Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 13.

КРИТИЧНІ РОЗМІРИ РЕАКТОРА (ч.1)

- РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТЕРІАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА РЕАКТОРА
- УМОВА КРИТИЧНОСТІ РЕАКТОРА В ДИФУЗІЙНО-ВІКОВОМУ НАБЛИЖЕННІ
- ІМОВІРНІСТЬ УНИКНУТИ ВИТОКУ НЕЙТРОНІВ ПРИ СПОВІЛЬНЕННІ ТА ДИФУЗІЇ
- ОДНОГРУПОВЕ НАБЛИЖЕННЯ

РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТЕРІАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА РЕАКТОРА В ДИФУЗІЙНО-ВІКОВОМУ НАБЛИЖЕННІ

Розглянемо однорідну активну зону реактора без відбивача. В такому реакторі нейтрони, що вилетіли за межі АЗ, не повертаються назад, отже енергетичний спектр нейтронів однаковий у всій АЗ. Отже змінні $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{E}$, що входять в розподіл потоку $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{E})$, розділяються.

Розділимо нейтрони на дві групи:

1) швидкі нейтрони, що сповільнюються, з енергією $\boldsymbol{E}_{\text{гр}} < \boldsymbol{E} < \boldsymbol{E}_{\mathbf{0}}$;
2) теплові нейтрони з енергією $\boldsymbol{E} < \boldsymbol{E}_{\text{гр}}$.

Припустимо також, що швидкі нейтрони не поглинаються при сповільненні, а все поглинання є резонансним і відбувається при $\boldsymbol{E}_{\text{гр}}$, при цьому густина сповільнення змінюється стрибком у $\boldsymbol{\varphi}$ раз.

Таким чином, нейтрони, що сповільнюються, описуються віковим рівнянням

$$\Delta q(\boldsymbol{r}, \tau) = \frac{\partial q(\boldsymbol{r}, \tau)}{\partial \tau},$$

а теплові нейтрони – рівнянням дифузії

$$D\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r}) + \varphi \cdot q(\boldsymbol{r}, \tau_{\text{т}}) = 0,$$

де третій член відповідає нейтронам, що сповільнились від швидких до теплових та уникнули резонансного захоплення.

Визначимо початкове значення $q(\boldsymbol{r}, \tau)$ при $\tau = 0$. Згідно з визначенням віку

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D}{\xi\Sigma_S}\frac{dE'}{E'}, \qquad \tau(E_0) = 0,$$

тобто $q(\boldsymbol{r}, 0)$ є швидкість генерації швидких нейтронів за рахунок поділу.

Кількість теплових нейтронів, захоплених в одиниці об'єму за одиницю часу, становить $\Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})$. З них паливом буде захоплено $\Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})\cdot\theta$, в результаті поділу утвориться $\Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})\cdot\theta\cdot\eta$ швидких нейтронів, деякі з них спричинять поділ урану-238, і загальна кількість швидких нейтронів з енергією $\boldsymbol{E_0}$:

$$q(\boldsymbol{r}, 0) = \Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})\cdot\theta\cdot\eta\cdot\varepsilon = \Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})\cdot K_\infty/\varphi.$$

Оскільки ми припустили, що змінні $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{E}$, що входять в розподіл $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{E})$, розділяються, то й змінні $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{\tau}$, що входять в розподіл $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})$, теж розділяються (оскільки вік напряму пов'язаний з енергією), тобто

$$q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau}) = \Phi(\boldsymbol{r})X(\tau).$$

Розділивши обидві частини вікового рівняння на $q(\boldsymbol{r},\tau)$, одержимо рівняння, в якому ліва частина залежить лише від координат, а права лише від віку, тому обидві вони рівні деякій константі:

$$\frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{r})}{\Phi(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{X(\tau)}\frac{dX(\tau)}{d\tau} = -\varkappa^2.$$

В результаті маємо два рівняння

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + \varkappa^2\Phi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\tau)}\frac{d\mathrm{X}(\tau)}{d\tau} = -\varkappa^2.$$

Проінтегрувавши друге, одержуємо

$$X(\mathrm{\tau}) = X(0)\exp(-\varkappa^2\mathrm{\tau}) = \frac{K_\infty}{\varphi}\Sigma_a \exp(-\varkappa^2\mathrm{\tau}),$$

$$q(\boldsymbol{r},\mathrm{\tau}) = \frac{K_\infty}{\varphi}\Sigma_a \Phi(\boldsymbol{r})\exp(-\varkappa^2\mathrm{\tau}).$$

Із зменшенням енергії (зростанням віку) густина сповільнення може лише спадати, тому зрозуміло, чому ми обрали чітко від’ємну константу “$-\boldsymbol{\varkappa}^2$”.

