Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 08.

ДИФУЗІЯ НЕЙТРОНІВ (ч.1)

- ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ
- ЗАКОН ФІКА
- РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ
- ДОВЖИНА ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

Через свою електронейтральність нейтрони практично не взаємодіють між собою, їх концентрація в реакторі може досягати 10^9 н/см^3, тоді як концентрація атомів у середовищі порядку 10^{19} част/см^3.

Тому теплові нейтрони можна розглядати як нейтронний газ, що подібний до ідеального газу, а отже, вони мають підпорядковуватись процесу дифузії, тобто направленого переносу, рушійною силою якого є різниця концентрацій в різних точках середовища.

Вважатимемо, що в момент $\boldsymbol{t}$ нейтрон характеризується векторами координат та швидкості ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$):

$$\vec{r} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z, \quad \vec{v} = \vec{\Omega}v,$$

Густина нейтронів:

$n(\vec{r},\overrightarrow{\Omega},E,t)$ – кількість нейтронів в одиниці об'єму, що мають певну енергію та напрямок руху.

Повна густина:

$$n(\vec{r},E,t)\int_{4\pi} n\left(\vec{r},\overrightarrow{\Omega},E,t\right)d\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} n\left(\vec{r},\overrightarrow{\Omega},E,t\right)d\varphi$$

Потік нейтронів:

$$\Phi = vn$$

тобто кількість нейтронів, що перетинають за одиницю часу поверхню одиничної площі, перпендикулярну до напрямку руху нейтронів.

Струм нейтронів:

$$\vec{I}(\vec{r},E,t)=\int\limits_{\vec{\Omega}}\vec{v}n\left(\vec{r},\vec{\Omega},E,t\right)d\Omega=\int\limits_{\vec{\Omega}}\vec{\Omega}\Phi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E,t\right)d\Omega$$

Густина зіткнень:

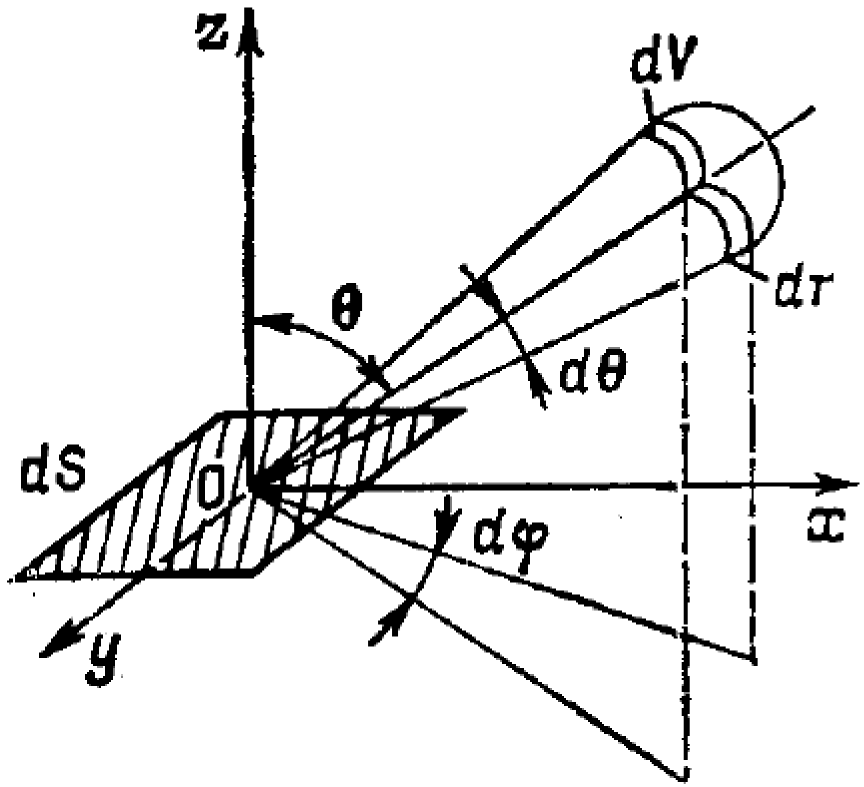
$$F(\vec{r},E,t)=\Sigma(E)\Phi(\vec{r},E,t)$$

кількість зіткнень в одиниці об'єму за одиницю часу.

