Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 05.

СПОВІЛЬНЕННЯ НЕЙТРОНІВ

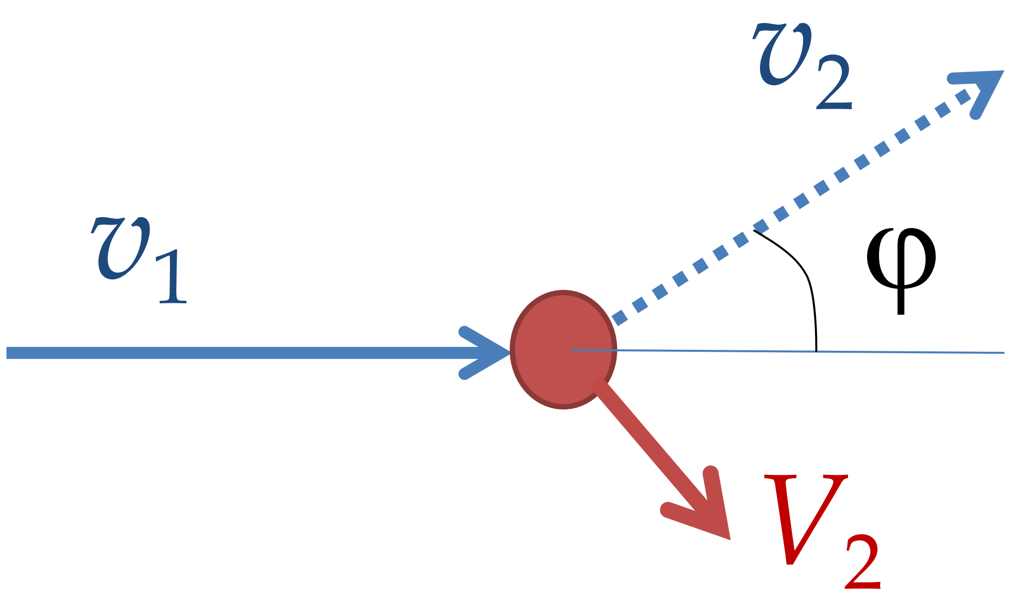
- **ЗМІНА ЕНЕРГІЇ НЕЙТРОНІВ**
- **ІМОВІРНІСТЬ РОЗСІЯННЯ НЕЙТРОНІВ**
- **СЕРЕДНЬОЛОГАРИФМІЧНИЙ ДЕКРЕМЕНТ ЕНЕРГІЇ**
- **СПОВІЛЬНЮВАЛЬНА ЗДАТНІСТЬ, КОЕФІЦІЄНТ УПОВІЛЬНЕННЯ**

ЗМІНА ЕНЕРГІЇ НЕЙТРОНІВ ПРИ ПРУЖНОМУ РОЗСІЯННІ

Зважаючи на відсутність у нейтронів електричного заряду, будемо наближено розглядати процес їх пружного розсіяння, як механічне зіткнення пружних кульок, користуючись законами збереження імпульсу (ЗЗІ) та кінетичної енергії (ЗЗЕ).

Оскільки кінетична енергія більшості нейтронів поділу не перевищує 10 МеВ, а енергія спокою нейтрона складає ~ 10^3 МеВ, ми можемо користуватись класичними, а не релятивістськими виразами для кінетичної енергії та імпульсу нейтронів.

Крім того, оскільки швидкість руху нейтронів (навіть теплових) все-таки значно перевищує швидкість теплового руху ядер, можемо вважати останні нерухомими.



Отже, на нерухоме ядро (**V_1=0**) масою ***A*** (в а.о.м.) налітає нейтрон з швидкістю ***v_1***, пружно розсіюється під кутом **φ** з швидкістю ***v_2***, ядро при цьому набуває швидкості ***V_2***.

Це в лабораторній системі (ЛС), пов'язаній зі спостерігачем.

Розглянемо процес в системі центра мас (СЦМ), координати якого для замкненої системи частинок з масою ***m_i*** та радіус-векторами ***r_i*** визначаються виразом:

$\vec{\rho} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$, або ж в нашому випадку $\vec{\rho} = \frac{\vec{r} + A\vec{R}}{A+1}$

Особливість центра мас у тому, що його швидкість незмінна згідно з законом збереження імпульсу, оскільки система замкнена (тобто на неї не діють зовнішні сили):

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = const$$

а сумарний імпульс системи рівний 0:

$$\vec{p}_c = \sum_j m_j \vec{v}_{cj} = \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{u}) = \sum_j m_j \left(\vec{v}_j - \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \right) =$$

$$= \sum_j m_j \vec{v}_j - \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\sum_j m_j}{\sum_i m_i} = 0$$

