Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 06.

СПОВІЛЬНЕННЯ НЕЙТРОНІВ (ч.2)

- ЛЕТАРГІЯ
- СПОВІЛЬНЕННЯ У НЕПОГЛИНАЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ:
  - ВОДНЕВОМУ (A=1)
  - З A > 1
  - ЩО МІСТИТЬ ЯДРА РІЗНИХ СОРТІВ

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{E_1(1-\alpha)}$$

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha$$

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$$

ЛЕТАРГІЯ

Летаргія u визначається як

$$u(E) = \ln\frac{E_0}{E}, \qquad E(u) = E_0\, e^{-u}$$

Середньологарифмічний декремент енергії – це зміна летаргії при одному зіткненні.

Враховуючи

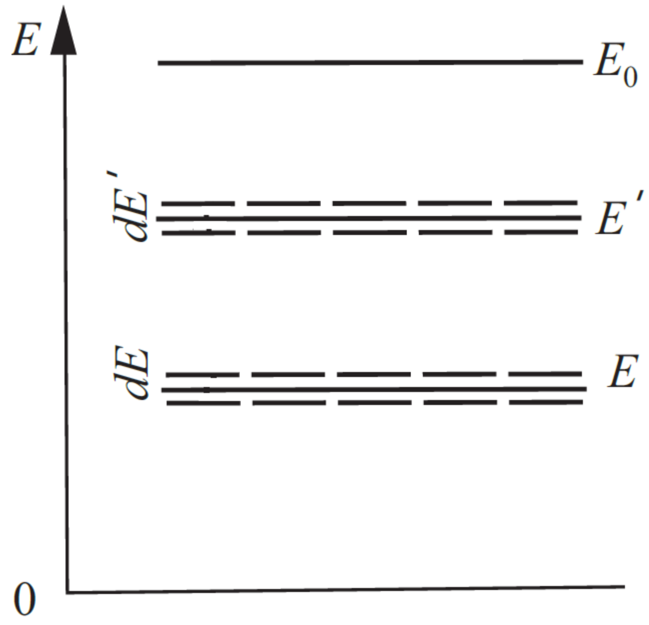
$$\Phi(u)du = -\Phi(E)dE$$

(знак «мінус» - бо летаргія зростає зі зменшенням енергії)

$$\Phi(u) = -\Phi(E)\frac{dE}{du} = E\Phi(E)$$

Аналогічно виражаються інші функції

СПОВІЛЬНЕННЯ У ВОДНЕВОМУ НЕПОГЛИНАЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ



Кількість нейтронів, що розсіялись в одиниці об'єму за одиницю часу з інтервалу енергій від $\boldsymbol{E'}$ до $\boldsymbol{E'+dE'}$,

$$\Sigma_S(E')\Phi(E')dE' = F(E')dE'$$

де $\boldsymbol{F(E)}$ – густина зіткнень.

З них в інтервал енергій від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$, $(\boldsymbol{E} < \boldsymbol{E'})$, розсіялось

$$F(E')dE'P(E)dE = F(E')dE'\frac{dE}{E'}$$

Повне число нейтронів, що розсіялось в інтервал енергій від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$,

$$\int_{E}^{E_0}\frac{F(E')dE'}{E'}dE$$

Крім того, якщо в одиниці об'єму за одиницю часу генерується $\boldsymbol{Q}$ нейтронів з енергією $\boldsymbol{E_0}$, то з них в інтервал від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$ розсіється

$$\frac{Q}{E_0}dE$$

В той же час з цього інтервалу розсіється і вийде

$$F(E)dE$$

З умови стаціонарності кількість нейтронів, що прибули та вибули, має бути рівною.

$$F(E) = \frac{Q}{E_0} + \int_{E}^{E_0} \frac{F(E')}{E'} dE'$$

Продиференціювавши, одержимо

$$\frac{dF(E)}{dE} = -\frac{F(E)}{E}$$

звідки

$$F(E) = \frac{C}{E}$$

З граничної умови

$$F(E_0) = \frac{Q}{E_0}, \quad C = Q, \quad \text{отже} \quad F(E) = \frac{Q}{E}$$

Потік нейтронів

$$\Phi(E) = \frac{Q}{E\Sigma_S}$$

або, у величинах летаргії,

$$\Phi(u) = \frac{Q}{\Sigma_S}, \qquad F(u) = Q$$

тобто густина зіткнень у водні постійна при всіх значеннях летаргії і дорівнює потужності джерела нейтронів.

