Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 14.

КРИТИЧНІ РОЗМІРИ РЕАКТОРА (ч.2)

РОЗВ’ЯЗОК РІВНЯННЯ РЕАКТОРА ДЛЯ:

- СФЕРИЧНОЇ АЗ;
- ЦИЛІНДРИЧНОЇ АЗ;
- ПРЯМОКУТНОЇ АЗ

КОЕФІЦІЄНТ НЕРІВНОМІРНОСТІ ПОТОКУ НЕЙТРОНІВ

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ РЕАКТОРА ДЛЯ СФЕРИЧНОЇ АЗ

Розглянемо однорідну активну зону (АЗ) реактора сферичної форми радіусом $R_{АЗ}$. В такій АЗ розподіл нейтронів є ізотропним відносно центра зони. Виходячи з симетрії задачі, доцільно використати сферичну систему координат (r,θ,φ), в якій потік нейтронів буде залежати лише від радіуса r, але не від кутів (θ,φ).

Тоді рівняння реактора

$$\Delta\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) + B^2\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

з тривимірного перетворюється на одновимірне

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\Phi(r)] + B^2\Phi(r) = 0,$$

де перший член є радіальною складовою оператора Лапласа у сферичних координатах.

Помножимо все рівняння на r:

$$\frac{d^2}{dr^2}[r\Phi(r)] + B^2 r\Phi(r) = 0,$$

Напрошується очевидна заміна $r\Phi(r)=\psi(r)$, після якої маємо класичне рівняння для гармонічних коливань

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + B^2\psi(r) = 0,$$

розв'язки якого

$$\psi_1(r) = \sin(Br), \qquad \psi_2(r) = \cos(Br),$$

або ж, переходячи до загального розв'язку для потоку $\Phi(r)$,

$$\Phi(r) = A\frac{\sin(Br)}{Br} + C\frac{\cos(Br)}{Br},$$

де A, C – сталі інтегрування, які визначаються з граничних умов.

Граничні умови:

1) $\Phi(r)<\infty$, тобто потік має бути скінченний в усьому просторі;
2) $\Phi(R)=0$, де $R=R_{\text{АЗ}}+d_{\text{ex}}$, тобто потік нейтронів має зникати на деякій відстані поза активною зоною.

Застосуємо умову (1) у випадку $r\to 0$.

$$\Phi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} A\frac{\sin(Br) \to 0}{Br \to 0} + C\frac{\cos(Br) \to 1}{Br \to 0} \xrightarrow[r\to 0]{} A\frac{0}{0} + C\frac{1}{0},$$

тобто другий член прямує до нескінченності, тому треба покласти $C = 0$.

Перший член містить невизначеність типу $0/0$, яку легко розкрити за допомогою правила Лопіталя,

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{\sin(Br)}{Br}\right) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{B\cos(Br)}{B}\right) = 1,$$

тобто є скінченним.

Застосуємо другу граничну умову:

$$\Phi(R) = 0, \qquad \text{або } \sin(BR) = 0, \qquad \text{звідки } BR = \pi n.$$

Найменше ненульове значення B буде при $n = 1$. Отже, $B = \pi/R$.

Тоді розподіл потоку

$$\Phi(r) = \Phi_0 \frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R}$$

а мінімальний критичний об'єм реактора

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{130}{B^3}$$

Сталу Φ_0, або ж потік в центрі АЗ, можна знайти, знаючи потужність реактора Q. Потужність, що виділяється в одиниці об’єму АЗ, складає $E_f \Sigma_f \Phi$, тобто добуток енергії одного поділу на швидкість реакції поділу. Повна потужність є інтеграл від цієї величини по всьому об’єму АЗ:

$$Q=\int E_f\Sigma_f\Phi dV=E_f\sigma_f N_f\Phi_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int\limits_0^{R}\frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R}r^2dr=$$

$$=\left|\begin{matrix}\pi r/R=x\\ r=x\ \ R/\pi\\ dr=dx\ \ R/\pi\end{matrix}\right|=E_f\sigma_f N_f\Phi_0\ 4\pi(R/\pi)^3\int\limits_0^{\pi}x\sin(x)\,dx$$

Інтеграл візьмемо по частинах за правилом:

$$uv=\int d(uv)=\int(udv+vdu)\,,\qquad \text{звідки}\ \int udv=uv-\int vdu$$

$$\int\limits_0^{\pi}x\sin(x)\,dx=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\sin(x)\,dx\\ du=dx\\ v=-\cos(x)\end{matrix}\right|=-x\cos(x)|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos(x)\,dx=\pi$$

Отже, $Q=\Phi_0\,E_f\sigma_f N_f\ 4\,R^3/\pi$, де E_f,σ_f,N_f – відповідно енергія одного поділу, мікропереріз реакції поділу та концентрація подільного елемента.

