Потенціал Вудса-Саксона, теорія оболонкових поправок
Атомні маси та деформація ядер

В.Ю. ДЕНИСОВ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Інститут ядерних досліджень, Київ, Україна

План

1. Вступ.
2. Потенціал Вудса-Саксона.
3. Теорія оболонкових поправок Струтинського.
4. Атомні маси.
5. Деформація ядер.
7. Поділ ядер.
8. Висновки.

1. Вступ

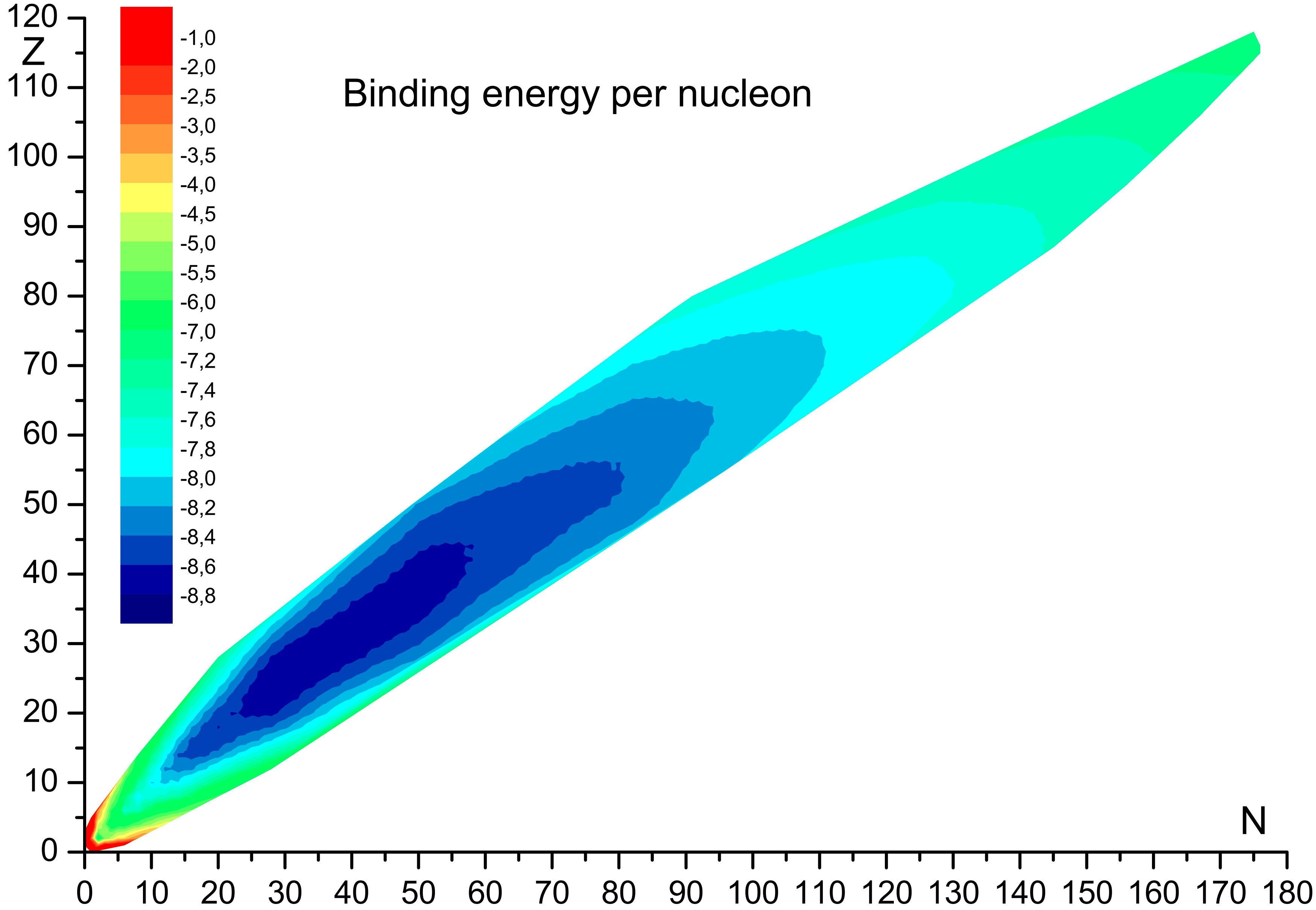
Маса ядра $M_{Nucl}c^2$ менша за сумарну масу усіх протонів та нейтронів

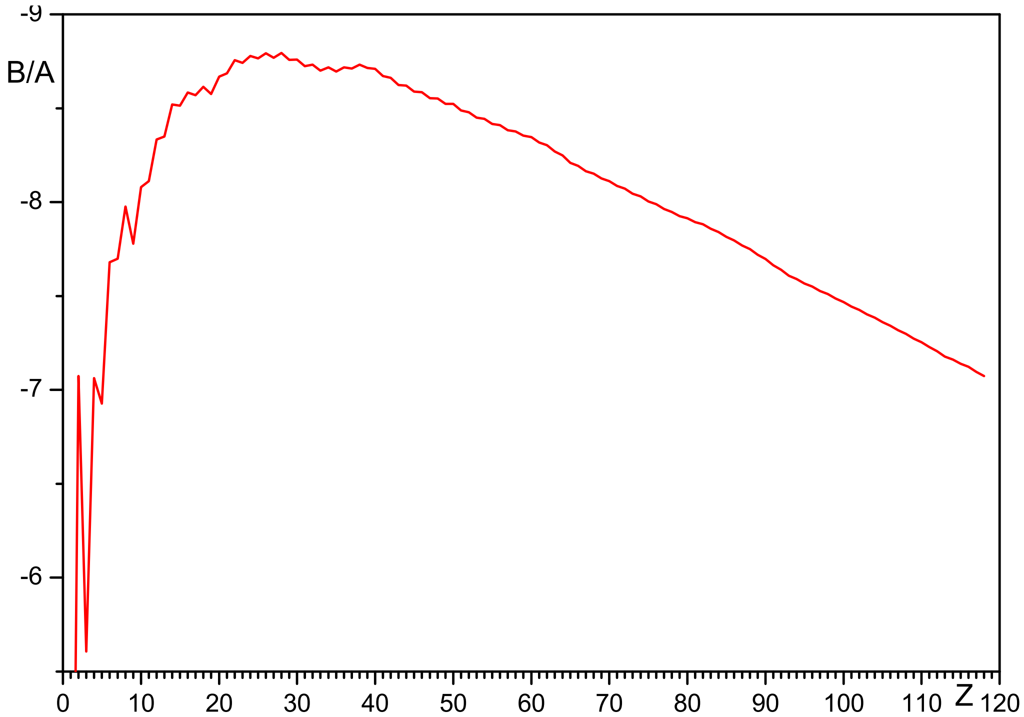
$$M_{\mathrm{Nucl}}c^2 < Z \cdot m_P c^2 + N \cdot m_N c^2.$$

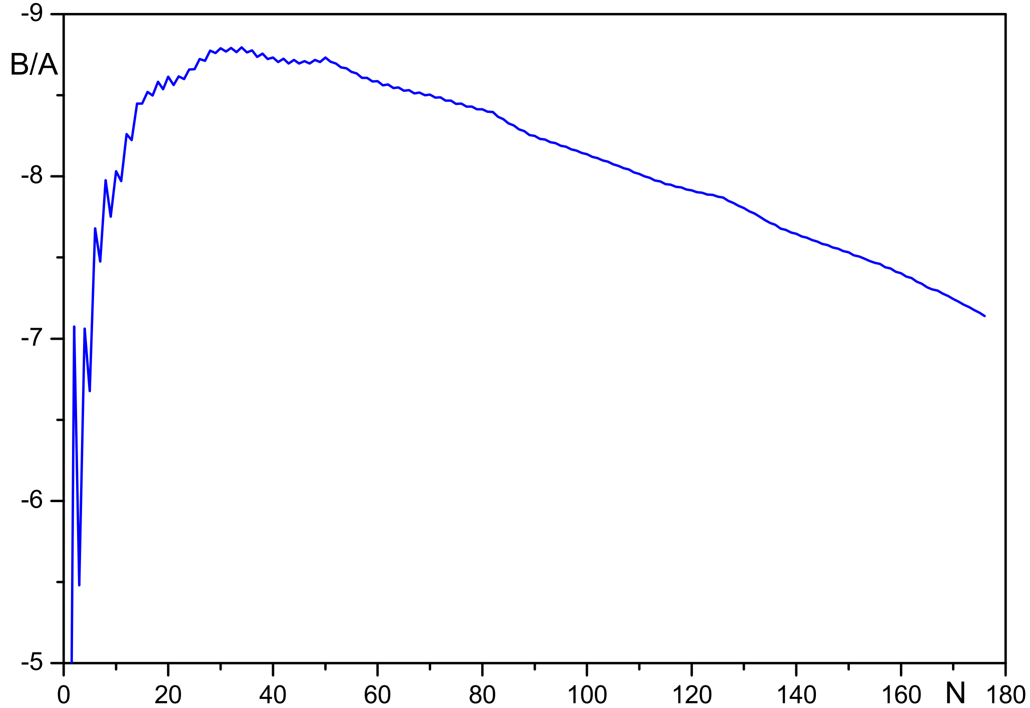
Ця різниця є енергія зв'язку

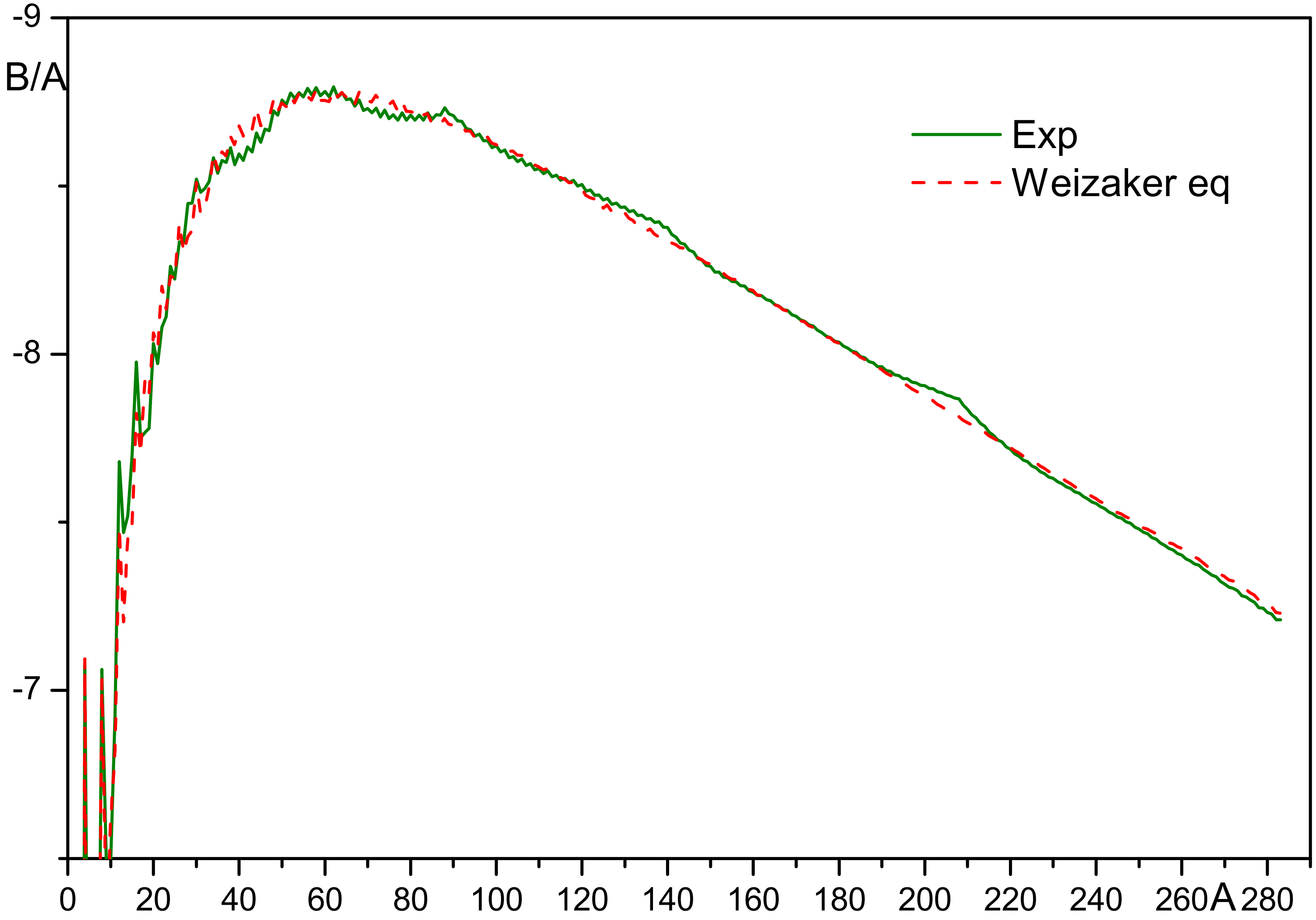
$$E(Z, N) = Z \cdot m_P c^2 + N \cdot m_N c^2 - M_{\mathrm{Nucl}}c^2.$$