ГУСТИНА СПОВІЛЬНЕННЯ У ВОДНЕВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Введемо поняття густини сповільнення. Це число нейтронів, що при сповільненні перетнули певну енергію $\boldsymbol{E}$, тобто з діапазону енергій, більших $\boldsymbol{E}$, перейшли в діапазон енергій, менших $\boldsymbol{E}$.

Ймовірність розсіяння нейтронів з енергією $\boldsymbol{E'}$ в діапазон від 0 до $\boldsymbol{E}$ становить $\boldsymbol{E / E'}$. Число нейтронів, що розсіються з діапазону енергій від $\boldsymbol{E'}$ до $\boldsymbol{E'+dE'}$,

$$F(E')dE'\,\frac{E}{E'}$$

Повне число нейтронів, що розсіються з інтервалу від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E_0}$ в інтервал від 0 до $\boldsymbol{E}$,

$$E\int_{E}^{E_0}\frac{F(E')}{E'}\,dE'$$

Додамо до цього нейтрони, що сповільнилися нижче енергії ***E*** в результаті першого зіткнення

$$\frac{QE}{E_0}$$

Тоді густина сповільнення

$$q = \frac{QE}{E_0} + E\int_E^{E_0} \frac{F(E')}{E'}dE'$$

В стаціонарному стані

$$F(E') = \frac{Q}{E'}$$

$$q = \frac{QE}{E_0} + QE\int_E^{E_0} \frac{dE'}{(E')^2} = \frac{QE}{E_0} + QE\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0}\right) = Q$$

тобто в нескінченному водневому середовищі без поглинання густина сповільнення постійна і дорівнює потужності джерела нейтронів.

СПОВІЛЬНЕННЯ В СЕРЕДОВИЩІ З **A > 1**

Мінімальна енергія після першого розсіяння $\boldsymbol{\alpha E_0}$. При менших енергіях перші розсіяння на дають внеску, тому розглянемо окремо інтервали енергії $\boldsymbol{\alpha E_0 < E < E_0}$, та $\boldsymbol{E < \alpha E_0}$.

1) $\boldsymbol{\alpha E_0 < E < E_0}$.

Число зіткнень в інтервалі від $\boldsymbol{E'}$ до $\boldsymbol{E'+dE'}$ дорівнює $\boldsymbol{F(E')dE'}$

Доля нейтронів, розсіяних в інтервал від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$

$$\frac{dE}{E'(1-\alpha)}$$

Повне число нейтронів, розсіяних з інтервала від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E_0}$ в інтервал від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$

$$\int_E^{E_0} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE' dE$$

Додамо нейтрони, що розсіялись після першого зіткнення від джерела

$$\frac{QdE}{E_0(1-\alpha)}$$

Кількість нейтронів, що вибувають в результаті розсіяння з інтервалу від ***E*** до ***E+dE*** дорівнює ***F(E)dE***

З умови стаціонарності випливає

$$F(E) = \frac{Q}{E_0(1-\alpha)} + \int_E^{E_0} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE'$$

Продиференціювавши, одержимо

$$\frac{dF(E)}{F} = -\frac{dE}{E(1-\alpha)}$$

$$\ln F(E) = -\frac{1}{1-\alpha} \ln E + \ln C$$

$$F(E) = \frac{C}{E^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}}$$

З граничної умови

$$F(E_0) = \frac{Q}{E_0(1-\alpha)} = \frac{C}{E_0^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}}$$

$$C = \frac{QE_0^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}}{1-\alpha}$$

$$F(E) = \frac{QE_0^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}}{(1-\alpha)E^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}}$$

$$F(u) = EF(E) = \frac{Q}{(1-\alpha)}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} = \frac{Q}{(1-\alpha)}\exp\left(\frac{\alpha u}{1-\alpha}\right)$$

2) Важкі ядра, або випадок $\boldsymbol{E \ll \alpha E_0}$.

Максимальна енергія, з якої нейтрон може розсіятися до $\boldsymbol{E}$, становить $\boldsymbol{E/\alpha}$. Отже, повне число нейтронів, що може розсіятися в інтервал від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$

$$\int_E^{E/\alpha} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE' \, dE$$

а число нейтронів, що вибуває з цього ж інтервалу $\boldsymbol{F(E)dE}$.

