Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 10.

ДИФУЗІЯ НЕЙТРОНІВ (ч.3)

- **МЕТОД ФУНКЦІЙ ГРІНА**
- **ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПАЙЄРЛСА**

МЕТОД ФУНКЦІЙ ГРІНА

Як відомо, **стаціонарний** потік нейтронів в точці $\vec{r}$ від точкового джерела, що знаходиться в точці $\vec{r}_0$, рівний

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{S}{4\pi D}\frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}_0|/L}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|},$$

де $|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Якщо в точках $\vec{r}_i$ маємо $\boldsymbol{N}$ точкових джерел, які не змінюють властивостей середовища, і вважаємо, що нейтрони між собою не взаємодіють, тобто джерела незалежні одне від одного, то сумарний потік буде

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{S_i}{4\pi D}\frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}_i|/L}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Перейдемо від дискретного розподілу джерел до неперервного. Якщо в елементарному об'ємі dV' в околі кожної точки простору $\vec{r}\,'$ за одиницю часу генерується $S(\vec{r}')dV'$ нейтронів, то загальний потік визначається інтегралом

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{S(\vec{r}')}{4\pi D} \frac{e^{-|\vec{r}'-\vec{r}|/L}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV'$$

або

$$\Phi(\vec{r}) = \int S(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')dV'$$

де вираз

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{-|\vec{r}'-\vec{r}|/L}}{4\pi D|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

називається функцією Гріна, або точковим дифузійним ядром, і є розв'язком задачі для простого джерела.

$S(\vec{r}')$ є густиною розподілу джерела.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ МОНОЕНЕРГЕТИЧНИХ НЕЙТРОНІВ

Розглянемо нейтрони, що прийшли в момент t в точку $\vec{r}$ з точки $\vec{r}'$. Для цього вони повинні покинути точку $\vec{r}'$ в момент $t' = t - |\vec{r}' - \vec{r}|/v$.

Число нейтронів, згенерованих та розсіяних елементарному об'ємі dV' в околі точки $\vec{r}'$ за час dt', становить $[\Sigma_s \Phi(\vec{r}') + S(\vec{r}')]dV'dt'$.

Ймовірність того, що ці нейтрони досягнуть точки $\vec{r}$, не зазнавши зіткнення, дорівнює $\exp(-\Sigma_t |\vec{r}' - \vec{r}|)$.

Якщо розсіяння та генерація нейтронів мають ізотропний характер, то нейтрони, що покинули об'єм dV' в околі точки $\vec{r}'$ в момент t' протягом часу dt', рівномірно заповнять сферичний шар радіусом $|\vec{r}' - \vec{r}|$ і товщиною $v\, dt'$, тобто об'ємом $4\pi|\vec{r}' - \vec{r}|^2 v\, dt'$.

Тому кількість нейтронів на одиницю об'єму в точці $\vec{r}$, що були народжені та розсіяні в об'ємі dV' в околі точки $\vec{r}'$, становитиме

$$[\Sigma_s \Phi(\vec{r}\,') + S(\vec{r}\,')] \frac{\exp(-\Sigma_t |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{4\pi |\vec{r}\,' - \vec{r}|^2 v} dV'$$

Проінтегрувавши по всьому об'єму, звідки можуть прийти нейтрони, одержуємо густину нейтронів в точці $\vec{r}$:

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [\Sigma_s \Phi(\vec{r}\,') + S(\vec{r}\,')] \frac{\exp(-\Sigma_t |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2 v} dV'$$

або, у випадку моноенергетичних нейтронів,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int [\Sigma_s \Phi(\vec{r}\,') + S(\vec{r}\,')] \frac{\exp(-\Sigma_t |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} dV'$$

Це рівняння називають ***інтегральним рівнянням Пайєрлса*** для потоку нейтронів.

На відміну від рівняння дифузії, тут ми не робимо припущень про мализну поглинання порівняно з розсіянням, про розміщення джерел нейтронів. Це рівняння справедливе як завгодно близько до границь об'єму зони.

Більше того, можна замінити показник експоненти на інтеграл вздовж шляху нейтрона від $\vec{r}'$ до $\vec{r}$:

$$-\int_0^R \Sigma_t\left(\vec{r} - R'\vec{\Omega}\right)dR'$$

тим самим врахувавши залежність поглинання та розсіяння від координат середовища.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int [\Sigma_s\Phi(\vec{r}') + S(\vec{r}')]\,\frac{\exp\left(-\int_0^R \Sigma_t\left(\vec{r} - R'\vec{\Omega}\right)dR'\right)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2}dV'$$

Для випадку анізотропного розсіяння нейтронів можна також замінити переріз розсіяння Σ_s на транспортний переріз Σ_{tr}.