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ РЕАКТОРА ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ АЗ

Маємо АЗ у вигляді циліндра радіусом R і висотою H. Початок координат оберемо в центрі циліндра. Рівняння реактора в циліндричній СК має вигляд

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+B^2\Phi=0.$$

Граничні умови:

1) $\Phi(r,z)<\infty$,
2) $\Phi(R,z)=0, \quad \Phi(r,\pm H/2)=0.$

Припустивши, що для однорідного середовища АЗ змінні розділяються, запишемо

$$\Phi(r,z)=\psi(r)\chi(z)$$

Підставивши в рівняння $\Phi(r,z)$ в такому вигляді і розділивши все рівняння на нього, одержимо

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)+\frac{1}{\chi(z)}\frac{d^2\chi}{dz^2}=-B^2.$$

Оскільки кожен з членів рівняння залежить лише від одної координати, можна покласти

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)=-\alpha^2,$$

$$\frac{1}{\chi(z)}\frac{d^2\chi}{dz^2}=-\beta^2,$$

$$B^2=\alpha^2+\beta^2$$

Таким чином, маємо два рівняння – для радіальної та вертикальної складової потоку:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \alpha^2\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\chi}{dz^2} + \beta^2\chi = 0$$

Домноживши перше на r^2 та ввівши заміну $x = \alpha r$, одержимо класичне рівняння Бесселя нульового порядку:

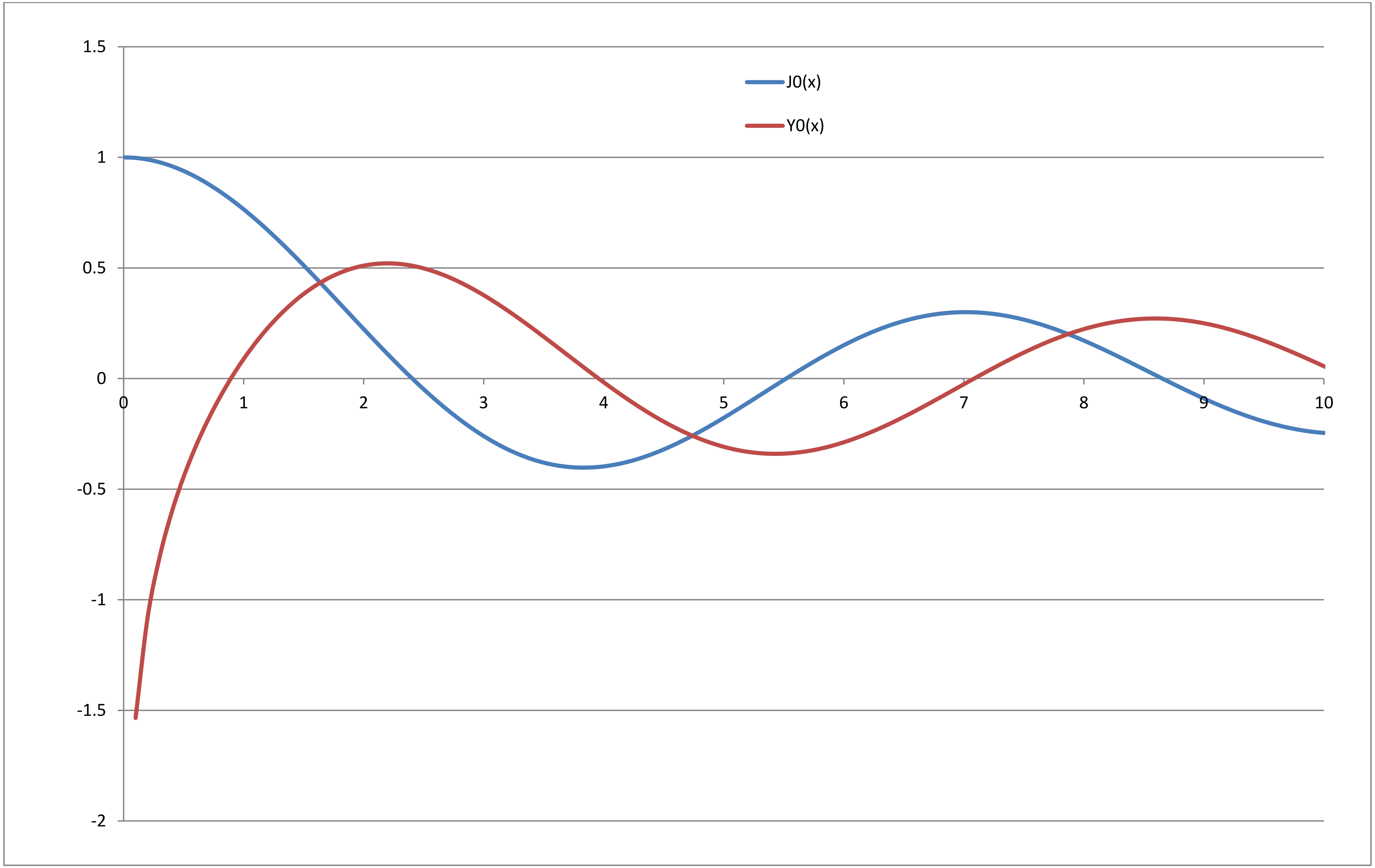
$$x^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + x\frac{d\psi}{dx} + x^2\psi = 0,$$