Енергія зв’язку на нуклон




-9
B/A
-8
-7
-6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
Z
120

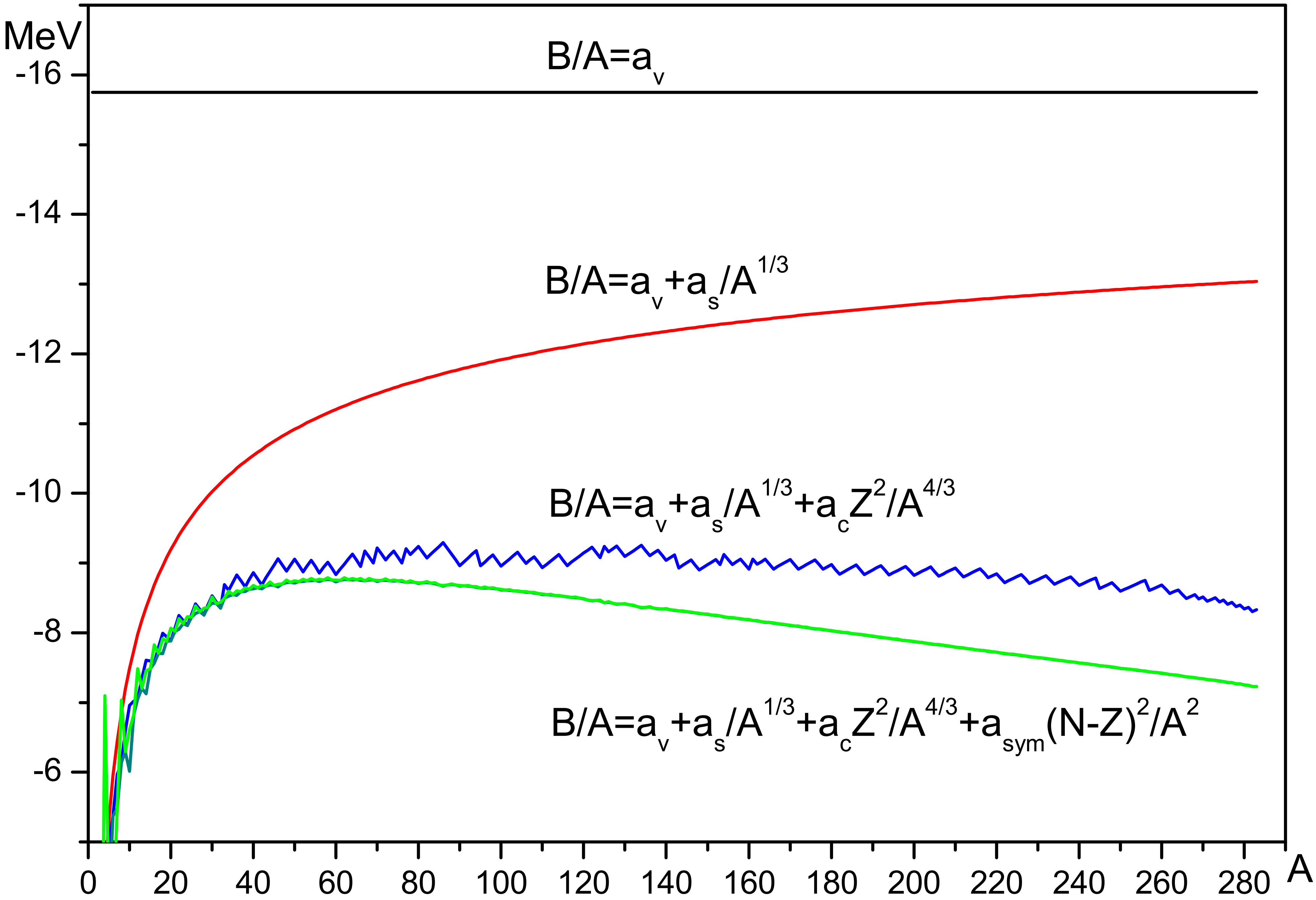

-9
B/A
-8
-7
-6
-5
0
20
40
60
80
100
120
140
160
N
180



Формула Вайцзеккера для енергії зв'язку

$$B = a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} - \begin{cases} 34A^{-3/4} & \text{for even} - \text{even} \\ 0 & \text{for odd} \\ -34A^{-3/4} & \text{for odd} - \text{odd} \end{cases} .$$

тут $a_v = -15.75$ MeV, $a_s = 17.8$ MeV, $a_c = 0.71$ MeV and $a_{sym} = 23.7$ MeV.



Краплинна модель

Краплинна модель поділу.

$$R(\theta) = R_0 \lambda(\beta_2, \beta_4) \left[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta)\right].$$

Об'єм та кількість частинок зберігається при деформації ядра, тому

$$\frac{4\pi R_0^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta\, [R(\theta)]^3 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \left(\lambda(\beta_2, \beta_4)\right)^3 \int\limits_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta\, \left[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta)\right]^3.$$

Умова для $\lambda(\beta_2, \beta_4)$ є

$$\lambda(\beta_2, \beta_4) = \left\{ \int\limits_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta\, \left[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta)\right]^3 \right\}^{-1/3}.$$

Якщо ми врахуємо β_2^2 та β_2^3 у поверхневої та кулонівської енергіях то

$$\frac{E_{surf}}{b_s A^{1/3}} = 1 + \left(\frac{1}{2\,\pi}\right) \beta_2^2 + \left(\frac{1}{42}\,\frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}}\right) \beta_2^3,$$

$$\frac{E_{coul}}{\frac{3}{5}\frac{e^2 Z^2}{R_0}} = 1 - \left(\frac{1}{4\,\pi}\right) \beta_2^2 - \left(\frac{1}{42}\,\frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}}\right) \beta_2^3.$$

$$E_{def} = E_{surf} + E_{coul} =$$

$$= b_s A^{1/3} \left[1 + \left(\frac{1}{2\,\pi} \right) \beta_2^2 + \left(\frac{1}{42} \frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} \right) \beta_2^3 \right]$$

$$+ \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_0} \left[1 - \left(\frac{1}{4\,\pi} \right) \beta_2^2 - \left(\frac{1}{42} \frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} \right) \beta_2^3 \right]$$

Параметр подільності

$$x = \frac{E_{coul}}{2E_{surf}} = \frac{\frac{3}{5}\frac{e^2 Z^2}{R_0}}{2b_s A^{2/3}} = \frac{3e^2}{10b_s} \frac{Z^2}{R_0 A^{2/3}} = \frac{3e^2}{10r_0 b_s} \frac{Z^2}{A^1} \approx 0.02 \frac{Z^2}{A},$$

де $R_0 = r_0 A^{1/3} \approx 1.2 A^{1/3}\text{fm}$, $B_s \approx 17 - 19\text{MeV}$.

$$E_{def} = b_s A^{1/3} \left\{ \left[1 + \left(\frac{1}{2\,\pi} \right) \beta_2^2 + \left(\frac{1}{42} \frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} \right) \beta_2^3 \right] + 2x \left[1 - \left(\frac{1}{4\,\pi} \right) \beta_2^2 - \left(\frac{1}{42} \frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} \right) \beta_2^3 \right] \right\}$$

$$= b_s A^{1/3} \left\{ (1 + 2x) + \left(\frac{1}{2\,\pi} \right) \beta_2^2 (1 - x) + \left(\frac{1}{42} \frac{\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} \right) \beta_2^3 (1 - 2x) \right\}$$

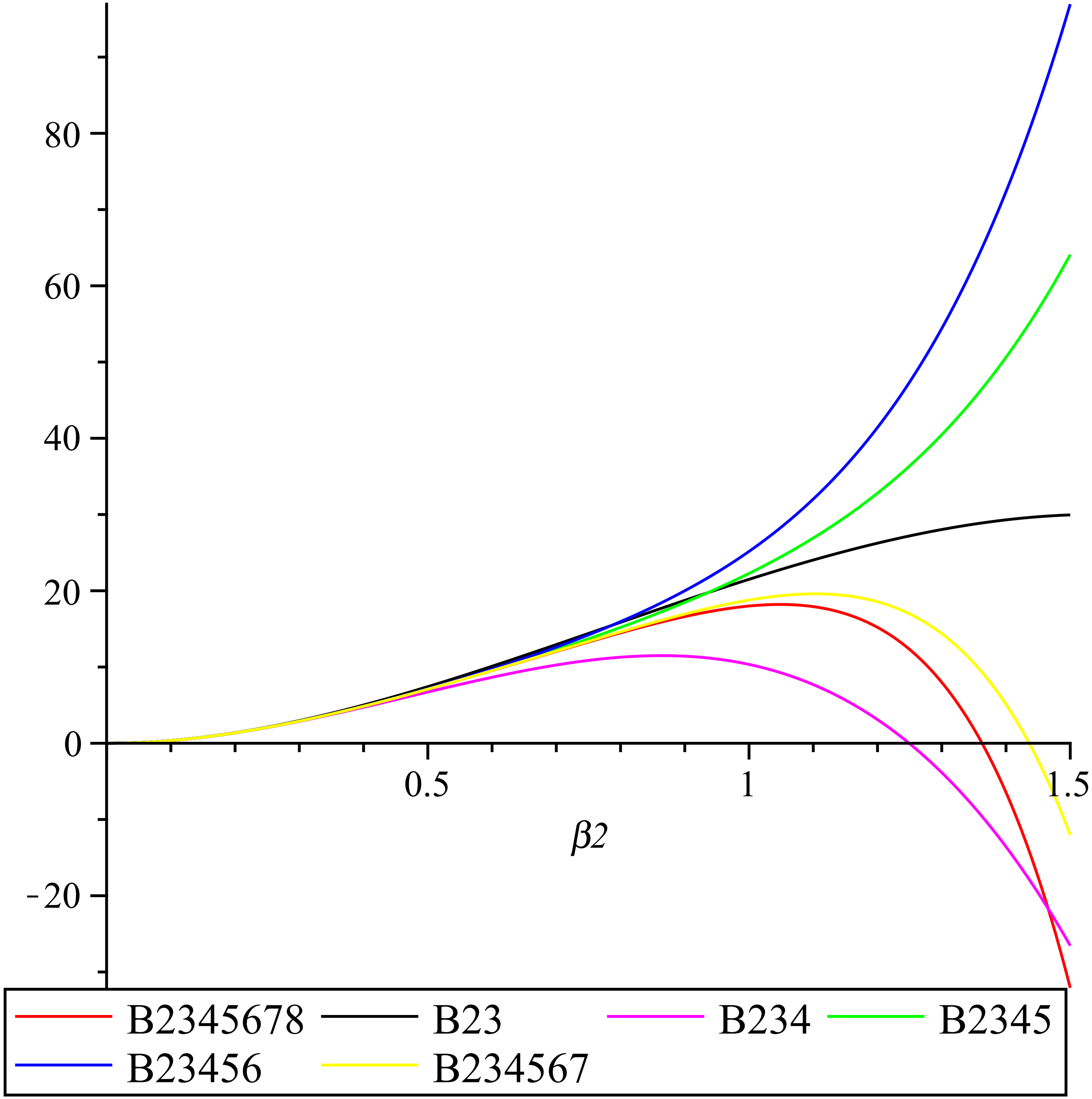
Поверхнева енергія:

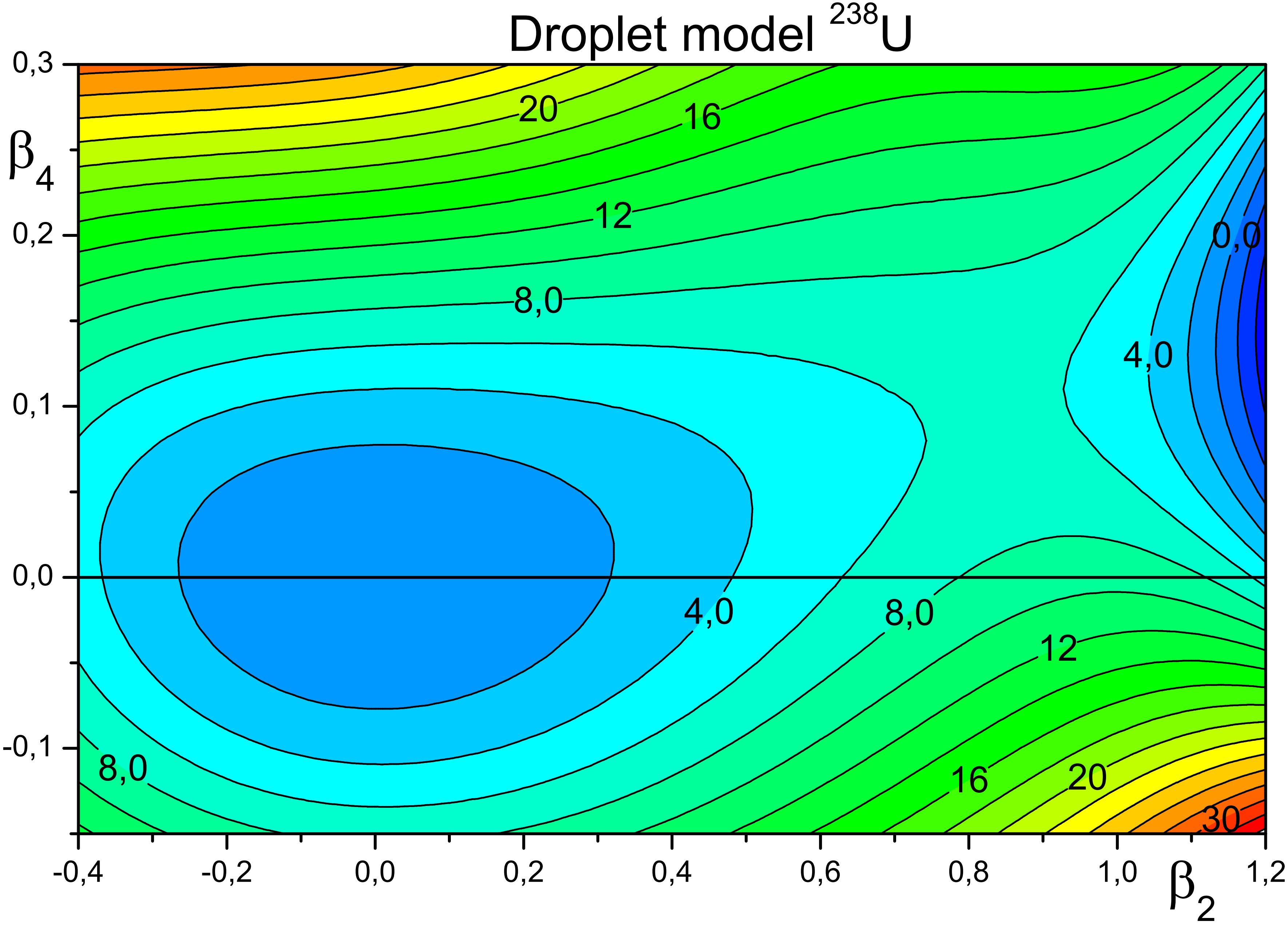
$$
\begin{aligned}
\frac{E_{surf}}{b_s A^{2/3}} = {} & 1 + \frac{10539}{616}\,\frac{{\beta_2}^2{\beta_3}^2\beta_4}{\pi^{5/2}} - \frac{1350}{1001}\,\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_4}^3}{\pi^2} - \frac{1805}{56056}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^5\beta_4}{\pi^3} \\
& - \frac{5}{77}\,\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_4}^2}{\pi^{3/2}} - \frac{45}{308}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3\beta_4}{\pi^2} + \frac{1011}{572}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3{\beta_4}^2}{\pi^{5/2}} - \frac{1}{15}\,\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_3}^2}{\pi^{3/2}} \\
& + \frac{6637}{4620}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3{\beta_3}^2}{\pi^{5/2}} - \frac{54}{13}\,\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_3}^2\beta_4}{\pi^2} - \frac{3}{14}\,\frac{{\beta_2}^2\beta_4}{\pi^{3/2}} - \frac{3}{22}\,\frac{{\beta_3}^2\beta_4}{\pi^{3/2}} + \frac{9911975}{879648}\,\frac{{\beta_2}^4{\beta_4}^2}{\pi^3} \\
& + \frac{2593337}{288288}\,\frac{{\beta_2}^4{\beta_3}^2}{\pi^3} - \frac{27955}{4004}\,\frac{{\beta_4}^2{\beta_2}^2}{\pi^2} - \frac{18059}{1144}\,\frac{{\beta_3}^2{\beta_4}^2}{\pi^2} + \frac{1313019}{136136}\,\frac{{\beta_2}^2{\beta_4}^3}{\pi^{5/2}} \\
& - \frac{242835}{68068}\,\frac{{\beta_2}^6\beta_4}{\pi^{7/2}} + \frac{23763}{16016}\,\frac{{\beta_2}^4\beta_4}{\pi^{5/2}} + \frac{73}{924}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^5}{\pi^{5/2}} - 1/42\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3}{\pi^{3/2}} - \frac{1635}{10192}\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^7}{\pi^{7/2}} \\
& - \frac{195}{44}\,\frac{{\beta_2}^2{\beta_3}^2}{\pi^2} - \frac{157122775}{274450176}\,\frac{{\beta_2}^8}{\pi^4} - \frac{33}{56}\,\frac{{\beta_2}^4}{\pi^2} + 9/4\,\frac{{\beta_4}^2}{\pi} + 5/4\,\frac{{\beta_3}^2}{\pi} \\
& + \frac{1218115}{2018016}\,\frac{{\beta_2}^6}{\pi^3} - \frac{81}{2002}\,\frac{{\beta_4}^3}{\pi^{3/2}} + 1/2\,\frac{{\beta_2}^2}{\pi} - \frac{27099}{11440}\,\frac{{\beta_3}^4}{\pi^2} - \frac{161299}{24752}\,\frac{{\beta_4}^4}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