Отже

$$F(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE'$$

Асимптотичний розв'язок

$$F(E) = \frac{C}{E}$$

Для визначення константи C знайдемо густину сповільнення.

В загальному числі нейтронів, що розсіюються з енергії $\boldsymbol{E'}$, доля нейтронів, що матимуть енергію менше $\boldsymbol{E}$, становить

$$\frac{E - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

Тоді число нейтронів, що розсіюються з інтервалу від $\boldsymbol{E'}$ до $\boldsymbol{E'+dE'}$, в інтервал енергій нижче від $\boldsymbol{E}$,

$$F(E')dE'\,\frac{E - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

а густина сповільнення буде інтеграл

$$q = \int_{E}^{E/\alpha} F(E')\,\frac{E - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}\,dE'$$

Підставивши асимптотичний розв'язок для $\boldsymbol{F(E)}$,

$$q = \frac{C}{1-\alpha}\int_{E}^{E/\alpha}\frac{E-\alpha E'}{(E')^2}dE' = C\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha\right) = C\xi$$

Оскільки поглинання відсутнє і $\boldsymbol{q = Q}$, або $\boldsymbol{C = Q/\xi}$,

тоді густина зіткнень

$$F(E) = \frac{Q}{E\xi}, \qquad F(u) = \frac{Q}{\xi}$$

потік нейтронів

$$\Phi(E) = \frac{Q}{E\Sigma_S\xi}, \qquad \Phi(u) = \frac{Q}{\Sigma_S\xi}$$

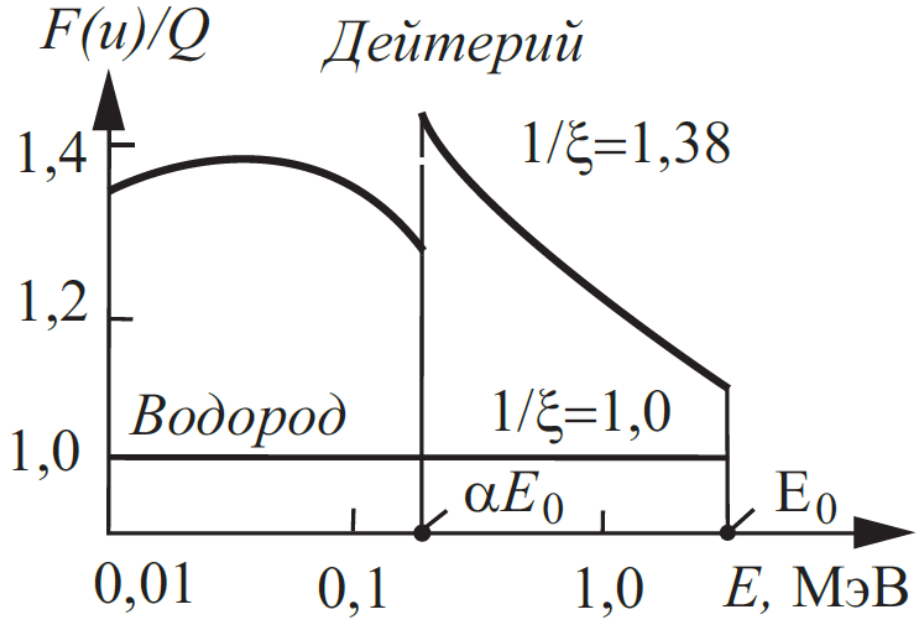
$$q = \xi\Sigma_S\Phi(u)$$

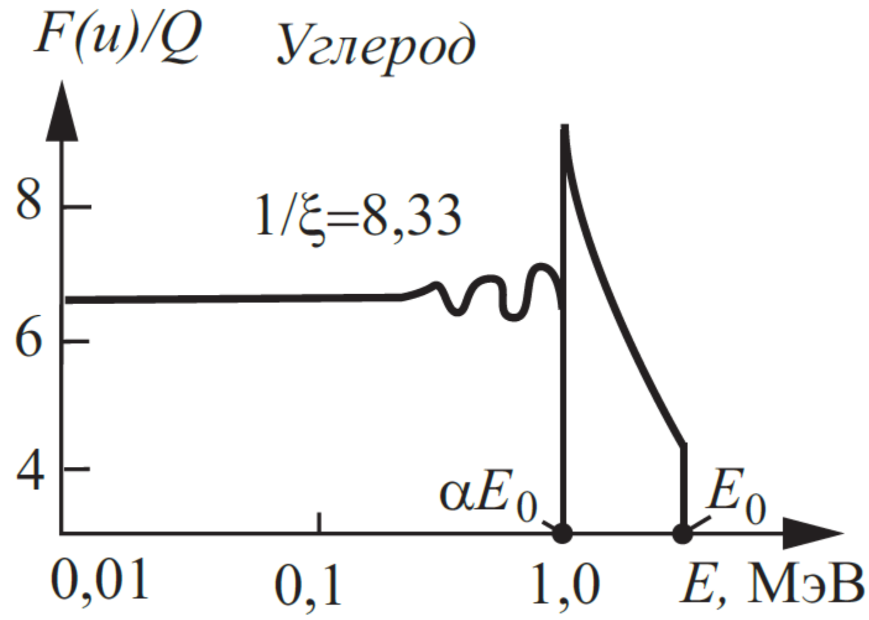
3) При $\boldsymbol{E = \alpha E_0}$ густина зіткнень зазнає розриву:

$$F(\alpha E_0 + 0) = \frac{Q}{E_0(1-\alpha)} + \int_{\alpha E_0}^{E_0}\frac{F(E')}{E'(1-\alpha)}dE'$$

$$F(\alpha E_0 - 0) = \int_{\alpha E_0}^{E_0} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE'$$

Цей розрив пов'язаний з тим, що нейтрони від джерела з енергією $\boldsymbol{E_0}$ не можуть мати після першого розсіяння енергію менше ніж $\boldsymbol{\alpha E_0}$. Густина зіткнень в області нижче $\boldsymbol{\alpha E_0}$ зазнає осциляцій, які поволі згладжуються багаторазовими розсіяннями і вже нижче енергії $\boldsymbol{\alpha^3 E_0}$ практично зникають, а густина зіткнень прямує до свого асимптотичного значення.