розв’язком якого є лінійна комбінація функцій Бесселя першого та другого роду нульового порядку:

$$\psi(x) = A_r J_0(x) + C_r Y_0(x),$$

$$\psi(r) = A_r J_0(\alpha r) + C_r Y_0(\alpha r)$$

Графіки цих функцій мають вигляд



Очевидно, для скінченності потоку потрібно покласти $C_r = 0$, оскільки при $r \to 0$ $Y_0 \to -\infty$.

Друга гранична умова $\psi(R)=0$, тобто $J_0(\alpha R)=0$. Найменше значення аргументу функції, при якому вона перетинає вісь абсцис, складає $x_0 \approx 2{,}4048$. Отже,

$$\alpha R = x_0, \qquad \alpha = \frac{x_0}{R}$$

Друге рівняння має розв'язком

$$\chi(z) = A_z \sin(\beta z) + C_z \cos(\beta z)$$

Ця функція скінченна всюди, але другій граничній умові $\chi(\pm H/2)=0$ задовольняє лише парна функція косинус, тобто $A_z = 0$. А для другого члена маємо умову

$$\cos(\pm\beta H/2)=0, \text{ тобто } \beta H/2=\pi(n+1/2)$$

Обираємо мінімальне значення при $n = 0$: $\beta=\pi/H$, тоді геометричний параметр

$$B^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

а потік в циліндричній АЗ

$$\Phi(r, z) = \Phi_0 J_0\left(\frac{x_0 r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

Для допитливих (begin)

Може виникнути питання: чому обидві складових рівняння реактора для циліндричної АЗ (по радіусу та по висоті) прирівнюються завідомо від'ємним константам $-\alpha^2$ та $-\beta^2$?