В нашому випадку

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1}{A+1}$$

Отже, в системі центра мас маємо:

$$\vec{v}_{1c} = \vec{v}_1 - \vec{u} = \frac{A}{A+1}\vec{v}_1, \qquad \vec{V}_{1c} = 0 - \vec{u} = \frac{-1}{A+1}\vec{v}_1$$

а сумарний імпульс системи, як і очікувалось, рівний 0:

$$\vec{v}_{1c} + A\vec{V}_{1c} = 0$$

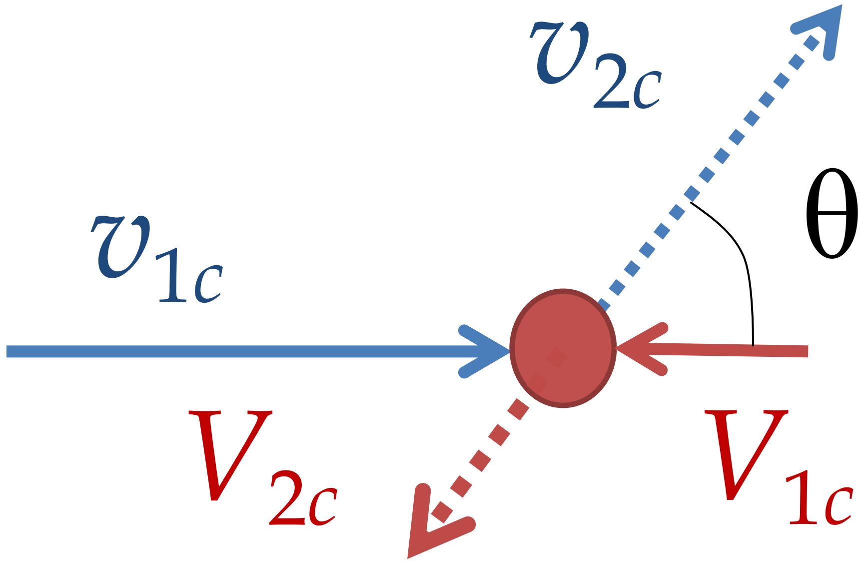
Після розсіяння швидкості нейтрона і ядра в СЦМ, відповідно,

$\boldsymbol{v}_{2c}$ і $\boldsymbol{V}_{2c}$, причому згідно ЗЗІ

$$\vec{v}_{1c} + A\vec{V}_{1c} = \vec{v}_{2c} + A\vec{V}_{2c} = 0$$

звідки

$$\vec{V}_{1c} = -\frac{\vec{v}_{1c}}{A}, \qquad \vec{V}_{2c} = -\frac{\vec{v}_{2c}}{A}$$



тобто в СЦМ вектори швидкості нейтрона і ядра до і після розсіяння лежать на одній прямій і направлені в протилежні сторони, а напрямок їх руху після розсіяння відхиляється на кут θ

Згідно ЗЗЕ сумарна кінетична енергія нейтрона і ядра в СЦМ до і після розсіяння однакова

$$\frac{v_{1c}^2}{2} + \frac{AV_{1c}^2}{2} = \frac{v_{2c}^2}{2} + \frac{AV_{2c}^2}{2}$$

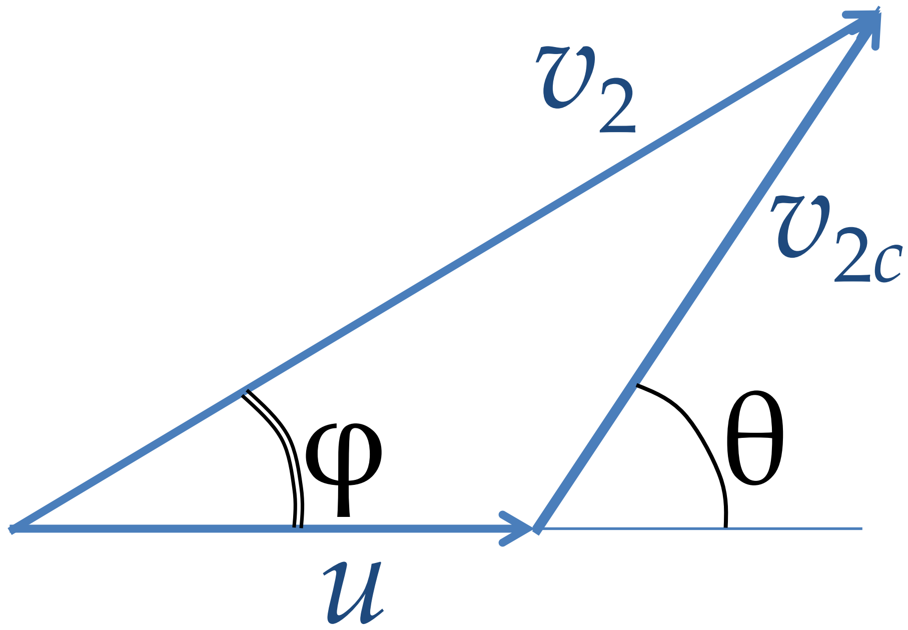
або $\quad v_{1c}^2(1 + 1/A) = v_{2c}^2(1 + 1/A)$

