Теорія ядерних реакторів (ТЯР).

Лекція 09.

ДИФУЗІЯ НЕЙТРОНІВ (ч.2). Розв’язок рівняння дифузії для джерел різної форми

- ТОЧКОВЕ ДЖЕРЕЛО
- ПЛОСКЕ ДЖЕРЕЛО
- ЛІНІЙНЕ ДЖЕРЕЛО
- ДОВЖИНА ДИФУЗІЇ

1.ТОЧКОВЕ ДЖЕРЕЛО

Нехай маємо ізотропне точкове джерело потужністю ***S*** нейтронів за одиницю часу. Помістимо його в початок координат для зручності.

Тоді рівняння дифузії, застосовне всюди, крім початку координат, виглядає

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a\Phi(\vec{r}) = 0, \qquad \Delta\Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L^2}\Phi(\vec{r}) = 0,$$

де $L^2 = D/\Sigma_a = 1/3\Sigma_{tr}\Sigma_a$ – квадрат довжини дифузії

Будемо шукати розв'язок в сферичній системі координат, враховуючи його незалежність від кутових змінних:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi(r)}{dr}\right] - \frac{1}{L^2}\Phi(r) = 0$$

Зробимо заміну $\Phi(r) = f(r)/r$, тоді

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} - \frac{f(r)}{r^2}\right)\right] - \frac{f(r)}{L^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{df(r)}{dr} - f(r)\right] - \frac{f(r)}{L^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{df(r)}{dr} + r\frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{df(r)}{dr}\right] - \frac{f(r)}{L^2} =$$

$$= \frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{f(r)}{L^2} = 0$$

Загальний розв’язок

$$f(r) = Ae^{-r/L} + Be^{r/L},$$

або

$$\Phi(r) = A\frac{e^{-r/L}}{r} + B\frac{e^{r/L}}{r}$$

У випадку ***необмеженого середовища*** $B = 0$.

Густина струму направлена від центра по радіусу і рівна

$$I(r) = -D\frac{d\Phi(r)}{dr} = -DA\left(-\frac{e^{-r/L}}{r^2} - \frac{e^{-r/L}}{Lr}\right) =$$

$$= DA\frac{e^{-r/L}}{r^2}\left(1 + \frac{r}{L}\right)$$

Через сферу радіуса r_0 за одиницю часу протікає

$$4\pi r_0^2 I(r_0) = 4\pi DAe^{-r_0/L}\left(1 + \frac{r_0}{L}\right) \xrightarrow[r_0 \to 0]{} 4\pi DA = S$$

нейтронів, звідки $A = S/4\pi D$, отже

$$\Phi(r) = \frac{S}{4\pi D}\frac{e^{-r/L}}{r}$$

Якщо ж джерело знаходиться не в початку координат, а в точці

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то розв'язок має вигляд

$$\Phi(r) = \frac{S}{4\pi D} \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}_0|/L}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|},$$

де $|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

Також можна визначити сталу $\boldsymbol{A}$, виходячи з умови, що в стаціонарному стані всі нейтрони, випущені джерелом, мають поглинутись в середовищі. Тому

$$S = \int_V \Sigma_a \Phi dV = \Sigma_a A \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^\pi r \sin\theta \, d\theta \, \frac{e^{-r/L}}{r} =$$

$$= 4\pi \Sigma_a A \int_0^\infty e^{-r/L} \, r \, dr = 4\pi \Sigma_a A L^2 = 4\pi A D$$

Якщо ж маємо ***обмежене середовище*** радіуса R_0, то вступає в силу гранична умова $\Phi(R_{ex}) = 0$, де $R_{ex} = R_0 + d_{ex}$ – екстрапольований радіус границі з вакуумом. Тоді

$$\Phi(R_{ex}) = A\frac{e^{-R_{ex}/L}}{R_{ex}} + B\frac{e^{R_{ex}/L}}{R_{ex}} = 0$$