Кулонівська енергія

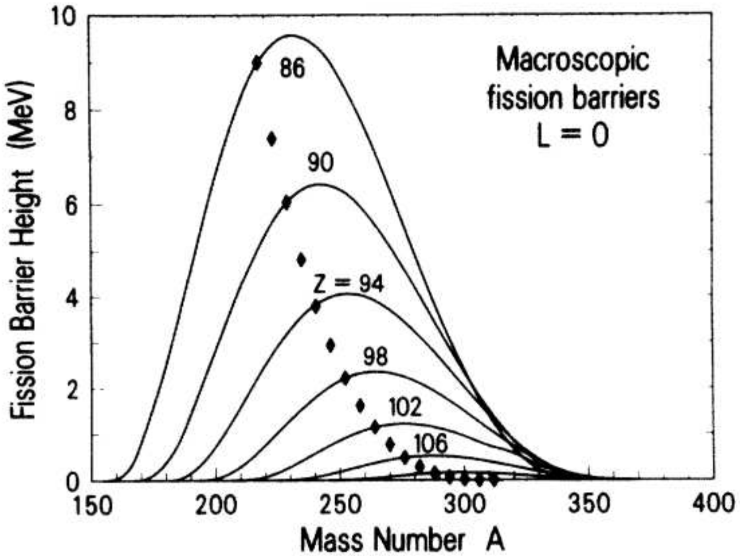
$$
\begin{aligned}
\frac{E_{coul}}{\frac{3}{5}\frac{e^2Z^2}{R_0}} = {} & 1+\frac{3644661}{2004002}\frac{{\beta_3}^2{\beta_2}^2\beta_4}{\pi^{5/2}}+\frac{125595}{2004002}\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_4}^3}{\pi^2}-\frac{1051935}{16032016}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^5\beta_4}{\pi^3}\\
& -\frac{10}{77}\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_4}^2}{\pi^{3/2}}+\frac{3}{98}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3\beta_4}{\pi^2}+\frac{20807009}{72144072}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3{\beta_4}^2}{\pi^{5/2}}-\frac{23}{210}\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_3}^2}{\pi^{3/2}}\\
& +\frac{14271245}{48096048}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3{\beta_3}^2}{\pi^{5/2}}+\frac{41772}{102245}\frac{\sqrt{5}\beta_2\,{\beta_3}^2\beta_4}{\pi^2}-\frac{9}{28}\frac{{\beta_2}^2\beta_4}{\pi^{3/2}}\\
& -\frac{45}{154}\frac{\beta_4\,{\beta_3}^2}{\pi^{3/2}}-\frac{102217343645}{55599031488}\frac{{\beta_2}^4{\beta_4}^2}{\pi^3}-\frac{81589675}{36072036}\frac{{\beta_2}^4{\beta_3}^2}{\pi^3}\\
& +\frac{25948337}{24048024}\frac{{\beta_4}^2{\beta_2}^2}{\pi^2}+\frac{708970}{429429}\frac{{\beta_4}^2{\beta_3}^2}{\pi^2}+\frac{1080854539}{1158313156}\frac{{\beta_2}^2{\beta_4}^3}{\pi^{5/2}}-\frac{721342715}{1425616192}\frac{{\beta_2}^6\beta_4}{\pi^{7/2}}\\
& +\frac{3915435}{8016008}\frac{{\beta_2}^4\beta_4}{\pi^{5/2}}+\frac{235}{6468}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^5}{\pi^{5/2}}-1/42\,\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^3}{\pi^{3/2}}-\frac{9059825}{224448224}\frac{\sqrt{5}{\beta_2}^7}{\pi^{7/2}}+\frac{23761}{20328}\frac{{\beta_3}^2{\beta_2}^2}{\pi^2}\\
& +\frac{73738687655}{212287211136}\frac{{\beta_2}^8}{\pi^4}+\frac{255}{784}\frac{{\beta_2}^4}{\pi^2}-\frac{5}{12}\frac{{\beta_4}^2}{\pi}-\frac{5}{14}\frac{{\beta_3}^2}{\pi}-\frac{206021315}{577152576}\frac{{\beta_2}^6}{\pi^3}\\
& -\frac{405}{4004}\frac{{\beta_4}^3}{\pi^{3/2}}-1/4\,\frac{{\beta_2}^2}{\pi}+\frac{17550521}{34354320}\frac{{\beta_3}^4}{\pi^2}+\frac{9065087725}{13899757872}\frac{{\beta_4}^4}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

^{238}U: Залежність від ступеню n, β_2^n кулонівської та поверхневої енергії.





2. Потенціал Вудса-Саксона



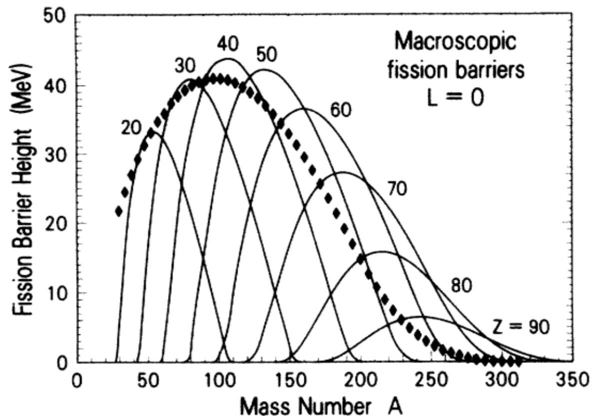
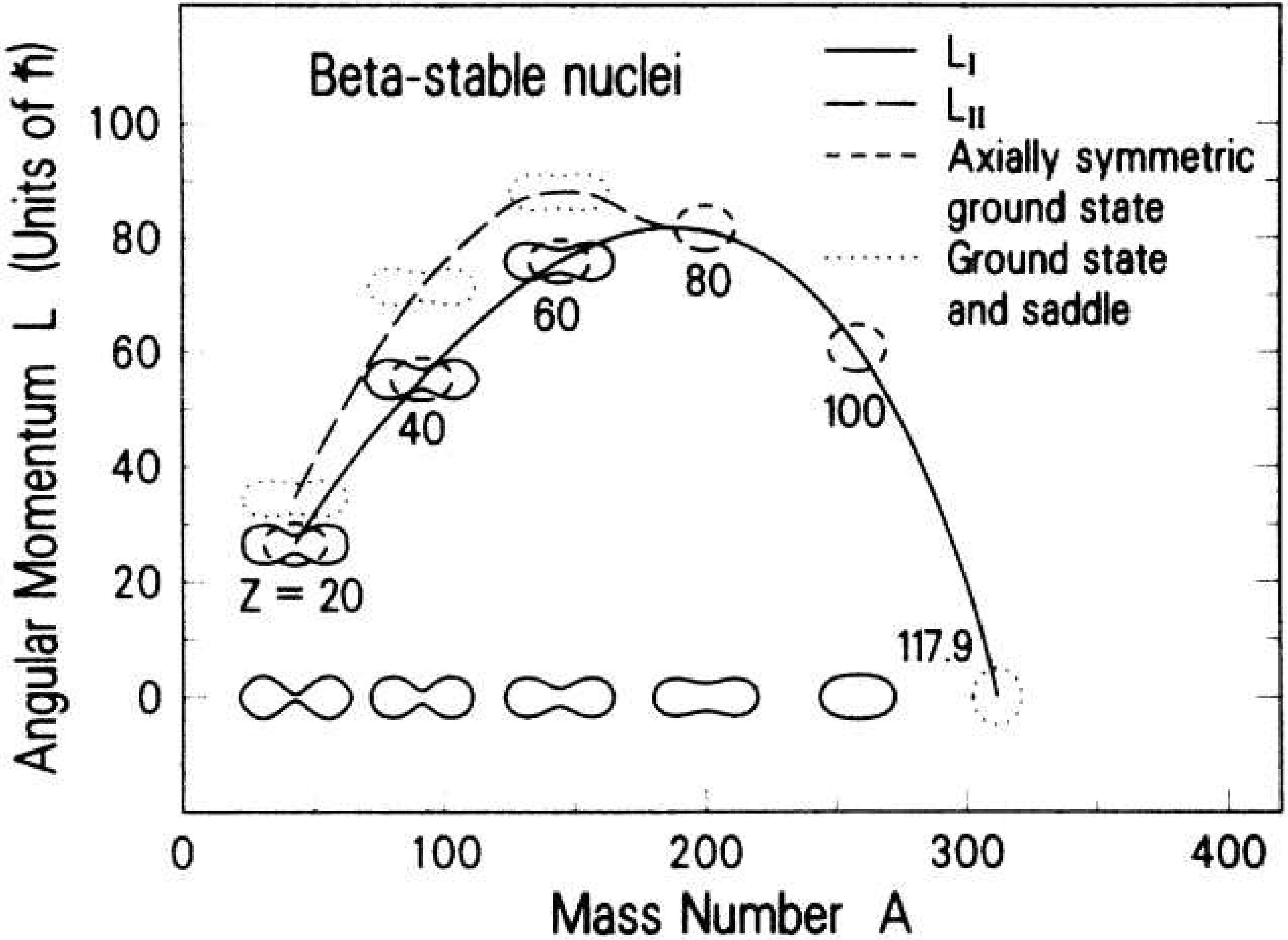


FIG. 3. Calculated fission-barrier heights as a function of mass number for atomic numbers $Z=20$ to 90. The points are barriers for beta-stable nuclei from $Z=14$ to $Z=117.9$ in steps of 2 (except for the last step). The points are the same as the solid curve in Fig. 2.

Форми ядра в основному стані і в седловой точці



Розглянемо для простоти рівняння Шредінгера для протона в ядрі з Z протонами

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V]\Psi = E\Psi$$

де

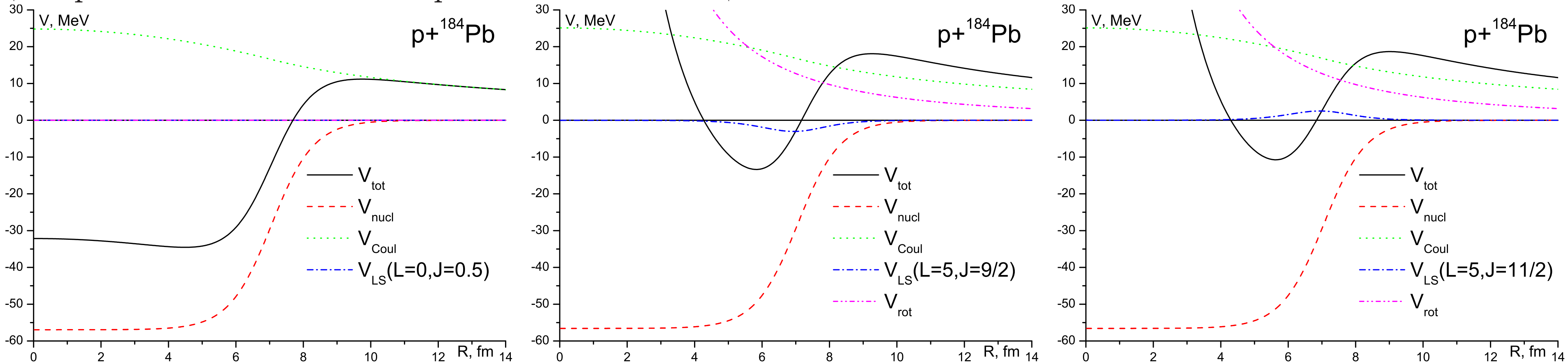
$$V = V_{\mathrm{Coul}}(r) + V_{\mathrm{CR}}(r) + V_{\mathrm{SR}}(r)\hbar^2(\vec{S}\vec{L}),$$

$$V_{\mathrm{Coul}}(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{r}, & r \geq R_{\mathrm{Coul}}, \\ \frac{(Z-1)e^2}{R_{\mathrm{Coul}}}\left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R_{\mathrm{Coul}}^2}\right], & r \geq R_{\mathrm{Coul}}, \end{cases}$$

є кулонівська енергія,

$$V_{\mathrm{CR}}(r) = \frac{V_0}{1+\exp\left((r-R_C)/d_C\right)}, \quad V_{\mathrm{LS}}(r) = \frac{d}{dr}\frac{V_{\mathrm{SR}}}{1+\exp\left((r-R_{\mathrm{SR}})/d_{\mathrm{SR}}\right)}.$$

є центральний та спин-обертальний потенціал.