звідки

$$v_{2c} = v_{1c} = \frac{A}{A+1} v_1, \quad V_{2c} = V_{1c} = \frac{1}{A+1} v_1$$

тобто в СЦМ швидкості нейтрона і ядра не змінюються, лише напрям їх руху після пружного розсіяння

Знайдемо швидкість нейтрона після розсіяння в лабораторній системі. За правилом складання векторів маємо:



Згідно теореми косинусів та зваживши, що cos(π – θ) = –cos(θ)

$$v_2^2 = v_{2c}^2 + u^2 + 2v_{2c}u\cos\theta$$

або

$$v_2^2 = \left(\frac{Av_1}{A+1}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{A+1}\right)^2 + \frac{2Av_1^2\cos\theta}{(A+1)^2}$$

Кінетична енергія нейтрона в лабораторній системі до та після розсіяння $\boldsymbol{E_1 = mv_1^2/2}$, $\boldsymbol{E_2 = mv_2^2/2}$, а їх відношення

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

Введемо параметр $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$, тоді

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta}{2}$$

Відносна втрата нейтроном енергії при розсіянні

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{(1-\alpha)(1-\cos\theta)}{2}$$

Очевидно, при $\theta = 0$ (дотичний удар) нейтрон не втрачає енергію, а при $\theta = \pi$ (лобовий удар) втрати максимальні $\boldsymbol{\Delta E / E = (1 - \alpha)}$.

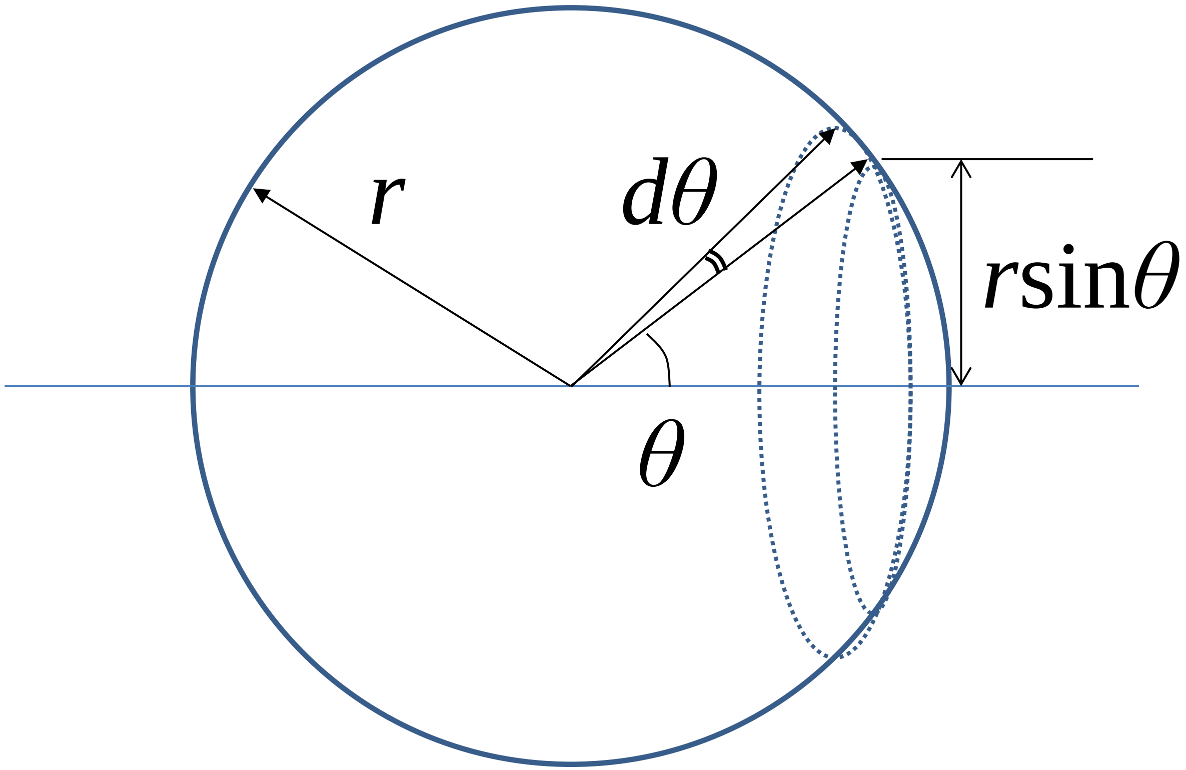
Також очевидно, що найефективніше нейтрони сповільнюються легкими ядрами: чим менше $\boldsymbol{A}$, тим менше α, а отже, тим більше $(1–\alpha)$ і $\boldsymbol{\Delta E/E}$.

