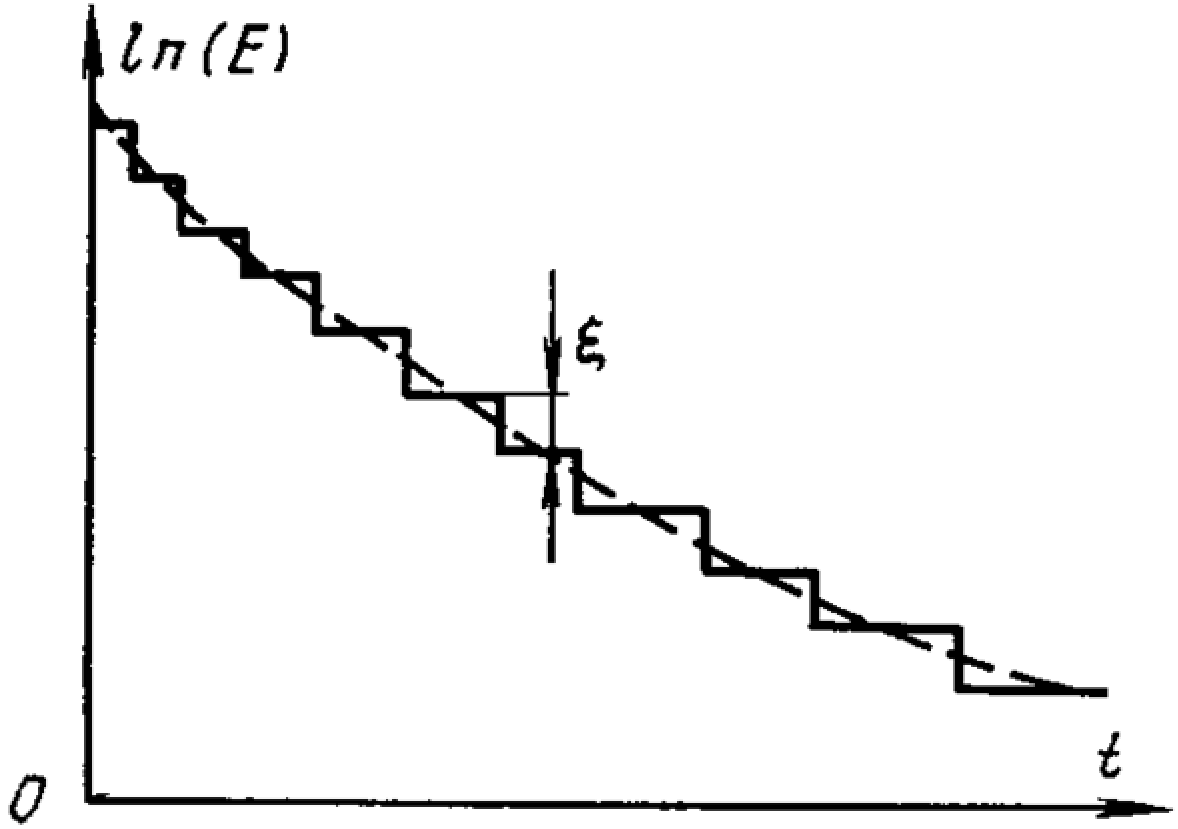
Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 11.

ВІКОВА ТЕОРІЯ (ч.1)

- **МОДЕЛЬ НЕПЕРЕРВНОГО СПОВІЛЬНЕННЯ. ВІКОВЕ РІВНЯННЯ.**
- **РОЗВ'ЯЗКИ ВІКОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ РІЗНИХ ДЖЕРЕЛ НЕЙТРОНІВ**

МОДЕЛЬ НЕПЕРЕРВНОГО СПОВІЛЬНЕННЯ



$$\xi \approx \frac{2}{A + 2/3}$$

Чим більше масове число **A** сповільнювача,

тим ближче залежність до плавної штрихової кривої

Згадаємо, що після k зіткнень

$$E_k = E_0 e^{-k\xi} = E_0 e^{-u}$$

Середнє число зіткнень нейтрона за час dt становить

$$\frac{v\,dt}{\lambda_s},$$

де v – середня швидкість нейтрона, $\lambda_s = 1/\Sigma_s$ – середній пробіг нейтрона між двома зіткненнями. Тоді зміна летаргії за час dt становить

$$du = \xi \frac{v\,dt}{\lambda_s}, \qquad \frac{du}{dt} = \xi \frac{v}{\lambda_s} = \xi v \Sigma_s$$

Розглянемо нестаціонарне рівняння дифузії при умові відсутності поглинання та генерації нейтронів:

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \nabla[D\nabla\Phi(\boldsymbol{r},t)] = Dv\,\Delta n(\boldsymbol{r},t)$$

Використовуючи зв’язок летаргії з часом, перейдемо від залежності $n(\boldsymbol{r}, t)$ до $n(\boldsymbol{r}, u)$. Оскільки $n(\boldsymbol{r}, t)dt = n(\boldsymbol{r}, u)du$, то

$$n(\boldsymbol{r}, t) = n(\boldsymbol{r}, u)\frac{du}{dt} = n(\boldsymbol{r}, u)\ \xi v \Sigma_s$$

Використовуючи формальну тотожність

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial n(\boldsymbol{r}, t)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}[\xi v \Sigma_s\, n(\boldsymbol{r}, u)] \cdot \xi v \Sigma_s$$

Підставляючи в рівняння дифузії

$$\frac{\partial}{\partial u}[\xi v \Sigma_s\, n(\boldsymbol{r}, u)] \cdot \xi v \Sigma_s = Dv\ \Delta[n(\boldsymbol{r}, u)\ \xi v \Sigma_s]$$

або

$$\frac{\partial}{\partial u}[\xi\Sigma_s\,\Phi(\boldsymbol{r},u)]\cdot\xi\Sigma_s = D\,\Delta[\xi\Sigma_s\,\Phi(\boldsymbol{r},u)]$$

Величина в квадратних скобках є густина сповільнення $q(\boldsymbol{r},u)$.