Рівняння Шредінгера:

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V]\Psi = E\Psi$$

Повна хвильова функція

$$\Psi = \frac{\psi_{j\ell}(r)}{r} Y_{lm}(\Omega)\xi_s.$$

Поділ змінних, що з'являються в повному рівнянні Шредінгера, призводить до звичайного радіального рівняння для кожного значення орбітального та загального кутового моменту ℓ and j

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{k^2}{E}[E - (V_{\mathrm{Coul}}(r) + V_{\mathrm{CR}}(r) + iW_{\mathrm{CI}}(r)) \right.$$
$$\left. -(V_{\mathrm{SR}}(r) + iW_{\mathrm{SR}}(r))\hbar^2(j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1))/2] \right\} \psi_{j\ell} = 0$$

де $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$.

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) = A(r)\psi(r).$$

Вводимо допоміжну функцію

$$\zeta(r) = \psi(r) - \frac{h^2}{12}A(r)\psi(r),$$

де h - крок алгоритму кінцевих різниць. Для функції ζ існує алгоритм Нумерова, заснований на формулі скінченної різниці для трьох послідовних точок на сітці з кроком h,

$$\zeta_{i+1}(r_{i+1}) = \left[2 + \frac{h^2 A_i}{1-(h^2/12)A_i}\right]\zeta_i(r_i) - \zeta_{i-1}(r_{i-1}).$$

Граничні умови для $r = 0$ є $\psi(r) = 0$.

Асимптотика для $r \to \infty$ для зв'язаних рівнів $E < 0$ є $\psi(r) \sim \exp\left[-\sqrt{-2mE/\hbar^2}r\right]$.

Асимптотита для $r \to \infty$ для квазістаціонарних рівнів $E > 0$ є
$\psi(r) \sim \sin\left[\sqrt{2mE/\hbar^2}r + \delta_\ell - \ell\pi/2\right]$, де δ_ℓ - фаза розсіяння.

Борис Васильович Нумеров [29 січня 1891 - 13 вересня 1941] був російським астрономом, землевпорядником та геофізиком.

Якщо оцінити одночастинну енергію E_i і підсумувати всі енергії, то енергія

$$E_{\text{tot}} = \sum_i^{i_F} E_i.$$

не збігається до енергії зв'язку ядер, тому що потенціал не є самоузгодженим.

Зауважимо, що енергію зв'язування можна оцінити в рамках наближення Хартрі-Фока з високою точністю. Однак наближення Хартрі-Фока є досить складним.

Однак безліч різноманітних величин:

- рівні частинки,
- бар'єри ділення, період напіврозпаду поділу,
- енергії зв'язування (використовуючи підхід до корекції оболонки)
- різні параметри динаміки,
- енергії одночастинкових і збуджених станів

може бути оцінена в простому наближенні Вудса-Саксона з високою точністю.

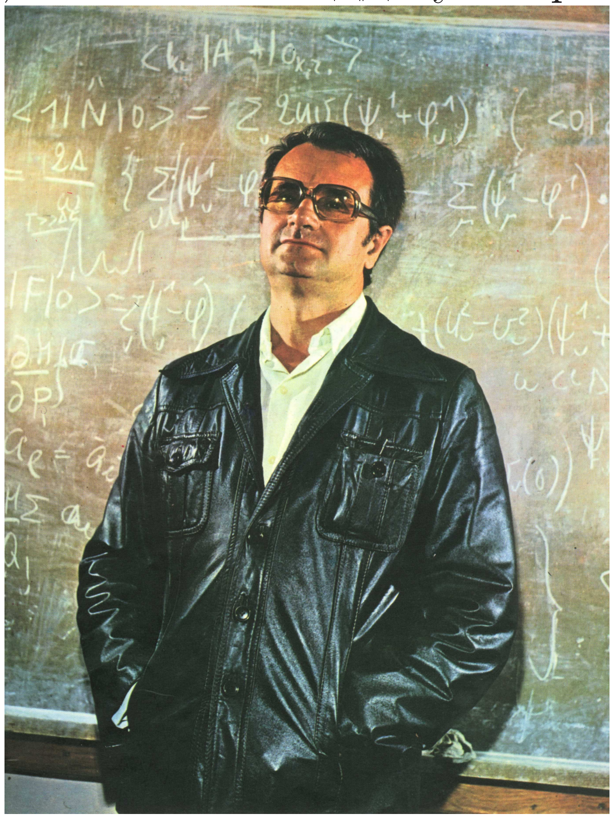
Отже, наближення Вудса-Саксона є досить простим і корисним!

3. Теорія оболонкових поправок Струтинського

Вілен Митрофанович Струтинський запровадив підхід до виправлення оболонок у 1965-1968 рр.

(16 жовтня 1929 р., Данилова Балка, Кіровоградський район, Україна - 28 червня 1993 р., Рома, Італія)

Член-кореспондент НАНУ, начальник відділу теоретичної ядерної фізики в ІЯД, Київ.


Головна думка: Як ми це вказували

$$E_{\text{tot}} = \sum_{i}^{i_F} E_i.$$

не співпадає з енергією зв'язку ядер, тому що потенціал не є самоузгодженим, але ми вважаємо

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \sum_i^{i_F} \tilde{E}_i + \left[\sum_i^{i_F} E_i - \sum_i^{i_F} \tilde{E}_i\right] \\ &\Downarrow \text{substitution} \Downarrow \\ &= \quad + \left[\sum_i^{i_F} E_i - \sum_i^{\tilde{i}_F} \tilde{E}_i\right] \\ &= \quad + \quad \delta E. \end{aligned}$$

Відмітимо, що   в цілому досить точна.

$\sum \tilde{E}_i$ - енергія, яка оцінюється за допомогою плавних одночастинних енергій, усереднених за енергією.

Густина одночастинних рівнів щільність

$$g(E) = \sum_i \delta(E - E_i)$$

дає одночастинну енергію, E_i. В цьому випадку

$$\sum_i E_i = \int dE\ ().$$

Плавна одночастинна енергія, $\tilde{E}$ задається середньою щільністю рівня однієї частинки, $\tilde{g}(\epsilon)$, отриманою від $g(E)$, складанням з розгладженням функція $f(x)$:

$$\tilde{g}(E) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dE'\ g(E') f\left(\frac{E - E'}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma} \sum_i f\left(\frac{E - E_i}{\gamma}\right),$$

де $\gamma \sim (1 \div 2)\hbar\Omega = (1 \div 2) E_F A^{1/3}$ - параметр усереднення, близький до відстані між оболонками $8 \div 10$ МеВ. Отже, усереднення відбувається як через зв'язані одночастинки, так і над континуумом одночастинок позитивної енергії. Тому

$$\delta E = \sum_i^{i_F} E_i - \int\limits_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} dE\ \tilde{g}(E)\ E,$$

де $\tilde{\lambda}$ - згладжений рівень Фермі, визначений за допомогою рівняння числа частинок:

$$N = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} dE \; \tilde{g}(E).$$

Функція складання $f(x)$ може бути записана як добуток

$$f(x) = \omega(x) P_p(x),$$

де

$$\omega(x) = \pi^{-1/2} \mathrm{exp}(-x^2)$$

є функцією зважування і

$$P_m(x) = \sum_{k=0,2,...}^{m} \frac{(-1)^{k/2}}{2^k (k/2)!} H_k(x)$$

- так званий поліном виправлення кривизни m й порядку (типові значення поліноміального порядку складають $m = 6, 8$).

Згладжена одночастинна енергія може бути виражена у вигляді:

$$\tilde{E} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} E\,\tilde{g}(E)dE = \sum_i E_i \tilde{n}_i + \gamma \frac{d\tilde{E}}{d\gamma},$$

е згладжений розподіл заселення нуклонів

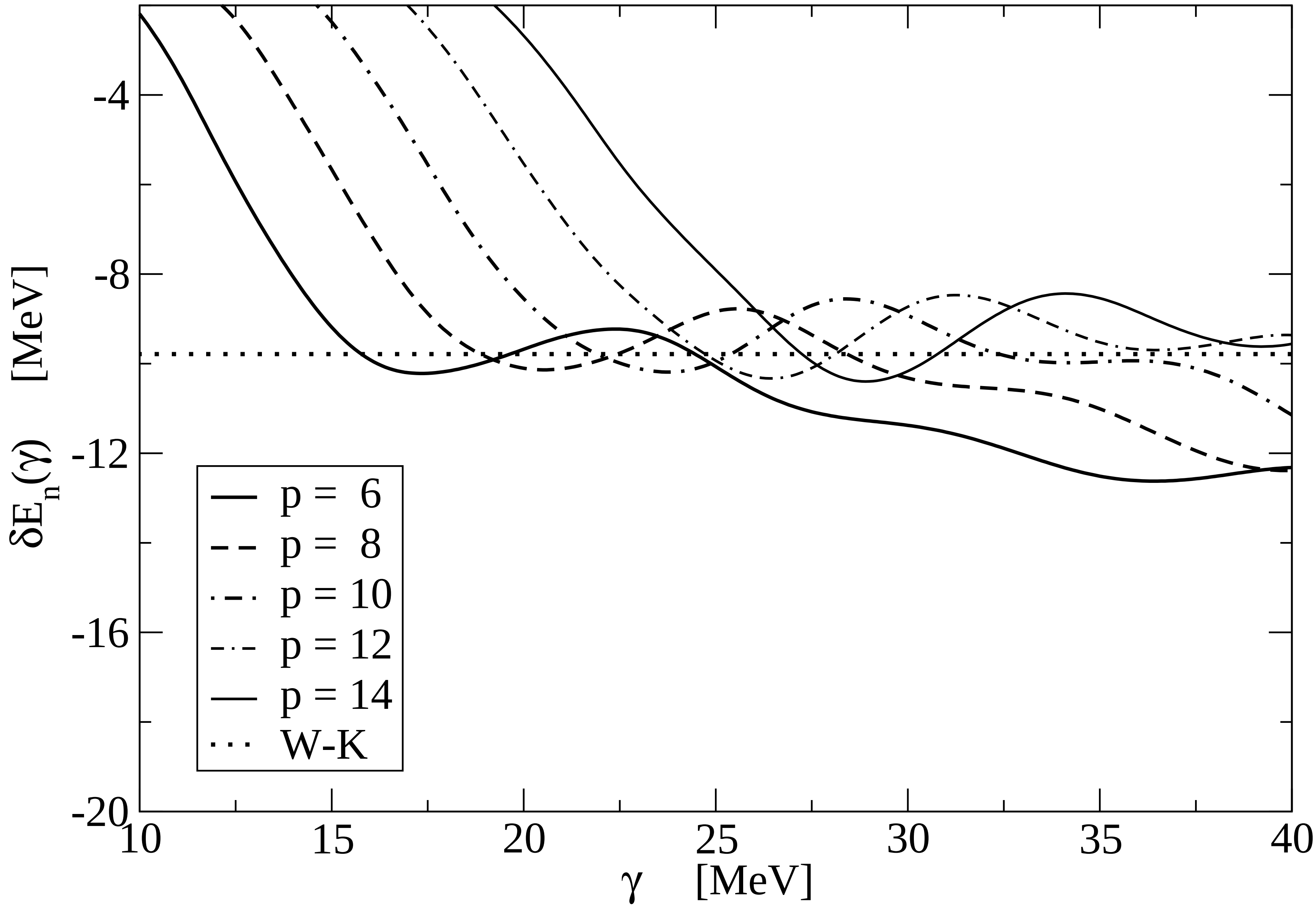
$$\tilde{n}_i = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} dE\, f\left(\frac{E - E_i}{\gamma}\right).$$

Оскільки значення $\tilde{E}$ не повинно залежати від діапазону згладжування γ (ані від порядку корекції кривизни m), другий доданок повинен бути рівним нулю, тобто

$$\frac{d\tilde{E}}{d\gamma} = 0 \text{ and } \frac{d\tilde{E}}{dm} = 0.$$

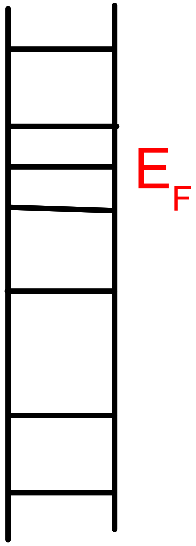
Якщо **умова плато** не виконується, метод усереднення Струтинського не дає однозначного результату.

Як правило, метод оболонкової поправки Струтинського (або точність плато) становить $\sim$ 0,5 MeB у дуже важких ядрах і $\sim$ 1,5 MeB у легких та середніх ядрах. Однак часто такої точності достатньо. Вибір γ і m на практиці визначає як відповідні значення, де функції $\tilde{E}(\gamma) \simeq$ і $\tilde{E}(m) \simeq constant$.



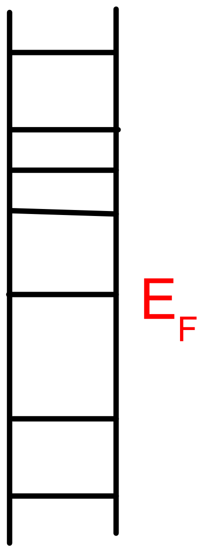
Залежність оболонкової поправки від параметра усереднення γ та порядку полінома виправлення кривизни p.

Shell features $\delta E_{\text{shell}} = \sum_i^{i_F} E_i - \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} dE\ \tilde{g}(E)\ E.$



energy level
delsity is higher
than average

System stability is
less than average
shell correction
$\delta E_{\text{shell}} > 0$



energy level
delsity is lower
than average

System stability is
higher than average
shell correction
$\delta E_{\text{shell}} < 0$

Найвище значення корекції оболонки - $\delta E_{\text{shell}} = -13 \div -14$ MeB, оцінене для основного стану ^{208} Pb.