Наприклад, при лобовому зіткненні з ядром водню ($\boldsymbol{A}$=1, α=0) нейтрон може практично повністю передати йому свою кінетичну енергію.

ІМОВІРНІСТЬ РОЗСІЯННЯ НЕЙТРОНІВ

Інша перевага СЦМ – розсіяння нейтронів в ній ізотропне (до 10^5 еВ)

Розглянемо сферу радіусом ***r***. Ймовірність розсіяння на кут від **θ** до **θ+*d*θ** (***d*θ** мала величина) є ймовірність попадання в кільце радіусом ***r* sinθ** й шириною ***r d*θ** порівняно з попаданням у всю сферу $\boldsymbol{4\pi r^2}$.



Очевидно, при ізотропному розсіянні ця ймовірність є відношення площ кільця та сфери:

$$P(\theta)d\theta = \frac{2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\sin\theta \, d\theta$$

З іншого боку, це також ймовірність того, що енергія нейтрона після розсіяння буде в інтервалі від $\boldsymbol{E_2}$ до $\boldsymbol{E_2}$+$\boldsymbol{dE_2}$:

$$P(E_2)dE_2 = -P(\theta)d\theta = -P(\theta)\frac{d\theta}{dE_2}\, dE_2$$

З виразу

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta}{2}$$

знайдемо

$$\frac{dE_2}{d\theta} = -\frac{E_1(1-\alpha)\sin\theta}{2}$$

$$P(E_2)dE_2 = -\frac{1}{2}\sin\theta\left(-\frac{2}{E_1(1-\alpha)\sin\theta}\right)dE_2 = \frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)}$$

Проінтегрувавши в можливому діапазоні енергій від αE_1 до E_1, одержимо, як і очікувалось, вірогідну подію:

$$\int_{\alpha E_1}^{E_1} P(E_2)dE_2 = \frac{1}{E_1(1-\alpha)}\int_{\alpha E_1}^{E_1} dE_2 = 1$$

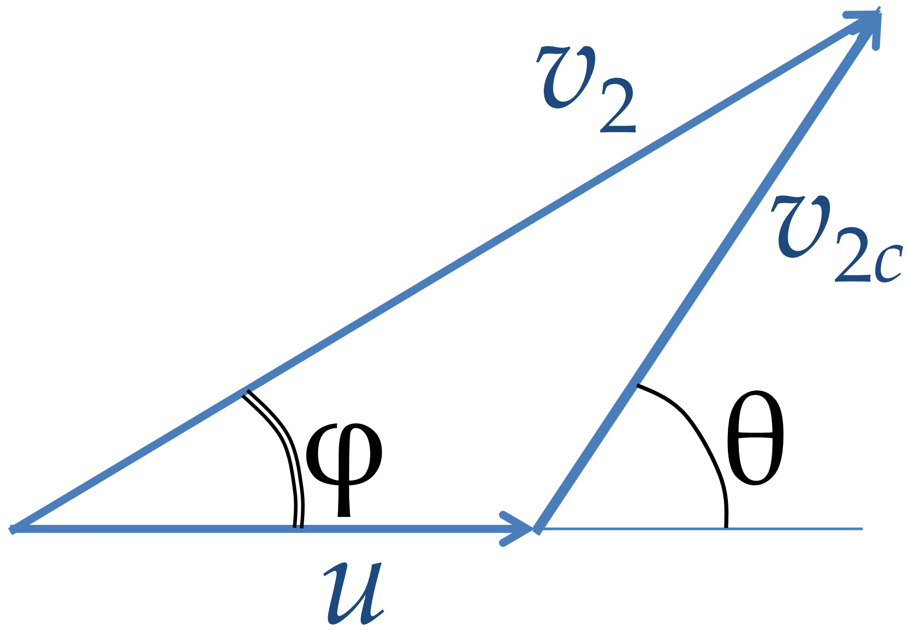
Середня енергія розсіяного нейтрона

$$\overline{E_2} = \int_{\alpha E_1}^{E_1} E_2 \cdot P(E_2)dE_2 = \int_{\alpha E_1}^{E_1} \frac{E_2 dE_2}{E_1(1-\alpha)} = \frac{1}{2}E_1(1+\alpha)$$