Підставивши значення $q(\boldsymbol{r},\tau_{\text{т}})$ в рівняння дифузії для теплових нейтронів,

$$D\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r}) + K_\infty\Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r})\exp(-\varkappa^2\tau_\text{т}) = 0,$$

розділивши на D та, врахувавши визначення довжини дифузії $L^2 = D/\Sigma_a$,

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + \frac{K_\infty\exp(-\varkappa^2\tau_\text{т}) - 1}{L_\text{т}^2}\Phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

З іншого боку, маємо

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + \varkappa^2\Phi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$, маємо

$$\varkappa^2 = \frac{K_\infty\exp(-\varkappa^2\tau_\text{т}) - 1}{L_\text{т}^2}.$$

Це рівняння називають рівнянням для матеріального параметра в дифузійно-віковому наближенні, а сам параметр $\boldsymbol{\varkappa}$ – ***матеріальним параметром***, оскільки він залежить лише від характеристик середовища активної зони, а не від її форми чи розмірів.

УМОВА КРИТИЧНОСТІ РЕАКТОРА В ДИФУЗІЙНО-ВІКОВОМУ НАБЛИЖЕННІ

Розглянемо нестаціонарне рівняння дифузії

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\boldsymbol{r},t) - \Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r},t) + S(\boldsymbol{r},t),$$

або ж, враховуючи, що $\Phi = nv$, та розділивши на D,

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r},t) + \varkappa^2\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{vD}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

Розділимо змінні $\boldsymbol{r}$ і t: $\Phi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})\chi(t)$, і поділимо рівняння на $\Phi(\boldsymbol{r},t)$:

$$\frac{\Delta\psi(\boldsymbol{r})}{\psi(\boldsymbol{r})} + \varkappa^2 = \frac{1}{vD\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt}$$

Обидві частини залежать лише від однієї змінної, тому можна прирівняти їх деякій константі, для зручності оберемо її у вигляді ω/vD. Тоді маємо два рівняння

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r}) + B^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad B^2 = \varkappa^2 - \omega/vD$$

$$\frac{1}{\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt} = \omega$$

Інтегрування другого рівняння дає

$$\chi(t) = \chi(0)\exp(\omega t)$$

Розв'язок же першого рівняння має задовольняти умові

$\psi(\boldsymbol{R}) = 0$, де $\boldsymbol{R}$ – ектрапольована границя активної зони реактора.

За такої умови розв'язок першого рівняння існує не для будь-якого B^2, а лише для певних ***власних чисел*** B_n^2, яким відповідають ***власні функції*** $\psi_n(\boldsymbol{r})$. Ці власні числа і власні функції визначаються геометрією АЗ. Для зручності впорядкуємо власні числа у зростаючій послідовності:

$0 \le B_0^2 < B_1^2 < \cdots < B_n^2 < \cdots$, тобто B_0^2 – найменше власне число.

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(\boldsymbol{r}) \exp(\omega_n t)$$

де A_n – деякі довільні коефіцієнти, $\omega_n = (\varkappa^2 - B_n^2) v D$.

Розглянемо випадки:

1) $B_0^2 > \varkappa^2$ (а отже і всі $B_n^2 > \varkappa^2$), тоді всі $\omega_n < 0$, $\exp(\omega_n t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $\Phi(\boldsymbol{r}, t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ – реактор в підкритичному стані;
2) при деякому m для всіх $n \le m$ $B_n^2 < \varkappa^2$, тоді для цих n всі $\omega_n > 0$, $\exp(\omega_n t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, $\Phi(\boldsymbol{r}, t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$– реактор в надкритичному стані;
3) $B_0^2 = \varkappa^2$, тоді $\omega_0 = 0$, а для всіх $n > 0$ $B_n^2 > \varkappa^2$, $\omega_n < 0$, отже

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = A_0\psi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(\boldsymbol{r})\exp(\omega_n t) \xrightarrow[t\to\infty]{} A_0\psi_0(\boldsymbol{r})$$

стабільний ненульовий розв'язок, який відповідає реактору в критичному стані.