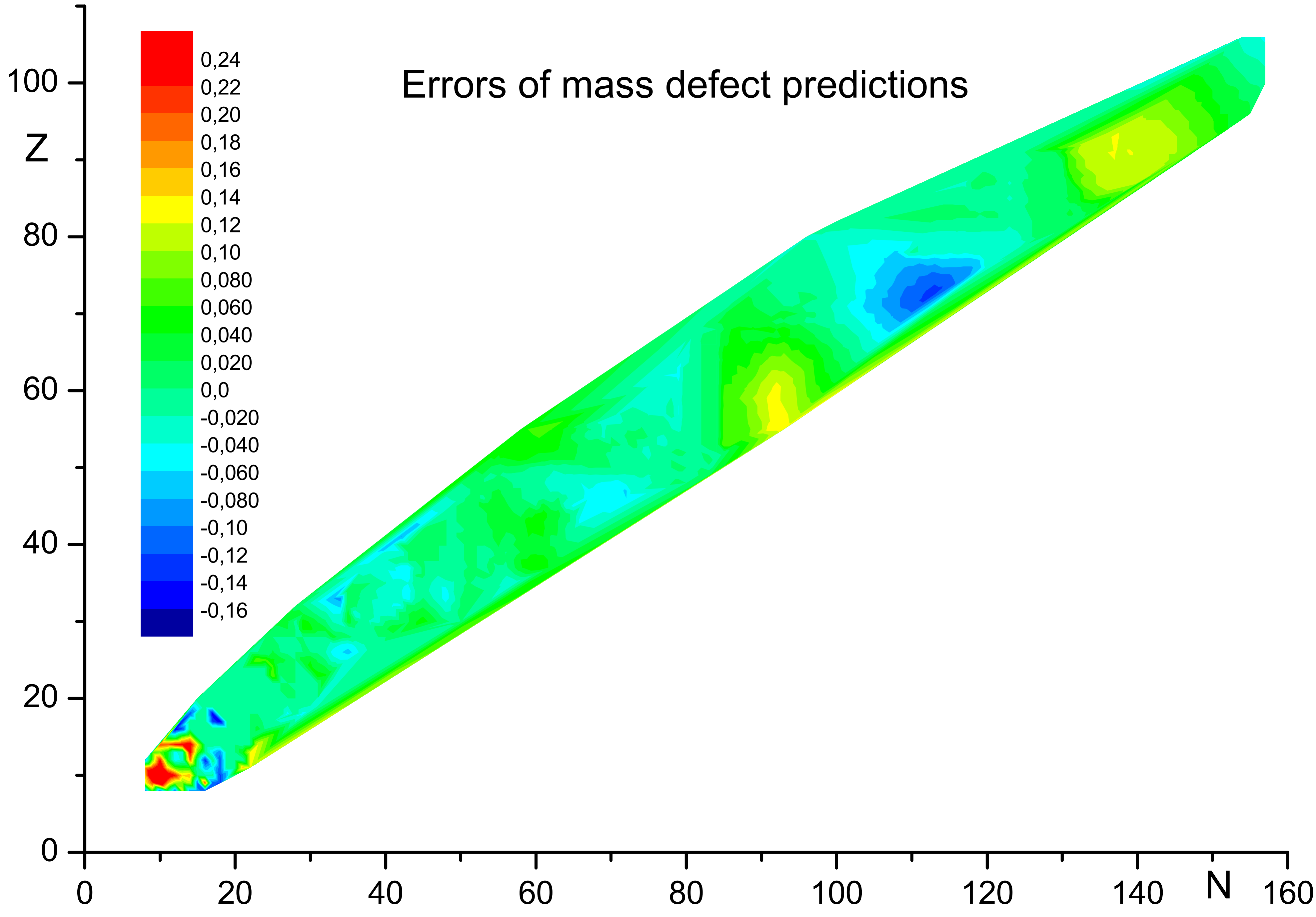
Для порівняння, енергія зв'язку ^{208} Pb - -1636 MeB.

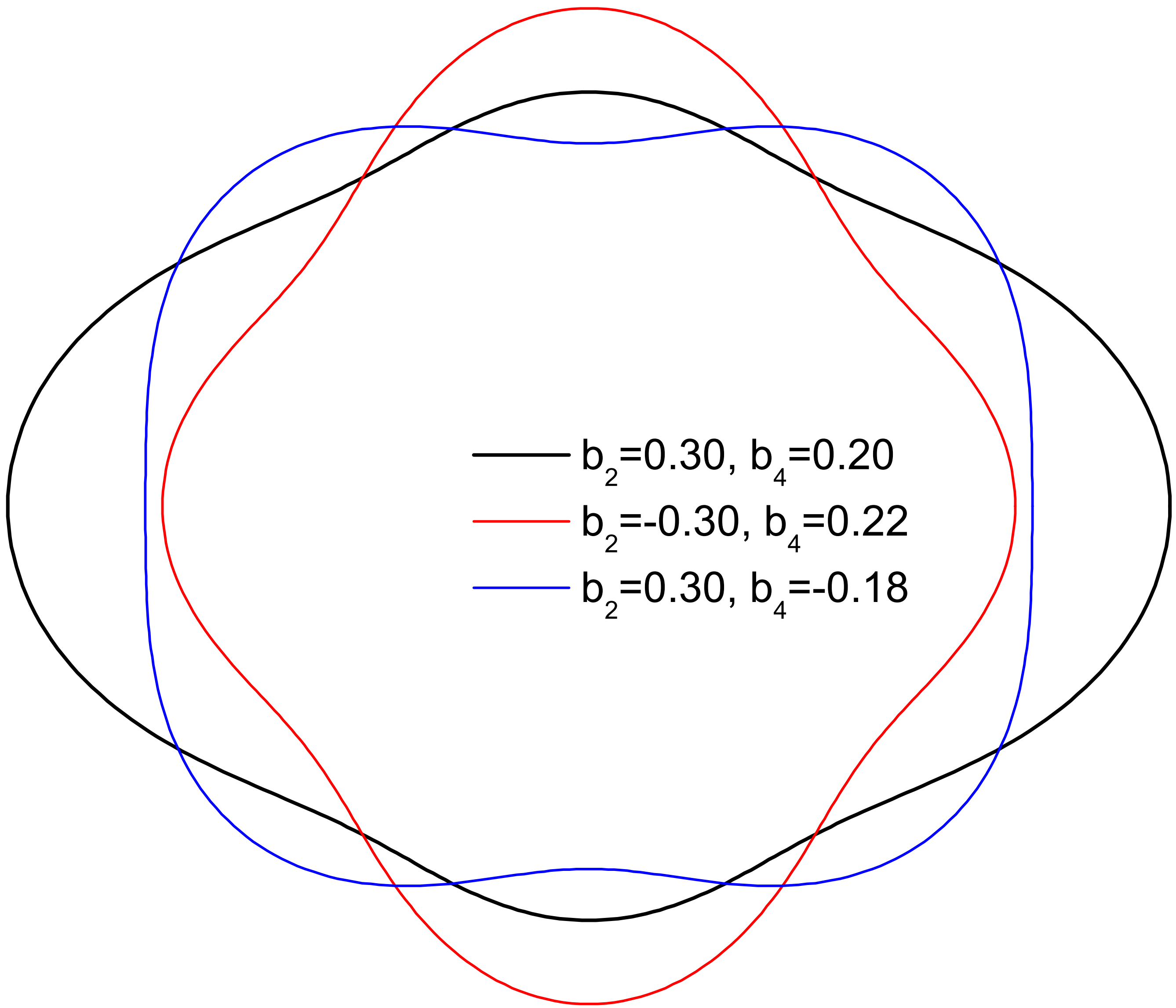
Метод оболонки поправки був надзвичайно корисним.

За допомогою цього методу було побудовано масові формули з надзвичайно високою точніс

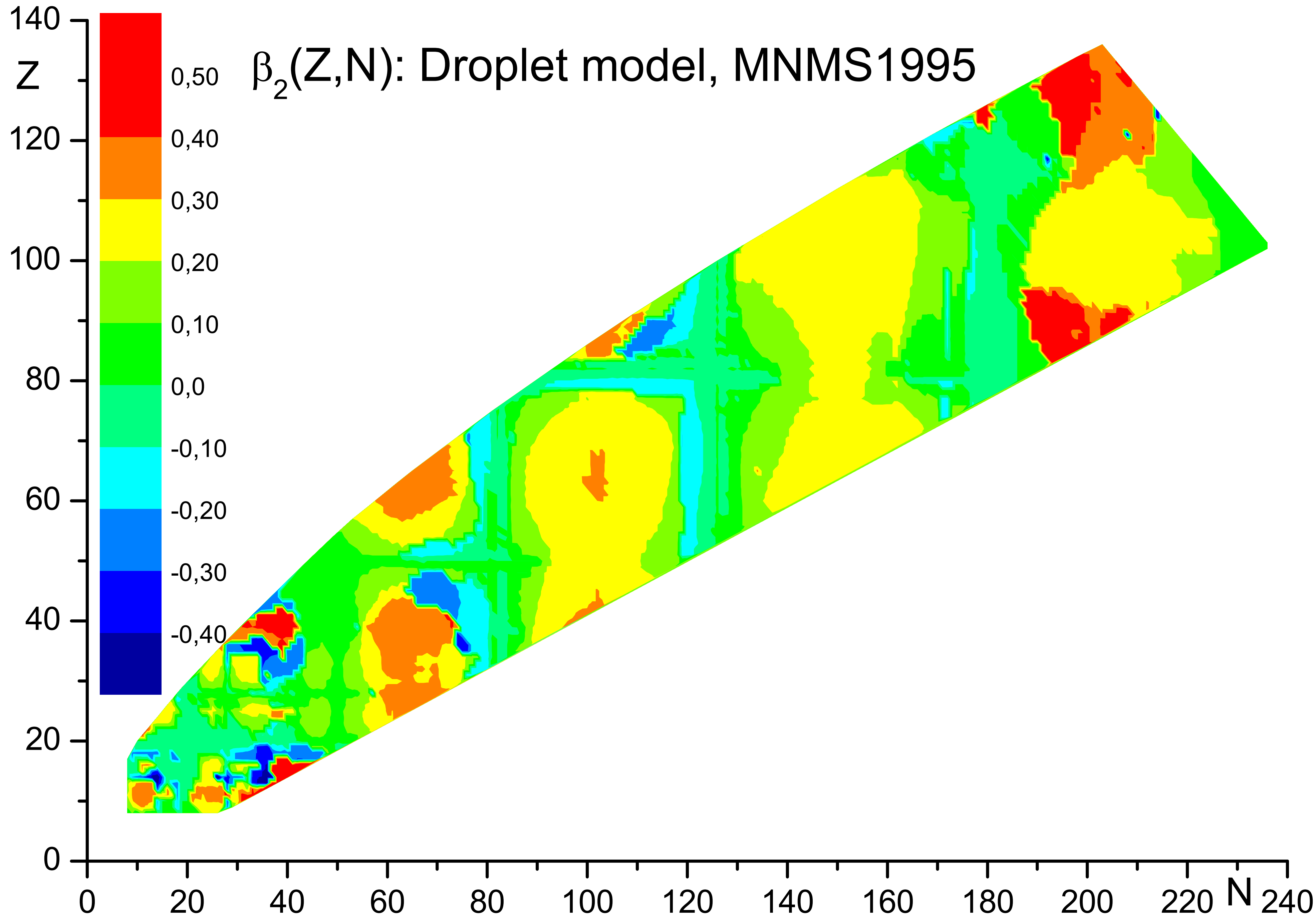
Аксіальні деформації:

$$
\begin{aligned}
R(\theta) &= R_0[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta)], \\
Y_{20}(\theta) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \\
Y_{40}(\theta) &= \frac{9}{256\sqrt{\pi}}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3).
\end{aligned}
$$

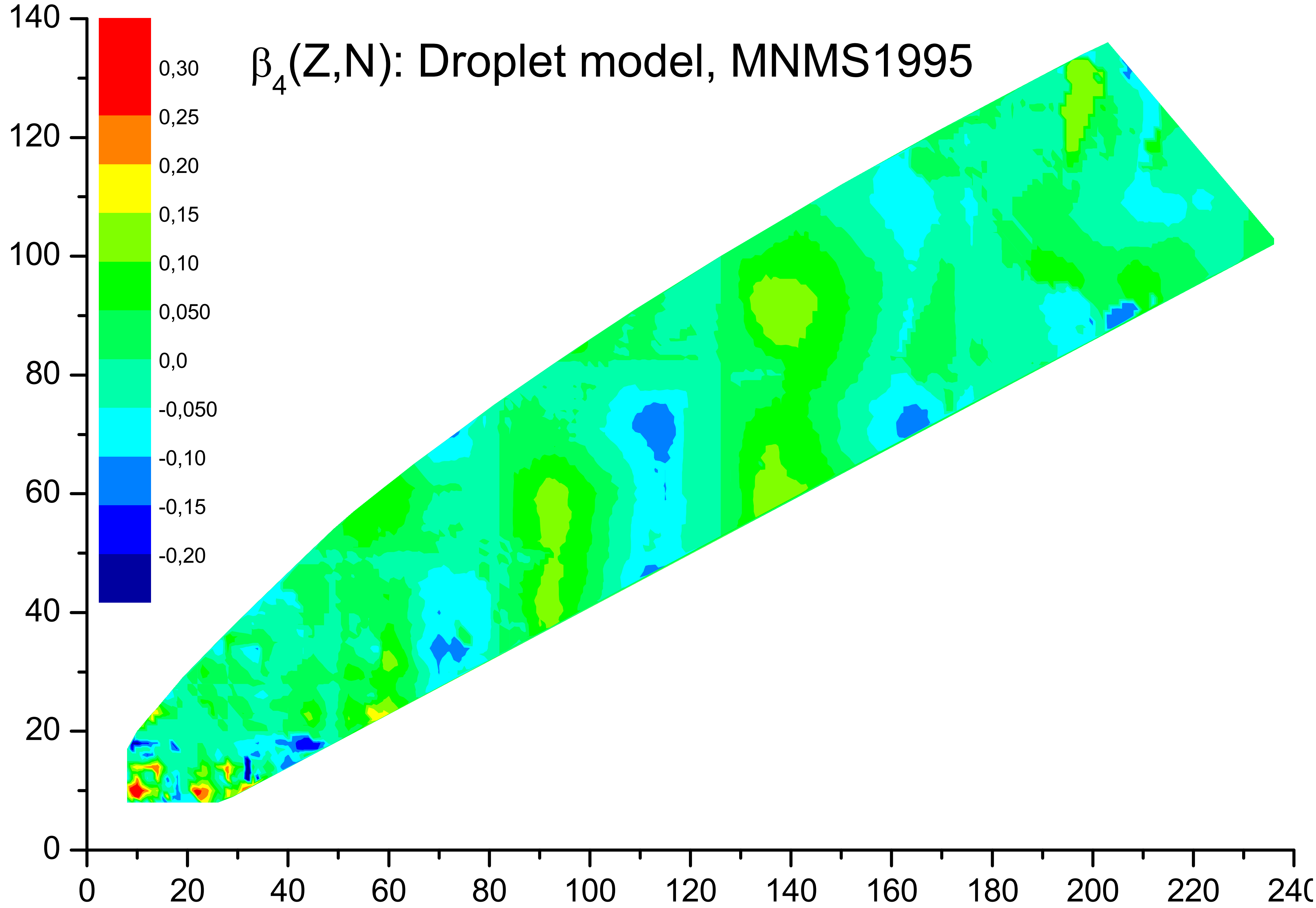

Errors of mass defect predictions
0,24
0,22
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,080
0,060
0,040
0,020
0,0
-0,020
-0,040
-0,060
-0,080
-0,10
-0,12
-0,14
-0,16
Z
0
20
40
60
80
100
N
0
20
40
60
80
100
120
140
160



b_2=0.30, b_4=0.20
b_2=-0.30, b_4=0.22
b_2=0.30, b_4=-0.18



β2(Z,N): Droplet model, MNMS1995
Z
N
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,0
-0,10
-0,20
-0,30
-0,40
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