СПОВІЛЬНЕННЯ В СЕРЕДОВИЩІ З КІЛЬКОХ СОРТІВ ЯДЕР

Розглянемо асимптотичний випадок ($\boldsymbol{E} \ll \boldsymbol{\alpha E_0}$).

Для ядер i-го сорту повне число нейтронів розсіяне в інтервал енергії від $\boldsymbol{E}$ до $\boldsymbol{E+dE}$ буде

$$\int_{E}^{E/\alpha_i} \frac{F_i(E')dE'}{E'(1-\alpha_i)} dE$$

Якщо сповільнювач містить $\boldsymbol{N}$ сортів ядер і $\boldsymbol{F(E)}$ – повна густина зіткнень, то за умовою стаціонарності

$$F(E) = \sum_{i=1}^{N} \int_{E}^{E/\alpha_i} \frac{F_i(E')dE'}{E'(1-\alpha_i)}$$

Густина зіткнень пропорційна макроскопічному перерізу розсіяння, тому

$$F(E) = \sum_{i=1}^{N} \int_{E}^{E/\alpha_i} \frac{\Sigma_{si}(E)}{\Sigma_s(E)} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha_i)}$$

Густина сповільнення

$$q = \sum_{i=1}^{N} \int_{E}^{E/\alpha_i} \frac{\Sigma_{si}(E)}{\Sigma_s(E)} F(E') \frac{E - \alpha_i E'}{E'(1-\alpha_i)} dE'$$

Якщо залежність перерізів від енергії має однаковий характер, тобто

$$\frac{\Sigma_{si}(E)}{\Sigma_s(E)} = const$$

та зважаючи, що в асимптотичному випадку

$$F(E) = \frac{C}{E}$$

аналогічному попередньому випадку маємо

$$q = Q = \frac{C}{\Sigma_s} \sum_{i=1}^{N} \Sigma_{si} \xi_i$$

звідки

$$C = \frac{Q \Sigma_s}{\sum_{i=1}^{N} \Sigma_{si} \xi_i}$$

а густина зіткнень

$$F(E) = \frac{Q \Sigma_s}{E \sum_{i=1}^{N} \Sigma_{si} \xi_i}$$

Зважаючи, що усереднене значення середньо логарифмічного декременту енергії у випадку ядер кількох сортів є

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\Sigma_s} \sum_{i=1}^{N} \Sigma_{si} \xi_i \,, \qquad F(E) = \frac{Q}{E \bar{\xi}} \,, \qquad F(u) = \frac{Q}{\bar{\xi}}$$