ЗАКОН ФІКА

Виділимо у верхньому напівпросторі елемент об'єму з координатами (r, θ, φ) – в сферичній СК, або (x, y, z) – в декартовій, так що

$$x = r \sin\theta \cos\varphi\,, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta,$$



а також малу площадку ***dS*** в площині ***xy*** навколо початку координат.

Припустимо, що:

1) переріз захоплення значно менший від перерізу розсіяння $\Sigma_a \ll \Sigma_s$;
2) розсіяння ізотропне в лабораторній СК;
3) середній час ($\tau = l_s/v$) між послідовними зіткненнями мізерно малий порівняно з часом, за який істотно змінюється розподіл нейтронів;
4) на відстані кількох довжин пробігу нейтронний потік з достатньою точністю описується розкладом Тейлора першого порядку.

Кількість нейтронів, що пройдуть з вибраного об'єму ***dV*** крізь площадку ***dS*** в період від ***t*** до ***t*+*dt*** становить

$$\frac{dS\cos\theta}{4\pi r^2}\cdot\Sigma_s\,\Phi(\vec{r}, t - r/v)\,dV\,dt$$

На шляху до площадки частина нейтронів вилучиться внаслідок розсіяння та поглинання, досягне ж площадки лише $\exp[-(\Sigma_s + \Sigma_a)r]$ їх частина.

Повне число нейтронів, що пройдуть крізь площадку, знайдемо інтегруванням по верхньому напівпростору:

$$\frac{dS\,dt}{4\pi}\int_{\text{Верх}} \frac{\Sigma_s \cos\theta}{r^2}\Phi(\vec{r}, t - r/v)\ \exp[-(\Sigma_s + \Sigma_a)r]\,dV$$

Поділивши на *dSdt*, одержимо густину дифузійного струму в напрямку –*z*, яку позначимо I_{z-}.

В силу припущення 3 знехтуємо r/v, а згідно 4 розкладемо потік нейтронів в околі початку координат:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(0, t) + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0$$

Тоді

$$I_{z-} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \left[\Phi_0 + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0\right]\cdot$$

$$\cdot\, \Sigma_s \exp[-(\Sigma_s + \Sigma_a) r] \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

Враховуючи, що інтеграл по $d\varphi$ для членів, що містять $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$, дасть 0, та нехтуючи поглинанням та залежністю розсіяння від координат,

$$I_{z-} = \frac{\Phi_0}{2}\int\limits_0^\infty \exp(-\Sigma_s r)\, \Sigma_s dr \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\Sigma_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 \int\limits_0^\infty \Sigma_s r \exp(-\Sigma_s r)\, \Sigma_s dr \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\Phi_0}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}dx \int_0^1 ydy + \frac{1}{2\Sigma_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 \int_0^{\infty} xe^{-x}dx \int_0^1 y^2dy =$$

$$= \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0$$

Аналогічно, інтегруючи по $d\theta$ від π до π/2, одержимо густину струму з нижнього напівпростору в напрямку +z:

$$I_{z+} = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0$$

Результуюча густина струму в напрямку +z:

$$I_z = I_{z+} - I_{z-} = -\frac{1}{3\Sigma_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0$$

Аналогічно,

$$I_x = -\frac{1}{3\Sigma_s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0, \quad I_y = -\frac{1}{3\Sigma_s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0$$