$\beta_4(Z,N)$: Droplet model, MNMS1995
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,050
0,0
-0,050
-0,10
-0,15
-0,20
140
120
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240

Неаксіальні деформації:

$$\begin{aligned}
R(\theta,\varphi) &= R_0[1+\beta_2 Y_{20}(\theta)+\beta_{22}(Y_{22}(\theta,\varphi)+Y_{2-2}(\theta,\varphi))],\\
Y_{22}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3\cdot 5}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi},\\
Y_{2-2}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3\cdot 5}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\phi}.
\end{aligned}$$

Бета-коливання $\beta_2 = \beta_{20} + \beta_{20}^t \cos(\omega_\beta^t)$, ω_β - частота бета-коливань.

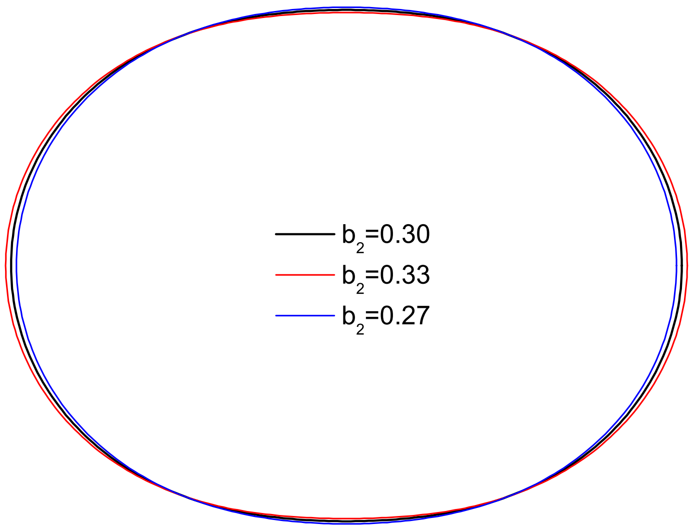
Класичний гамільтоніан - це

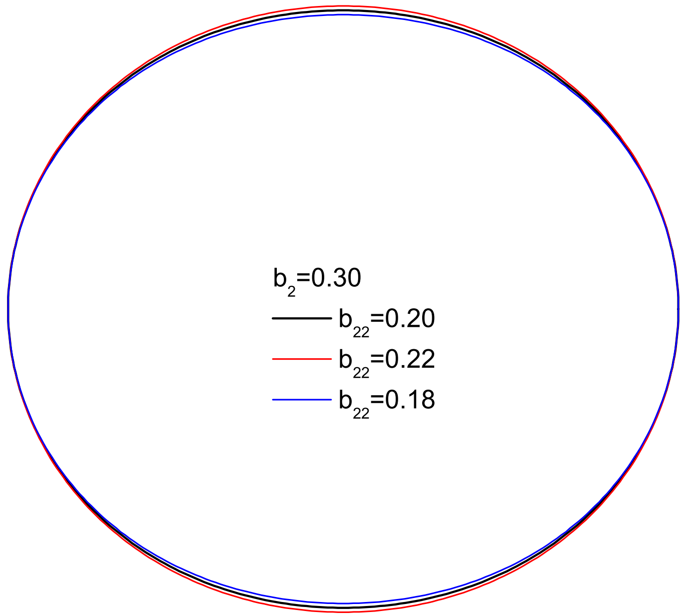
$$H = \frac{\mathcal{M}_\beta}{2}\left(\frac{d\beta_{20}^t \cos\omega_\beta t}{dt}\right)^2 + \frac{\mathcal{C}_\beta}{2}\left(\beta_{20}^t \cos\omega_\beta t\right)^2.$$

Якщо$\beta_{22} = \beta_{22}^0 + \beta_{22}^t \cos\omega_\gamma t$ - гамма-коливання, ω_γ є частота гама-вібрацій.

Класичний Гамільтониан

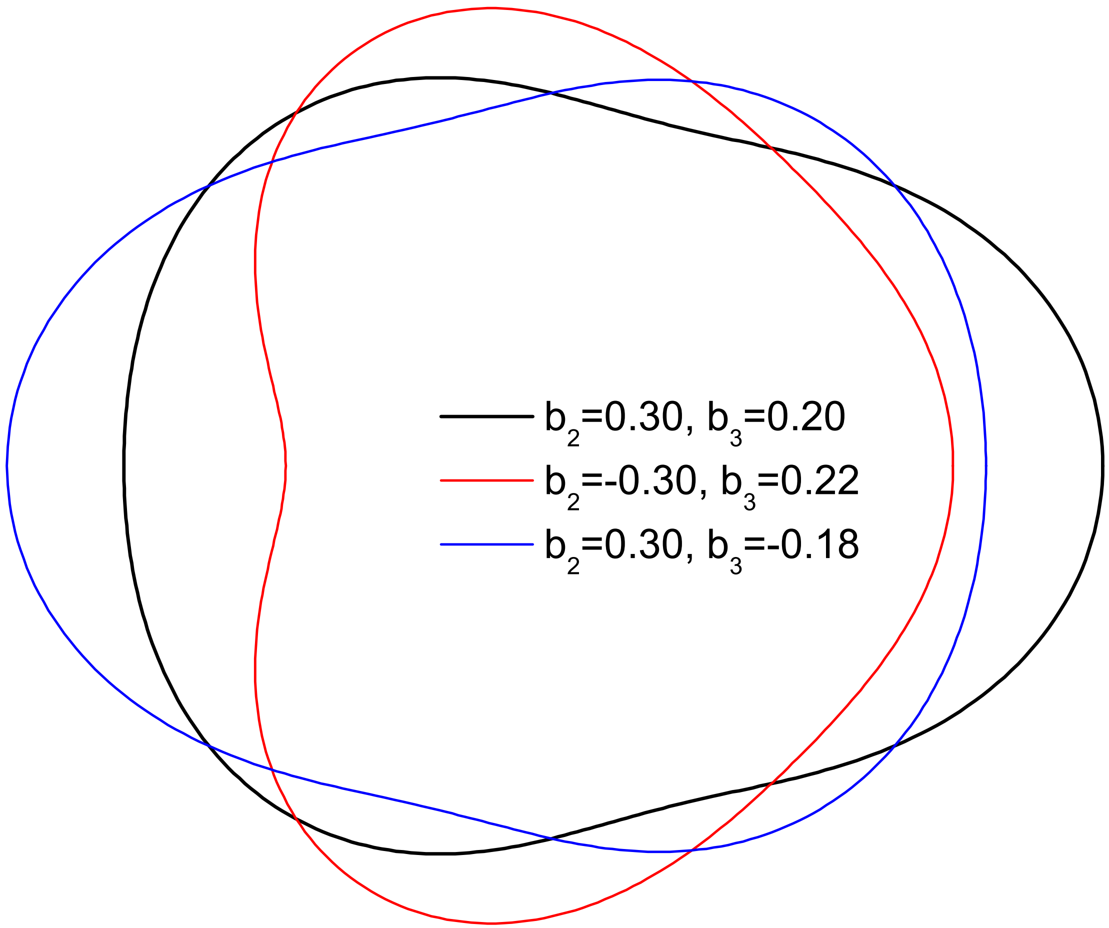
$$H = \frac{\mathcal{M}_\gamma}{2}\left(\frac{d\beta_{22}^t \cos\omega_\gamma t}{dt}\right)^2 + \frac{\mathcal{C}_\gamma}{2}\left(\beta_{22}^t \cos\omega_\gamma t\right)^2.$$


b_2=0.30
b_2=0.33
b_2=0.27


b_2=0.30
b_{22}=0.20
b_{22}=0.22
b_{22}=0.18

Аксіальні дзеркально-асиметрична деформація (грушоподібна)

$$R(\theta) = R_0[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_3 Y_{30}(\theta)],$$
$$Y_{30}(\theta) = \sqrt{\frac{7}{64\pi}}(5\cos^2\theta - 3)\cos\theta.$$



Неаксіальна дзеркально-асиметрична деформація (банановая)

$$
\begin{aligned}
R(\theta) &= R_0[1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_3 Y_{30}(\theta) + \beta_{31}(Y_{31}(\theta,\varphi) - Y_{3-1}(\theta,\varphi))], \\
Y_{31}(\theta) &= -\sqrt{\frac{3\cdot 7}{16\pi}}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta e^{i\phi}, \\
Y_{3-1}(\theta) &= \sqrt{\frac{3\cdot 7}{16\pi}}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta e^{-i\phi}.
\end{aligned}
$$

R. R. Chasman, Physics Letters B, Volume 266, Issues 3-4, 29 August 1991, Pages 243-248.

Вивчено вплив деформацій $Y_{3\pm1}(\theta,\varphi)$ на енергетичну поверхню нуклідів в області A = 190. Знайдено багато нуклідів із супердеформованими та гіпердеформованими мінімумами. Стани, пов'язані з цими мінімумами, виявляються поблизу моменту в $I = 40$.

Існують різні більш точні підходи до опису атомних мас

- Thomas-Fermi + Strutinsky Shell Corrections
- Extended Thomas-Fermi + Strutinsky Shell Corrections
- Hartree-Fock and Hartree-Fock-Bogoliubov
- Relativistic Mean Field Theory

7. Ділення ядра.

Розділення на два фрагменти, енергетичний стан:

$$\text{Released Energy at Fission} = E(Z,N) - E(Z_1,N_1) - E(Z_2,N_2).$$

Дія:

$$\mathcal{A}(E) = (2/\hbar)\int\limits_a^b \sqrt{2\mu(s)(\mathcal{V}(s)-E)}ds,$$

де s э траєкторія поділу у просторі $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_\ell$, $\mu = \sum_{\ell,\ell'} B_{\ell,\ell'} \frac{d\beta_\ell}{ds}\frac{d\beta_{\ell'}}{ds}$. Коефіцієнт проникнення:

$$T(E) = 1/\{1+\exp[\mathcal{A}(E)]\}$$

Кількість зіткнень ядра з бар'єром поділу в одиницю часу $\omega_0/(2\pi)$:

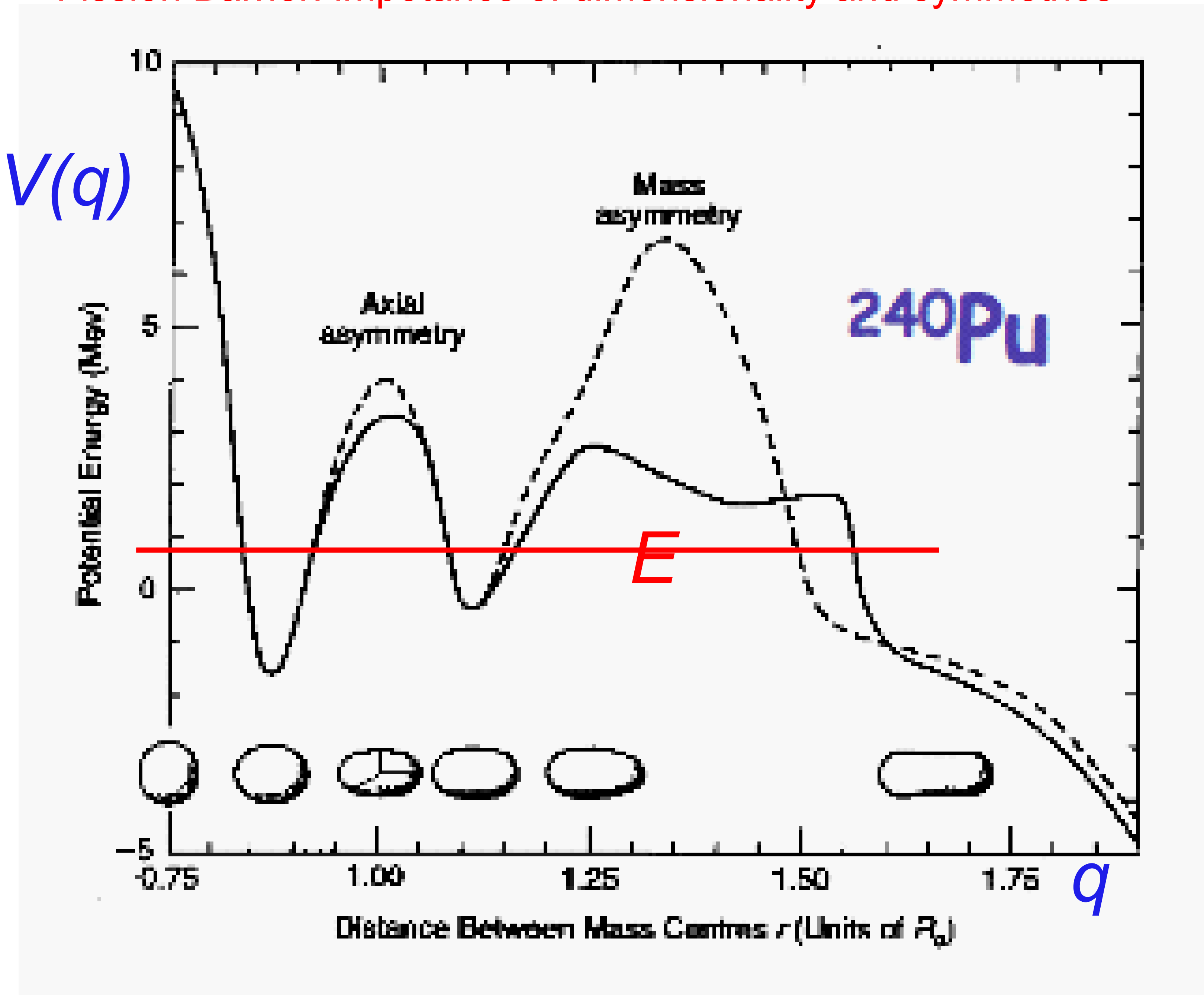
$$\nu_{\text{sf}} = \frac{2\pi \ln 2}{\omega_0},$$