звідки

$$\Phi(r) = \frac{C}{r}\left[e^{(R_{ex}-r)/L} - e^{(r-R_{ex})/L}\right]$$

З умови нормування

$$4\pi r_0^2 I(r_0) = 4\pi DC\left[e^{(R_{ex}-r_0)/L}\left(1+\frac{r_0}{L}\right) - e^{(r_0-R_{ex})/L}\left(1-\frac{r_0}{L}\right)\right]\xrightarrow[r_0\to 0]{}$$

$$8\pi DC\sinh(R_{ex}/L) = S, \quad C = \frac{S}{8\pi D\sinh(R_{ex}/L)}$$

Отже

$$\Phi(r) = \frac{S}{4\pi D r}\frac{\sinh[(R_{ex} - r)/L]}{\sinh(R_{ex}/L)}$$

2.ПЛОСКЕ ДЖЕРЕЛО

Розглянемо джерело нейтронів у вигляді нескінченної площини $x = 0$, що випромінює S нейтронів з одиниці площі в одиницю часу.

Оскільки маємо залежність лише від координати x, рівняння дифузії матиме вигляд

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\Phi(x) = 0$$

В силу дзеркальної симетрії, очевидно, $\Phi(-x) = \Phi(x)$, тому розглянемо $x > 0$.

Загальний розв'язок

$$\Phi(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L}$$

Якщо маємо ***необмежений простір*** по $\boldsymbol{x}$, то з умови обмеженості розв'язку $B = 0$.

Враховуючи, що площина випромінює нейтрони однаково в обидві сторони,

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{DA}{L}e^{-x/L}\right) = \frac{DA}{L} = \frac{S}{2}, \qquad A = \frac{SL}{2D}.$$

Таким чином, для всього простору

$$\Phi(x) = \frac{SL}{2D}e^{-|x|/L} = \frac{S}{2\Sigma_a L}e^{-|x|/L}$$

Якщо ж джерело знаходиться в площині $x = x_0$,

$$\Phi(x) = \frac{SL}{2D}e^{-|x-x_0|/L}$$

Якщо маємо ***обмежене середовище*** товщиною ***a*** з кожного боку від площини джерела, то граничною умовою для області $x > 0$ стає нульовий потік на екстрапольованій границі $a_{ex} = a + d_{ex}$

$$\Phi(a_{ex}) = Ae^{-a_{ex}/L} + Be^{a_{ex}/L} = 0$$

$$\Phi(x) = C\left(e^{(a_{ex}-x)/L} - e^{(x-a_{ex})/L}\right) = 2C\sinh[(a_{ex} - x)/L]$$

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{DC}{L}\left(e^{(a_{ex}-x)/L} + e^{(x-a_{ex})/L}\right)\right] =$$

$$= \frac{2DC}{L}\cosh(a_{ex}/L) = \frac{S}{2}$$

$$C = \frac{SL}{4D\cosh(a_{ex}/L)}$$

І для всього середовища маємо

$$\Phi(x) = \frac{SL}{2D}\frac{\sinh[(a_{ex} - |x|)/L]}{\cosh(a_{ex}/L)}$$

3.ЛІНІЙНЕ ДЖЕРЕЛО

Маємо ізотропне джерело, розташоване на осі z, що випромінює S нейтронів з одиниці довжини за одиницю часу.