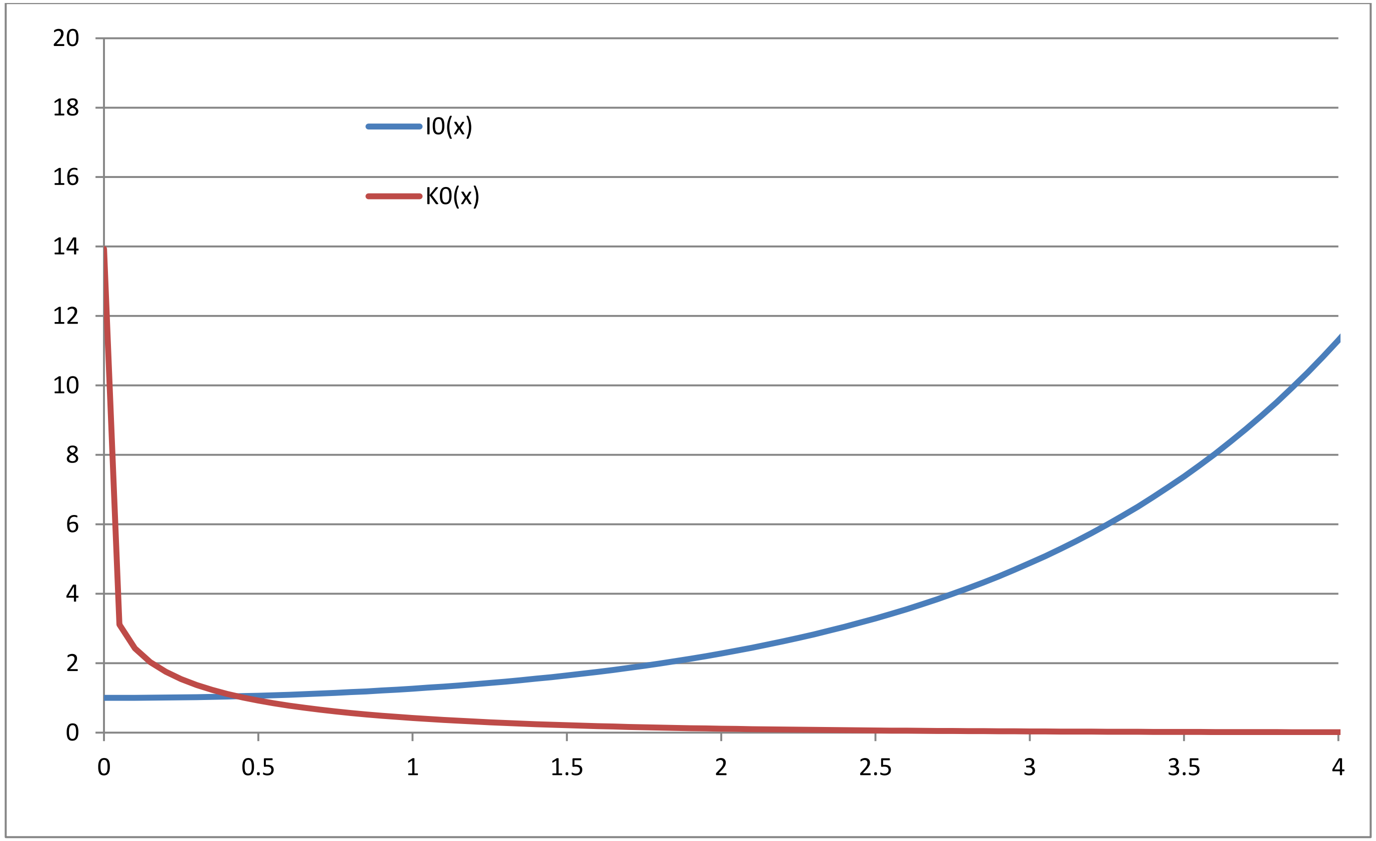
Адже можна було б обрати для одної з них додатну константу, наприклад

1) α^2 та $-\beta^2$, при цьому може виконуватись умова $B^2 = -\alpha^2 + \beta^2 > 0$,
2) або ж $-\alpha^2$ та β^2, $B^2 = \alpha^2 - \beta^2 > 0$

У першому випадку для радіальної частини маємо рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \alpha^2\psi = 0,$$

розв'язком якого є модифіковані функції Бесселя I_0 та K_0, які мають вигляд:



Обидві функції не можуть бути розв'язком для циліндричної АЗ, оскільки K_0 необмежена при $r \to 0$, тому її доведеться відкинути, а I_0 зростає і не може обернутися в нуль на екстрапольованій границі.

У другому ж випадку маємо рівняння по z,

$$\frac{d^2\chi}{dz^2} - \beta^2\chi = 0,$$

розв'язком якого є експоненти з додатним та від'ємним показниками, або ж гіперболічні синус та косинус, які не можуть задовольнити умову $\chi(\pm H/2)=0$, оскільки sinh є функцією непарною, а cosh не досягає нульового значення ні при якому аргументі.

Отже, для обох складових треба обирати від'ємні константи.

Для допитливих (end)

Маємо рівняння для геометричного параметра циліндричної АЗ та її об’єму:

$$B^2 = \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \qquad V = \pi R^2 H$$

В обидва рівняння входять радіус R та висота H циліндричної АЗ.

Спробуємо знайти оптимальне співвідношення радіуса та висоти, яке забезпечує критичність реактора з циліндричною АЗ. Для цього виразимо R^2 з першого рівняння

$$\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 = B^2 - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \qquad R^2 = \frac{x_0^2}{B^2 - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2} = \frac{x_0^2 H^2}{B^2 H^2 - \pi^2}$$

та підставимо його в друге

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi x_0^2 H^3}{B^2 H^2 - \pi^2}$$

Як бачимо, тепер об’єм АЗ залежить тільки від однієї змінної H.