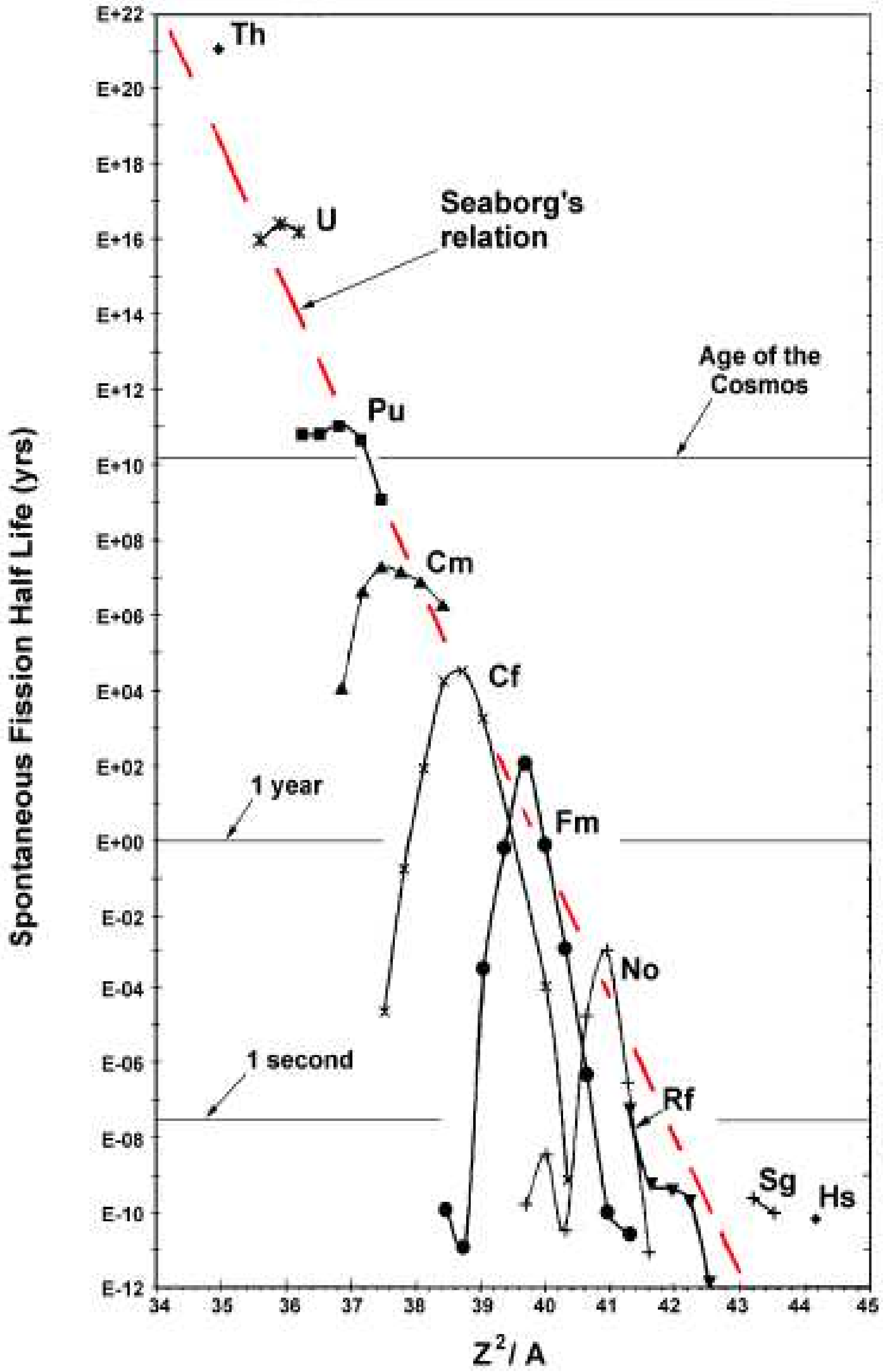
де $E_{zp} = 0.5\hbar\omega_0 \approx 0.7$ MeV.

Період напіврозпаду:

$$t_{sf}(E) = \nu_{\text{sf}}/T(E)$$

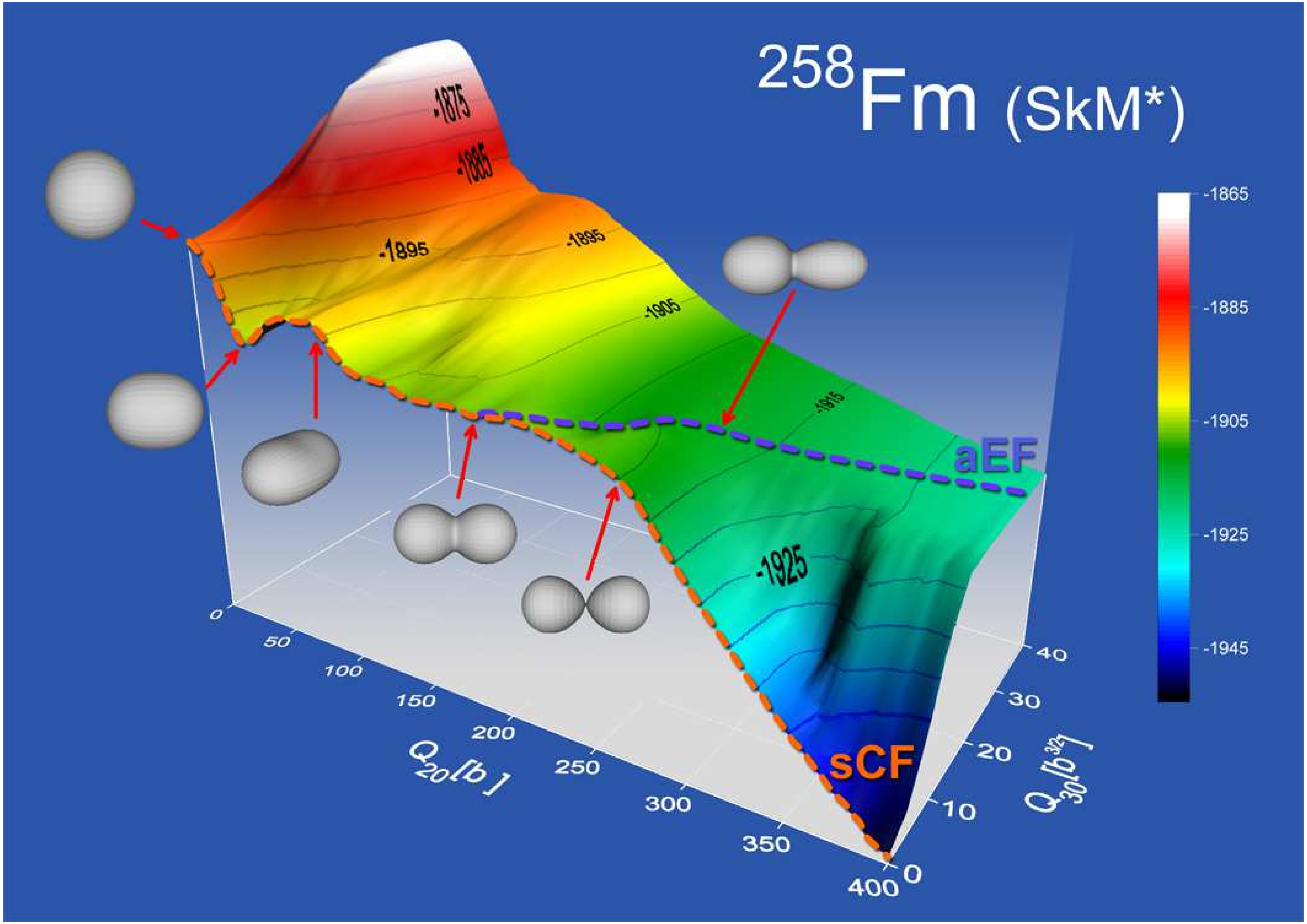
Fission Barrier: impotance of dimensionality and symmetries