Оскільки джерело ізотропне і нескінченно довге, оберемо циліндричну систему координат (ρ, φ, z), при цьому в рівнянні дифузії відсутня залежність від координат φ і z:

$$\frac{d^2\Phi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} - \frac{1}{L^2}\Phi(\rho) = 0$$

Проведемо заміну змінної $\rho = Lx$, тоді маємо рівняння

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx} - f(x) = 0$$

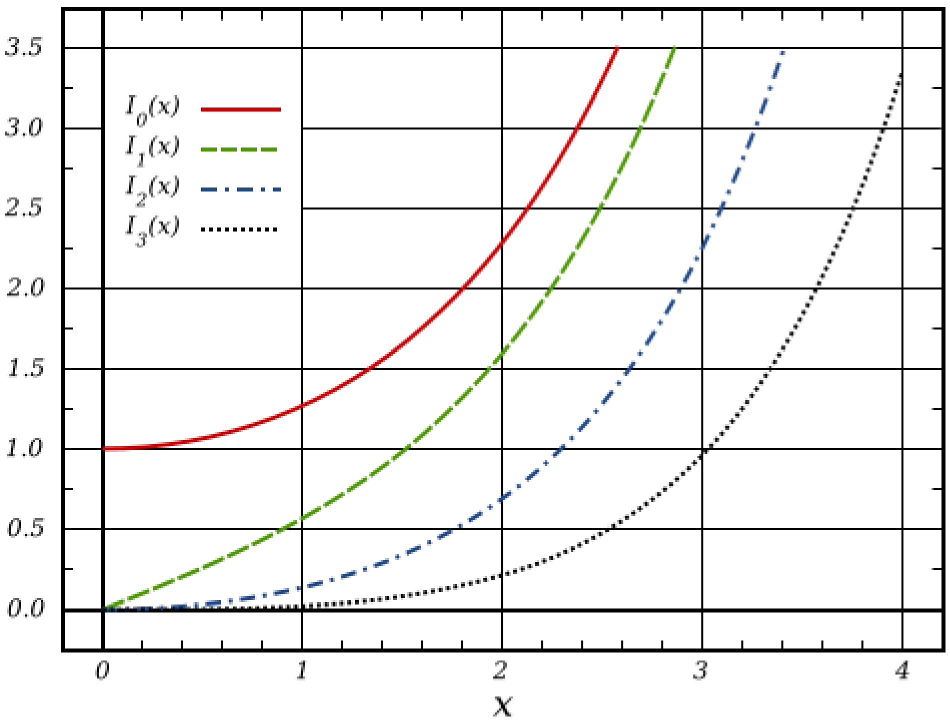
або ж

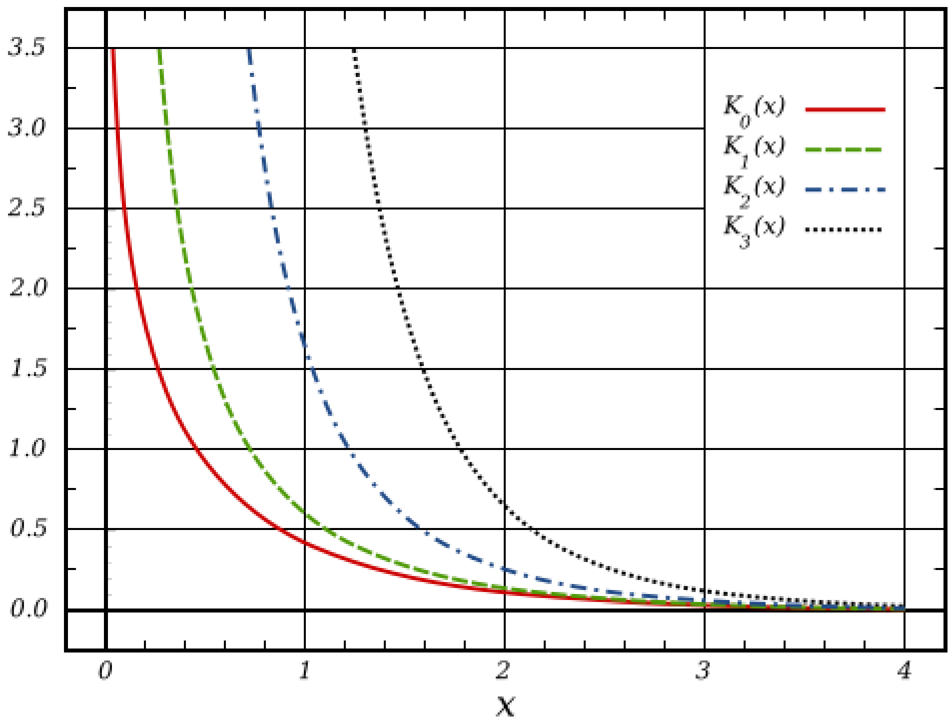
$$x^2\frac{d^2f}{dx^2} + x\frac{df}{dx} - x^2 f = 0,$$