А середня втрачена енергія

$$\overline{\Delta E} = E_1 - \overline{E_2} = \frac{1}{2}E_1(1-\alpha)$$

Знайдемо косинус кута розсіяння в лабораторній системі, порівнявши проекції швидкостей на горизонтальну вісь в ЛС та СЦМ:



$$v_2 \cos\varphi = v_{2c} \cos\theta + u$$

Підставивши вирази для v_2, v_{2c}, u, одержимо

$$\frac{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}\,v_1}{A+1}\cos\varphi = \frac{Av_1}{A+1}\cos\theta + \frac{v_1}{A+1}$$

звідки

$$\cos\varphi = \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}}$$

Важливим параметром є усереднений косинус розсіяння

$$\overline{\cos\varphi} = \int_0^\pi \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}} P(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}} \cdot \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{Ax + 1}{\sqrt{A^2 + 2Ax + 1}} dx,$$

де $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$.

Зробимо ще одну заміну: $\sqrt{A^2 + 2Ax + 1} = y$,

$$dy = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 2Ax + 1}}, \quad Ax + 1 = \frac{y^2 - (A^2 - 1)}{2}$$

Тоді

$$\overline{\cos\varphi} = \frac{1}{4A}\int_{A-1}^{A+1}[y^2 - (A^2 - 1)]\,dy =$$

$$= \frac{1}{4A}\left[\frac{(A+1)^3 - (A-1)^3}{3} - 2(A^2 - 1)\right] = \frac{2}{3A}$$

Для складного середовища, що містить кілька *i*–х елементів

$$\overline{\cos\varphi} = \frac{Sum_i(\overline{\cos\varphi}\,\Sigma_s)_i}{Sum_i(\Sigma_s)_i}$$

СЕРЕДНЬОЛОГАРИФМІЧНИЙ ДЕКРЕМЕНТ ЕНЕРГІЇ

Отже, при кожному розсіянні нейтрон втрачає частку енергії, яка в середньому пропорційна енергії до зіткнення, тобто після ***k*** зіткнень

$$E_k = E_0 \cdot \exp(-k\xi)$$

де ξ – середньологарифмічний декремент енергії, що визначається як

$$\xi = \overline{\ln \frac{E_1}{E_2}} = \int_{\alpha E_1}^{E_1} \ln \frac{E_1}{E_2} P(E_2) dE_2 = \int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln \frac{E_2}{E_1} \frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_1^{\alpha} \ln x \; dx = \begin{vmatrix} u = \ln x\,, & du = dx/x \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = \frac{(x \ln x - x)|_1^{\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha \ln \alpha - \alpha + 1}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$$

або

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1}$$

Для водню ξ = 1.

Для достатньо великих ***A***, коли 1/***A***<<1:

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A}\left[\ln(1+1/A) - \ln(1-1/A)\right] =$$

$$= 1 - \frac{(A-1)^2}{2A}\left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{3A^3} - \cdots\right) - \left(-\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} - \frac{1}{3A^3} - \cdots\right)\right] \approx$$

$$\approx 1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^2\left(1 + \frac{1}{3A^2}\right) \approx \frac{2}{A}\left(1 - \frac{2}{3A}\right)\cdot\frac{1+\frac{2}{3A}}{1+\frac{2}{3A}} \approx \frac{2}{A+2/3}$$

Важливими характеристиками сповільнювача є:

$\xi\Sigma_s$ – сповільнювальна здатність матеріалу, що характеризує не лише втрату кінетичної енергії при розсіянні, а й як часто це розсіяння відбувається;

$\xi\Sigma_s / \Sigma_a$ – коефіцієнт сповільнення, окрім втрати кінетичної енергії нейтрона, враховує також імовірність втрати самого нейтрона через поглинання (образно кажучи, краще сповільнити нейтрони від швидких до теплових за 100 зіткнень на нейтрон, і втратити при цьому 1 нейтрон на 10, ніж сповільнити їх за 10 зіткнень на нейтрон, але втратити при цьому 3 з 10).

Σ_s та Σ_a – відповідно макропереріз розсіяння та поглинання