Оскільки $\vec{I} = \vec{i} I_x + \vec{j} I_y + \vec{k} I_z,$ то

$$\vec{I} = -\frac{1}{3\Sigma_s}\, grad\, \Phi = -D\, \nabla\Phi$$

де $D = 1/3\Sigma_s$ – коефіцієнт дифузії для потоку, або

$$\vec{I} = -D_0\, \nabla n$$

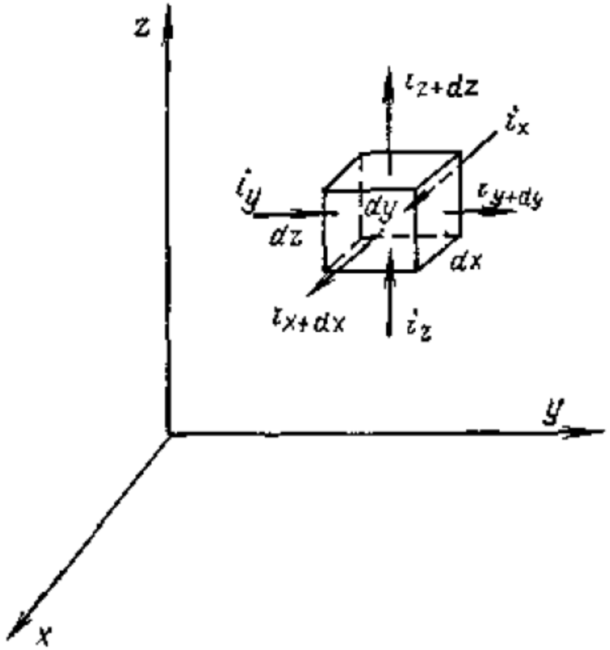
де $D_0 = Dv$ – звичайний коефіцієнт дифузії. Це і є рівняння Фіка.

У випадку анізотропного розсіяння замість перерізу розсіяння використовують транспортний переріз:

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_s(1 - \overline{\cos}\,\psi)$$

РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Маючи вираз для густини струму, можна одержати рівняння дифузії, розглянувши баланс нейтронів в елементі об'єму. Зміна нейтронної густини визначається трьома процесами:



$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} dV = \text{генерація} - \text{витік} - \text{поглинання}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} dV = S\, dV - \text{витік} - \Sigma_a \Phi\, dV$$

Витік в напрямку z

$$J_z = (I_{z+dz} - I_z) dxdy = \frac{\partial I_z}{\partial z} dxdydz =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left[D \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] dV$$

Аналогічно для x, y, тому рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = S(\vec{r},t) + \nabla[D(\vec{r})\nabla\Phi(\vec{r},t)] - \Sigma_a\Phi(\vec{r},t)$$

Для однорідного середовища, в якому параметри не залежать від координат,

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = S(\vec{r},t) + D\Delta\Phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\Phi(\vec{r},t)$$

Якщо ж густина нейтронів не змінюється з часом, одержуємо

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a\Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$$

рівняння дифузії для стаціонарної задачі.

ГРАНИЧНІ УМОВИ

Розглянемо для простоти плоску вертикальну границю при $\boldsymbol{x = 0}$. Зліва середовище 1, справа – середовище 2.

Очевидно, кількість нейтронів, що пройшли через границю в одному напрямку, має бути однаковою з обох боків (якщо, звичайно, на границі немає джерел або стоків). Тому

$$I_{1-}(0) = I_{2-}(0), \quad I_{1+}(0) = I_{2+}(0),$$

або

$$\left.\frac{\Phi_1}{4} + \frac{D_1}{2}\frac{d\Phi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{\Phi_2}{4} + \frac{D_2}{2}\frac{d\Phi_2}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\left.\frac{\Phi_1}{4} - \frac{D_1}{2}\frac{d\Phi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{\Phi_2}{4} - \frac{D_2}{2}\frac{d\Phi_2}{dx}\right|_{x=0}$$

По черзі склавши та віднявши ці рівняння, одержуємо

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0), \qquad D_1 \frac{d\Phi_1}{dx}\bigg|_{x=0} = D_2 \frac{d\Phi_2}{dx}\bigg|_{x=0}$$

У загальному вигляді, маючи границю ***F***,

$$\Phi_1|_F = \Phi_2|_F,$$

$$D_1\nabla\Phi_1|_F = D_2\nabla\Phi_2|_F, \qquad \text{або } \overrightarrow{I_1}\Big|_F = \overrightarrow{I_2}\Big|_F$$

У випадку, якщо по одну сторону границі вакуум, наприклад, при $x > 0$, зрозуміло, що з цієї сторони потоку нейтронів бути не може, тобто

$$I_-(x) = \frac{\Phi(x)}{4} + \frac{D}{2}\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

Не знаючи точного вигляду $\Phi(x)$, апроксимуємо лінійно поблизу 0:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(0)$$

З умови нульового струму через границю одержуємо

$$\Phi(x) = \Phi(0)(1 - x/2D)$$

тобто потік обертається на нуль на відстані $d = 2D = 2/3 l_{tr}$, яка називається довжиною екстраполяції.

Більш строгий розгляд на основі інтегрального рівняння Пайєрлса дає величину $d = 0{,}7104\, l_{tr}$.

Зазначимо наприкінці, що рівняння дифузії може застосовуватись за умови, що потік змінюється незначно на довжині розсіяння:

$$l_s \frac{d\Phi}{dx} \ll \Phi$$