Надалі опустимо індекс «0», а параметр ***B*** будемо називати ***геометричним параметром***, оскільки він визначається граничними умовами для реактора з конкретною формою АЗ.

Таким чином, умовою критичності реактора є рівність його матеріального ($\varkappa$) та геометричного (B) параметрів.

Досягти цієї умови можна двома способами. Або ж для певної композиції АЗ розрахувати її форму та розміри, або ж, навпаки, знаючи форму та розміри АЗ, підібрати відповідні параметри паливної композиції. На практиці, як правило, вирішується друга задача.

ІМОВІРНІСТЬ УНИКНУТИ ВИТОКУ НЕЙТРОНІВ ПРИ СПОВІЛЬНЕННІ ТА ДИФУЗІЇ

Підставивши в рівняння для матеріального параметра для реактора в критичному стані B замість $\varkappa$, одержимо умову критичності

$$B^2 = \frac{K_\infty \exp(-B^2 \tau_\text{т}) - 1}{L_\text{т}^2},$$

або ж

$$\frac{K_\infty \exp(-B^2 \tau_\text{т})}{1 + B^2 L_\text{т}^2} = 1$$

В критичному стані $K_\text{еф} = 1$ і $K_\text{еф} = K_\infty P_\text{сп} P_\text{диф}$, де $P_\text{сп}$ і $P_\text{диф}$ – імовірність уникнути витоку нейтронів при сповільненні і дифузії, відповідно. Отже,

$$P_\text{сп} P_\text{диф} = \frac{\exp(-B^2 \tau_\text{т})}{1 + B^2 L_\text{т}^2}$$

Згадаємо, що для швидких нейтронів $q(\boldsymbol{r}, \tau) = q(\boldsymbol{r}, 0) \exp(-B^2 \tau)$.

Оскільки ми припустили, що швидкі нейтрони при сповільненні не поглинаються, їх втрата може бути пов’язана лише з витоком

Отже, $P_{\text{сп}} = \exp(-B^2\tau_{\text{т}})$

Для теплових нейтронів, з урахуванням

$$D\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r}) + \varphi \cdot q(\boldsymbol{r}, \tau_{\text{т}}) = 0,$$

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + B^2\Phi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

можна записати

$$DB^2\Phi(\boldsymbol{r}) + \Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r}) = \varphi \cdot q(\boldsymbol{r}, \tau_{\text{т}}),$$

де в лівій частині перший член відповідає за дифузію нейтронів (тобто їх витік), а другий за поглинання. Тоді ймовірність уникнути витоку при дифузії є відношення кількості поглинутих нейтронів до суми поглинутих та тих, що вилетіли:

$$P_{\text{диф}} = \frac{\Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r})}{\Sigma_a\Phi(\boldsymbol{r}) + DB^2\Phi(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{1 + B^2L_{\text{т}}^2}$$

ОДНОГРУПОВЕ НАБЛИЖЕННЯ

В одногруповому наближенні у випадку достатньо великого реактора $B^2 \ll 1$, тоді $\exp(B^2\tau_т) \approx 1 + B^2\tau_т$, і

$$P = P_{сп}P_{диф} = \frac{1}{\exp(B^2\tau_т)\,(1 + B^2L_т^2)} \approx \frac{1}{(1 + B^2\tau_т)(1 + B^2L_т^2)} \approx$$

$$\approx \frac{1}{1 + B^2(\tau_т + L_т^2)} = \frac{1}{1 + B^2M^2}$$

де $M^2 = \tau_т + L_т^2$, – площа міграції, а M – довжина міграції.

Тоді умова критичності в одногруповому наближенні має вигляд

$$K_{еф} = \frac{K_\infty}{1 + B^2M^2} = 1,$$

або ж

$$B^2 = \frac{K_\infty - 1}{M^2}$$