Вираз

$$K(\vec{r},\vec{r}') = \frac{\exp\left(-\int_0^R \Sigma_t\left(\vec{r} - R'\vec{\Omega}\right)dR'\right)}{4\pi|\vec{r}' - \vec{r}|^2}$$

називають ядром точкового джерела.

Величину $\tau = \int_0^R \Sigma_t(\vec{r} - R'\vec{\Omega})dR'$ називають оптичною товщиною.

Зазвичай точний розв'язок рівняння Пайєрлса надзвичайно складний.

Покажемо, що воно переходить в рівняння дифузії при певних умовах:

1) потік нейтронів мало змінюється на довжині вільного пробігу $\lambda|\nabla\Phi| \ll \Phi$

2) об'ємна швидкість генерації нейтронів мало залежить від координат

3) середовище досить велике, щоб вважати його необмеженим і слабо поглинаюче, тобто $\Sigma_a \ll \Sigma_s$.

У випадку майже нескінченного, майже однорідного середовища $D\Delta\Phi \approx 0$.

Тоді з рівняння дифузії $S \approx \Sigma_a\Phi = \Sigma_a/\Sigma_s \cdot \Sigma_s\Phi \ll \Sigma_s\Phi$.

Розкладемо функції $\Phi(\vec{r}')$ та $S(\vec{r}')$ в ряд Тейлора навколо точки $\vec{r}$ та обмежимося в першому випадку чотирма членами, а в другому – двома, зважаючи на одержане вище співвідношення між генерацією та розсіянням нейтронів:

$$\Phi(\vec{r}') = \Phi(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\left[\nabla^i \Phi(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r})^i\right]}{i!}$$

$$S(\vec{r}') = S(\vec{r}) + \nabla S(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r})$$

Зважаючи, що

$$\nabla f(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) = |\nabla f(\vec{r})| R \cos\theta\,, \qquad \text{де } R = |\vec{r}' - \vec{r}|$$

а інтеграли виду

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1}\theta \sin\theta \; d\theta = \int_{-1}^{1} x^{2n+1} dx = 0$$

тобто члени розкладу з похідними непарного порядку обертаються на нуль, маємо

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} dR \int_0^{2\pi} Rd\varphi \int_0^{\pi} R\sin\theta \; d\theta \; \left\{\frac{\exp(-\Sigma_t R)}{R^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\Sigma_s\left(\Phi(\vec{r}) + \frac{1}{2}\Delta\Phi(\vec{r})R^2\cos^2\theta\right) + S(\vec{r})\right]\right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi}\int_0^{\infty} dR\exp(-\Sigma_t R)\int_0^{\pi}\left[\Sigma_s\left(\Phi(\vec{r}) + \frac{1}{2}\Delta\Phi(\vec{r})R^2\cos^2\theta\right) + S(\vec{r})\right]\sin\theta \; d\theta \; =$$

$$= \int_0^{\infty} dR\exp(-\Sigma_t R)\left[\Sigma_s\Phi(\vec{r}) + \frac{\Sigma_s}{6}\Delta\Phi(\vec{r})R^2 + S(\vec{r})\right] =$$

$$\left|\text{зробимо заміну } \xi = \Sigma_t R, \quad \text{тоді } R = \frac{\xi}{\Sigma_t}, \qquad dR = \frac{d\xi}{\Sigma_t}\right|$$

$$= \frac{\Sigma_s\Phi(\vec{r}) + S(\vec{r})}{\Sigma_t}\int_0^{\infty} e^{-\xi}d\xi + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_t^3}\Delta\Phi(\vec{r})\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi}d\xi =$$

$$= \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\Phi(\vec{r}) + \frac{S(\vec{r})}{\Sigma_t} + \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^3}\Delta\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})$$

$$\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\Delta\Phi(\vec{r}) + \Sigma_s\Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = \Sigma_t\Phi(\vec{r})$$

Враховуючи, що $\Sigma_t = \Sigma_s + \Sigma_a$, одержуємо рівняння дифузії

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a\Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$$

де $D = \Sigma_s/3\Sigma_t^2 \approx 1/3\Sigma_s$