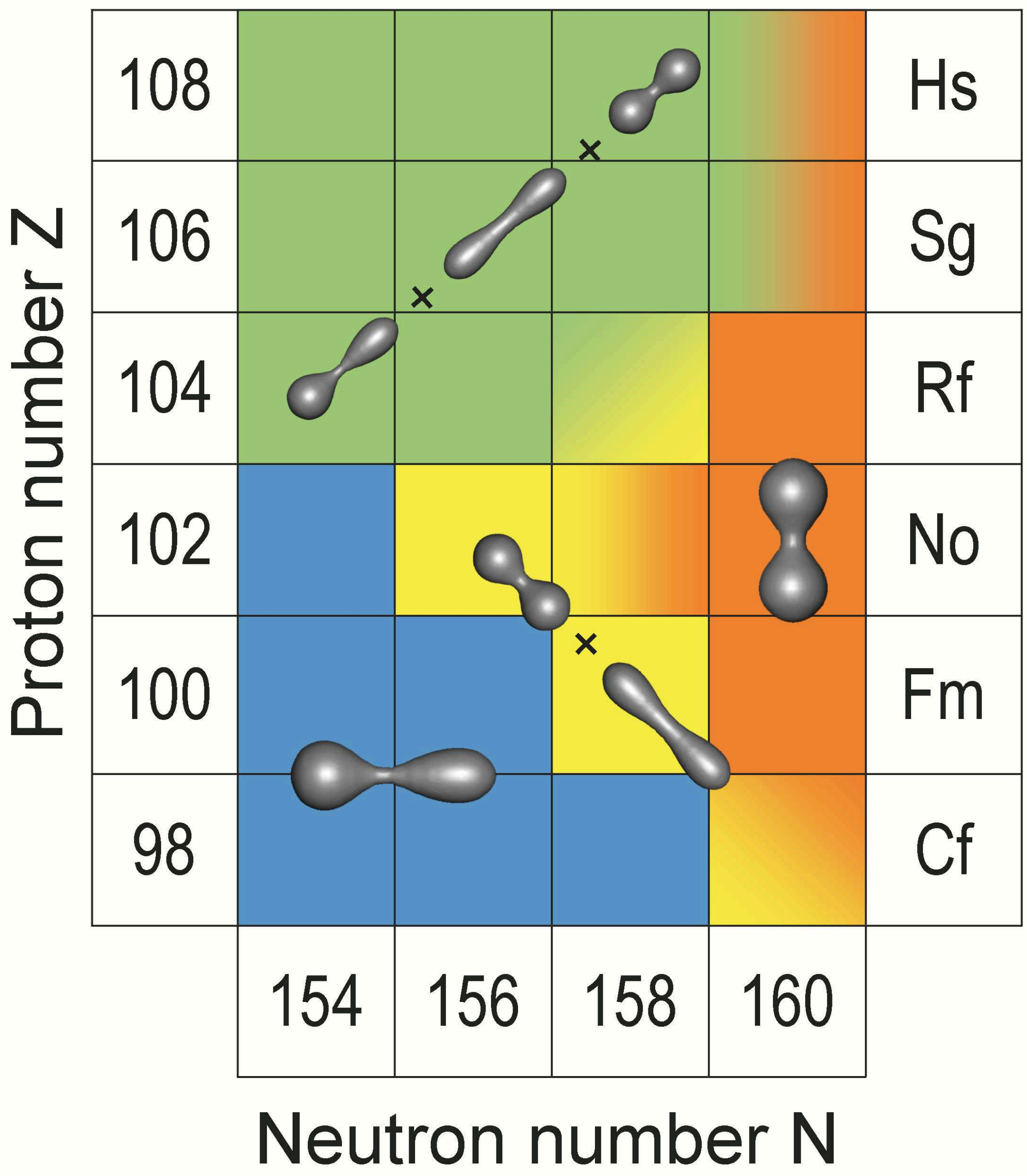


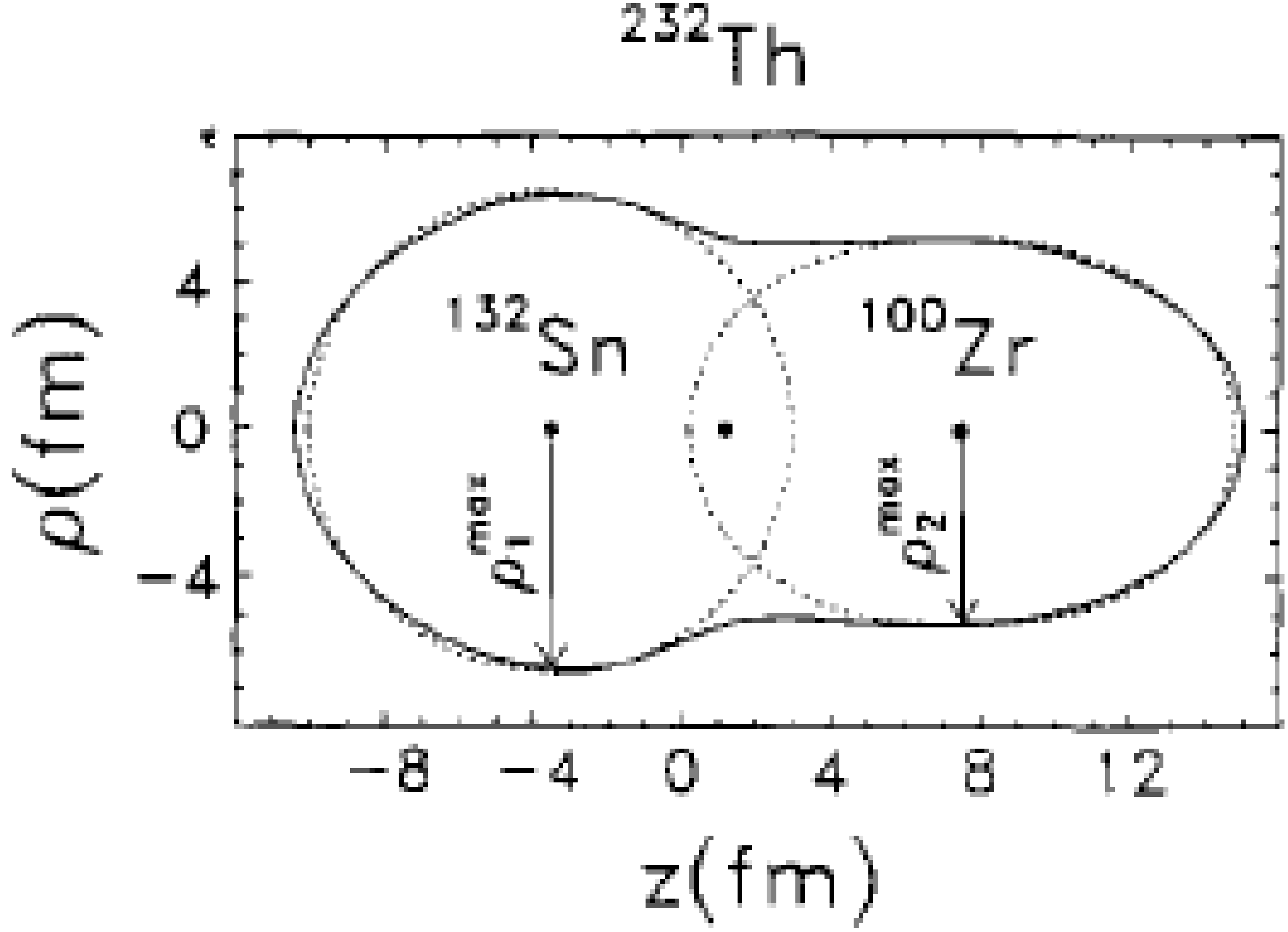


Spontaneous Fission Half Life (yrs)
E+22
E+20
E+18
E+16
E+14
E+12
E+10
E+08
E+06
E+04
E+02
E+00
E-02
E-04
E-06
E-08
E-10
E-12
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
Z^2/A
Th
U
Seaborg's relation
Age of the Cosmos
Pu
Cm
Cf
Fm
No
Rf
Sg
Hs
1 year
1 second

Bimodal fission



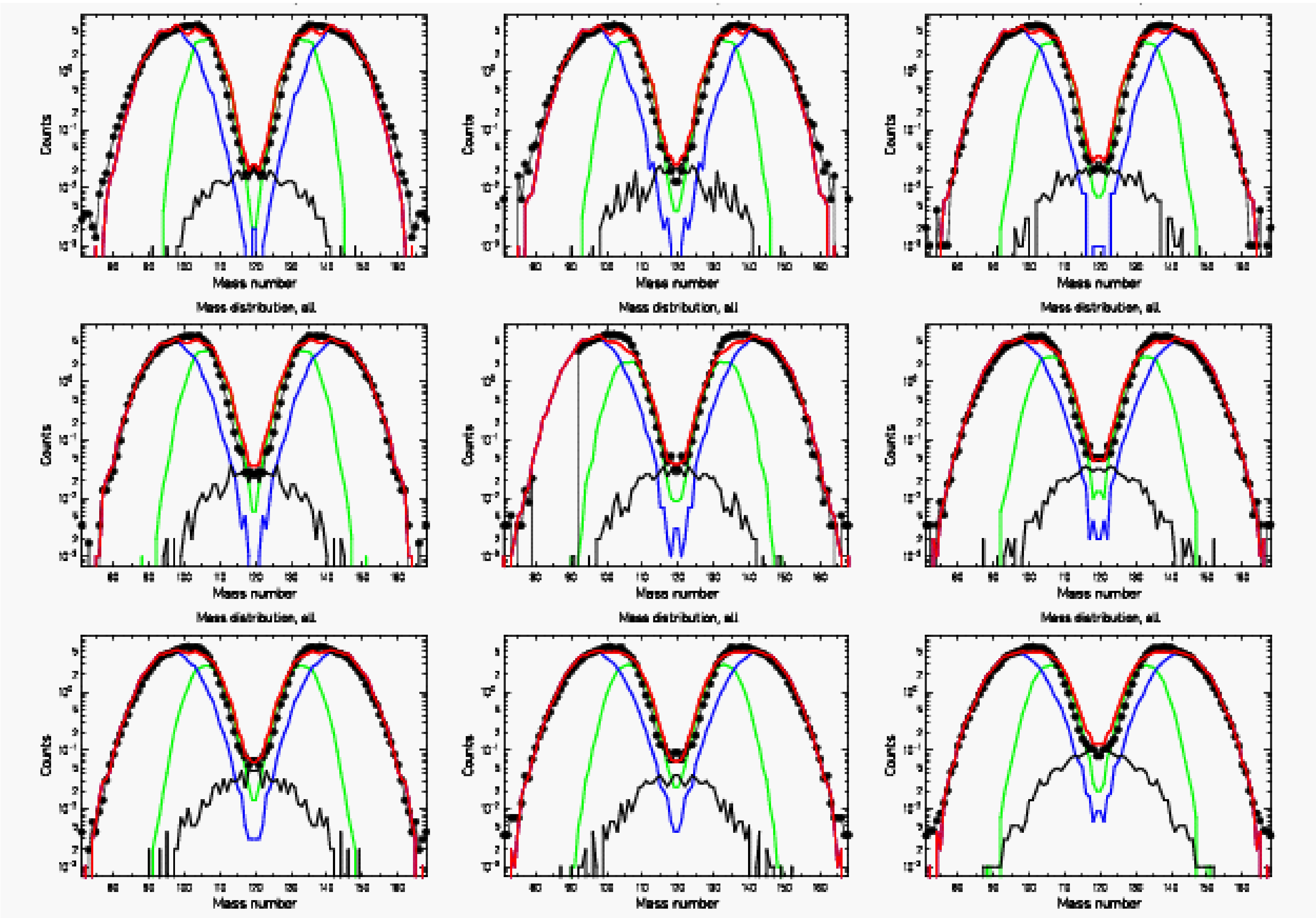

Proton number Z
108
106
104
102
100
98
Hs
Sg
Rf
No
Fm
Cf
154
156
158
160
Neutron number N



^{232}Th
^{132}Sn
^{100}Zr
ρ_1^{max}
ρ_2^{max}
ρ(fm)
z(fm)
4
0
−4
−8
−4
0
4
8
12

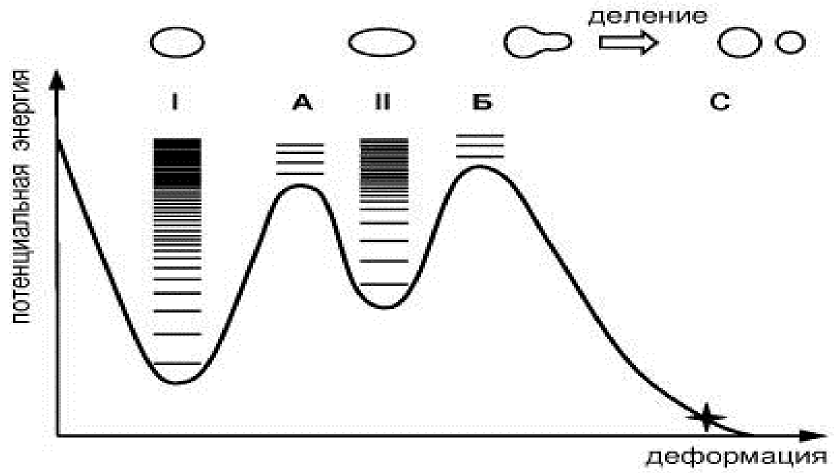
Fission fragment modes

Data - F. Vives et al, Nucl. Phys. A662 (2000) 63; Lines - Model calculations

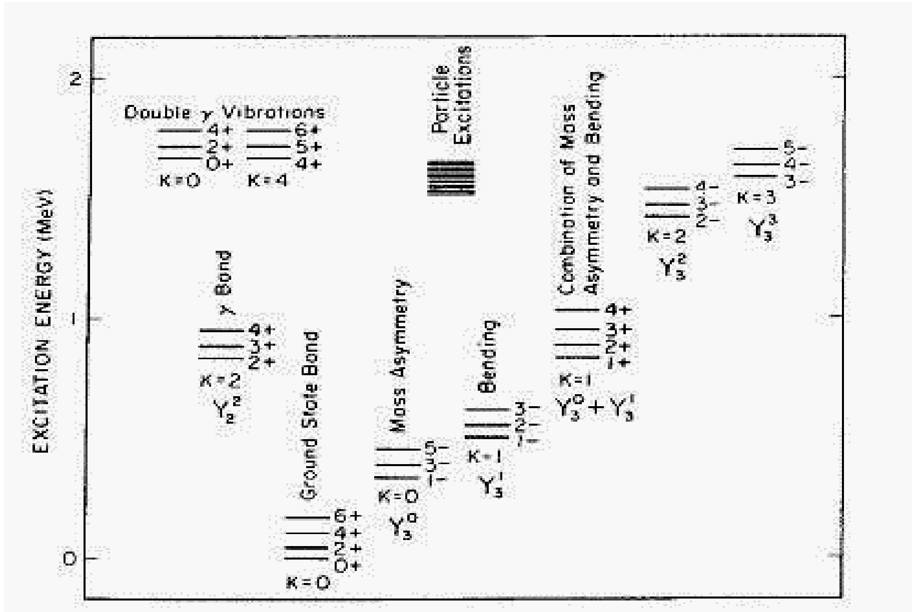


$$Y_{sym}(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp^{\left[-\left(\frac{A-A_0/2}{\sigma}\right)^2\right]}; \quad Y_{asym}(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp^{\left[-\left(\frac{A-A_a}{\sigma}\right)^2\right]} + \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp^{\left[-\left(\frac{A-(A_0-A_a)}{\sigma}\right)^2\right]}$$

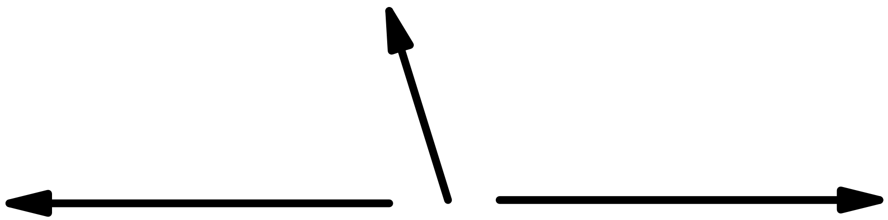
Fission isomers

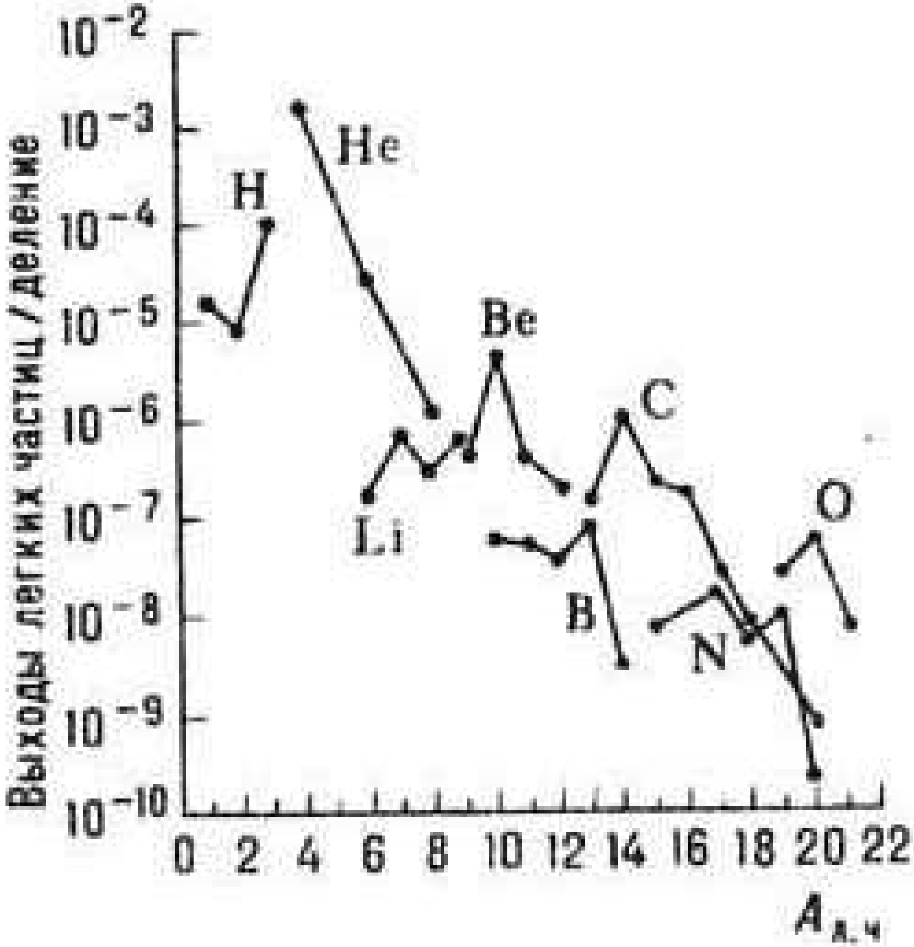


Rotational structure of fissionisomers



Ternary fission: 1event for few handrents of binary fission events





Дякую за увагу!