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r},u)}{\partial u}\cdot\frac{\xi\Sigma_s}{D} = \Delta q(\boldsymbol{r},u)$$

Введемо замість летаргії нову змінну, яку назвемо ***віком нейтронів***:

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D}{\xi\Sigma_s}du$$

$$d\tau = \frac{D}{\xi\Sigma_s}du, \qquad \frac{du}{d\tau} = \frac{\xi\Sigma_s}{D}$$

Рівняння дифузії перетворюється ***вікове рівняння***:

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r},\tau)}{\partial \tau} = \Delta q(\boldsymbol{r},\tau)$$

Якщо маємо середовище з моноенергетичними джерелами нейтронів, то рівняння має вигляд

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r},\tau)}{\partial \tau} = \Delta q(\boldsymbol{r},\tau) + S(\boldsymbol{r})\delta(\tau)$$

де $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака, що має нескінченне значення в точці 0, і нульове в усіх інших точках. Крім того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

і для будь-якої функції $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

РОЗВ’ЯЗОК ВІКОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО ДЖЕРЕЛА

Нехай маємо джерело в площині $x = 0$, що випромінює S нейтронів в секунду з одиниці поверхні. Тоді вікове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial q(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 q(x,\tau)}{\partial x^2} + S\delta(x)\delta(\tau)$$

Шукатимемо скінченні розв’язки, які на нескінченності обертаються в 0.

Скористаємось перетворенням Фур’є:

$$f(\omega,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x,\tau)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

Обернене перетворення Фур’є має вигляд

$$q(x,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega,\tau)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Тоді для Фур'є-образа вікове рівняння матиме вигляд

$$\frac{\partial f(\omega,\tau)}{\partial \tau} + \omega^2 f(\omega,\tau) = S\delta(\tau)$$

При $\tau > 0$ воно має розв'язок $f(\omega,\tau) = Se^{-\omega^2\tau}$.

Виконаємо обернене перетворення Фур'є:

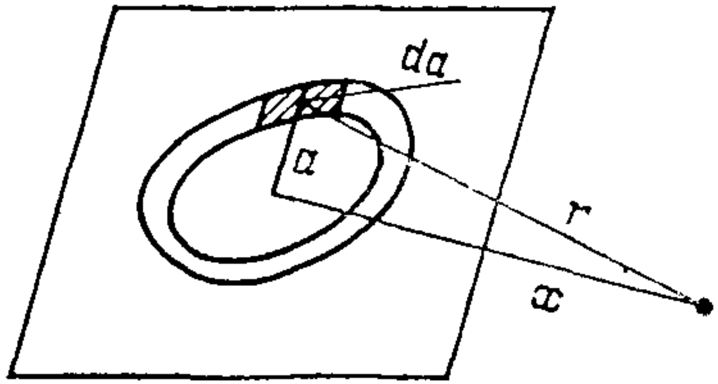
$$q(x,\tau) = \frac{S}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2\tau}\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{S}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\omega^2\tau - i\omega x - \frac{x^2}{4\tau}\right) - \frac{x^2}{4\tau}}\, d\omega =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \omega\sqrt{\tau} - \dfrac{ix}{2\sqrt{\tau}} \\ d\omega = \dfrac{du}{\sqrt{\tau}} \end{matrix} \right| = \frac{S}{2\pi\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{S}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$$

РОЗВ'ЯЗОК ВІКОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА

Нехай маємо точкове джерело, що випромінює щосекунди *S* нейтронів.

Уявимо собі розв'язок для плоского джерела як інтеграл по площині від точкових джерел:



$$q_{\text{п}}(x,\tau) = \int_0^{\infty} q_{\text{т}}(r,\tau) 2\pi a \, da$$

Оскільки $a^2 + x^2 = r^2$, то $a\,da = r\,dr$.

$$q_{\text{п}}(x,\tau) = 2\pi \int_x^{\infty} q_{\text{т}}(r,\tau) r \, dr$$

Продиференцюємо по x:

$$\frac{\partial q_{\text{п}}(x,\tau)}{\partial x} = -2\pi q_{\text{т}}(x,\tau) x$$

$$q_{\text{т}}(x,\tau) = \frac{-1}{2\pi x} \frac{S}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \frac{-2x}{4\tau} = \frac{S}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$$

$$q_{\text{т}}(\boldsymbol{r},\tau) = \frac{S}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{|\boldsymbol{r}|^2}{4\tau}}$$

РОЗВ'ЯЗОК ВІКОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДЖЕРЕЛА

Нехай маємо джерело у вигляді вертикальної нитки в початку координат що випромінює S нейтронів щосекунди з одиниці довжини. На відстані x від нитки густина сповільнення визначатиметься інтегралом по z від точкових джерел, розміщених на нитці:

$$q_{\text{л}}(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q_{\text{т}}(r,\tau)\,dz = \frac{S}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4\tau}}\,dz = \frac{S}{4\pi\tau} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$$