворуч: Крапельний внесок у бар'єр поділу $B_{\text{ld}} = 3 \text{ MeV}$, оболонковий внесок у бар'єр поділу $B_{\text{shell}} = 3 \text{ MeV}$.



Енергетична залежність відношення $R^{-1}(E)$ та $R^{-1,BW}(E)$ для ядер ^{188}Os і $^{210,212}\text{Po}$.

Значення параметрів для різних ядер $R^{-1}(E)$ for ^{188}Os and $^{210,212}\text{Po}$.

Nucl.	B_{ld}	$B_{\text{shell}}(0)$	γ_D^{-1}	$E_{\text{shell}}^{\text{emp}}$	B_{n}	$E_{\text{shell, daughter nucleus}}^{\text{emp}}$
^{188}Os	19.0	5.2	40	0.7	8.0	1.0
^{210}Po	10.8	9.6	17	-7.2	7.7	-7.0
^{212}Po	11.0	8.0	14	-4.9	6.0	-6.0

8. Висновки

Існують різні наближення до густини рівнів енергії.

Кожен підхід базується на власному наборі параметрів, який одержують при встановленні експериментальних даних.

Кожен підхід є розумним у спеціальному енергетичному діапазоні, який використовується для оцінки параметрів.

Найсучасніший і надійний підхід до рівня щільності базується на вдосконаленій узагальненій моделі надтекучий рідини.

Ширина розпаду пропорційна густині енергетичних рівнів та коефіцієнту пропускання.

Дякую за увагу!