Щоб знайти мінімальний об’єм, знайдемо його похідну по висоті та прирівняємо її 0:

$$\frac{dV}{dH} = \pi x_0^2 \frac{3H^2(B^2H^2 - \pi^2) - 2B^2H^4}{(B^2H^2 - \pi^2)^2} = \frac{\pi x_0^2 H^2}{(B^2H^2 - \pi^2)^2}(B^2H^2 - 3\pi^2) = 0$$

звідки

$$H_{min}^2 = 3\pi^2/B^2\,, \qquad H_{min} = \pi\sqrt{3}/B$$

$$R_{min}^2 = \frac{x_0^2\, 3\pi^2/B^2}{B^2\, 3\pi^2/B^2 - \pi^2} = \frac{3}{2}\frac{x_0^2}{B^2}, \qquad R_{min} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x_0}{B}$$

При оптимальних параметрах R_{min}, H_{min} мінімальний критичний об’єм циліндричної АЗ становить

$$V_{min} \approx \frac{148}{B^3}$$

РОЗВ’ЯЗОК РІВНЯННЯ РЕАКТОРА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ АЗ

Маємо паралелепіпед зі сторонами a, b, c.

В ПДСК рівняння реактора має вигляд

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+B^2\Phi=0.$$

Розділяючи змінні, та застосувавши граничні умови подібно до того, як це робилося для вертикальної складової циліндричного реактора, маємо

$$\Phi(x,y,z)=\Phi_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

$$B^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{c}\right)^2$$

Мінімальний об’єм досягається при $a=b=c=\pi\sqrt{3}/B$ (куб). Тоді

$$V_{min}=a^3\approx\frac{161}{B^3}$$

КОЕФІЦІЄНТ НЕРІВНОМІРНОСТІ ПОТОКУ НЕЙТРОНІВ

Даний параметр є важливою характеристикою енергетичних реакторів і визначається як відношення максимального і середнього потоків:

$$k = \frac{\Phi_{max}}{\bar{\Phi}}$$

В нашому випадку $\Phi_{max} = \Phi_0$ для всіх форм АЗ.

Для **сферичної АЗ** середній потік

$$\bar{\Phi} = \frac{\int_0^R \Phi_0 \frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R} r^2 dr}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{\Phi_0 R^3/\pi^2}{R^3/3} = \Phi_0\, 3/\pi^2$$

$$k = \frac{\pi^2}{3} \approx 3.29$$

Для **циліндричної АЗ** є нерівномірність потоку по радіусу та по висоті.

Середній потік по радіусу

$$\overline{\Phi_r} = \frac{\int_0^R \Phi_0 J_0\left(\frac{x_0 r}{R}\right) r dr}{\int_0^R r dr} = \frac{2\Phi_0}{R^2}\int\limits_0^R J_0\left(\frac{x_0 r}{R}\right) r dr = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x_0 r}{R} = x \\ r = \dfrac{R}{x_0} x \\ dr = \dfrac{R}{x_0} dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\Phi_0}{x_0^2}\int\limits_0^{x_0} J_0(x) x dx = \left| \begin{array}{c} \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) \\ \int x J_0(x) dx = x J_1(x) \end{array} \right| = \frac{2\Phi_0 J_1(x_0)}{x_0}$$

Нерівномірність по радіусу

$$k_r = \frac{\Phi_0}{\overline{\Phi_r}} = \frac{x_0}{2J_1(x_0)} = \frac{2{,}4048}{2 \cdot 0{,}51915} = 2{,}316$$

Середній потік по висоті

$$\overline{\Phi_z} = \frac{\int_{-H/2}^{H/2} \Phi_0 \cos(\pi z/H)\, dz}{\int_{-H/2}^{H/2} dz} = \left| \begin{matrix} \pi z/H = t \\ dz = dt\, H/\pi \end{matrix} \right| = \Phi_0 \frac{H}{\pi} \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, dt}{H} = \Phi_0 \frac{2}{\pi}$$

Нерівномірність по висоті

$$k_z = \frac{\Phi_0}{\overline{\Phi_z}} = \frac{\pi}{2} = 1{,}571$$

Нерівномірність по об'єму

$$k_V = k_r k_z = \frac{\pi x_0}{4 J_1(x_0)} = 3{,}638$$

Для **прямокутної АЗ** нерівномірність по сторонам і по об'єму, відповідно

$$k_x = k_y = k_z = \frac{\pi}{2} = 1{,}571, \qquad k_V = k_x k_y k_z = 3{,}876$$