розв'язком якого є модифіковані функції Бесселя нульового порядку:

$$f(x) = AI_0(x) + BK_0(x)$$

$$\Phi(\rho) = AI_0(\rho/L) + BK_0(\rho/L)$$





У випадку ***необмеженого середовища*** $A = 0$, а з умови нормування

$$S = \lim_{\rho \to 0} 2\pi\rho\, I(\rho) = \lim_{\rho \to 0} 2\pi\rho\, DB\left(-\frac{dK_0(\rho/L)}{d\rho}\right) =$$

$$= 2\pi DB \lim_{\rho \to 0}\left\{\frac{\rho}{L} K_1(\rho/L)\right\} =$$

$$= 2\pi DB \lim_{\rho \to 0}\left\{\frac{\rho}{L}\left[\left(\frac{\rho}{L}\right)^{-1} + \frac{\rho}{2L}\left(\ln\left(\frac{\rho}{2L}\right) + const\right)\right]\right\} = 2\pi DB$$

Отже,

$$B = \frac{S}{2\pi D}$$

$$\Phi(\rho) = \frac{S}{2\pi D} K_0(\rho/L)$$

У випадку радіально ***обмеженого середовища*** (циліндр з радіусом ρ_0) вимагаємо нульового потоку на $\rho_{ex} = \rho_0 + d_{ex}$,

$$\Phi(\rho_{ex}) = AI_0(\rho_{ex}/L) + BK_0(\rho_{ex}/L) = 0$$

$$\Phi(\rho) = A[I_0(\rho/L) - K_0(\rho/L) \cdot I_0(\rho_{ex}/L)/K_0(\rho_{ex}/L)]$$

З умови нормування

$$S = \lim_{\rho \to 0} 2\pi\rho\, I(\rho) =$$

$$= -2\pi DA \lim_{\rho \to 0} \left\{ \frac{\rho}{L} \left[I_1(\rho/L) + K_1(\rho/L) \cdot \frac{I_0(\rho_{ex}/L)}{K_0(\rho_{ex}/L)} \right] \right\} =$$

$$= -2\pi DA \cdot \frac{I_0(\rho_{ex}/L)}{K_0(\rho_{ex}/L)}$$

Отже,

$$A = -\frac{S}{2\pi D} \cdot \frac{K_0(\rho_{ex}/L)}{I_0(\rho_{ex}/L)}$$

а остаточний розв'язок

$$\Phi(\rho) = \frac{S}{2\pi D} \cdot \left(K_0(\rho/L) - I_0(\rho/L) \frac{K_0(\rho_{ex}/L)}{I_0(\rho_{ex}/L)} \right)$$

4.ДОВЖИНА ДИФУЗІЇ

В процесі дифузії нейтрони поглинаються. Знайдемо середній квадрат зміщення нейтрона від точкового джерела до точки поглинання:

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2(4\pi r^2 \Sigma_a \Phi dr)}{\int_0^\infty 4\pi r^2 \Sigma_a \Phi dr}$$

Тут $4\pi r^2 \Sigma_a \Phi dr$ – число нейтронів, поглинутих за одиницю часу в сферичному шарі радіусом від r до $r + dr$. З урахуванням виразу для потоку від точкового джерела в необмеженому просторі

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^3 e^{-r/L} dr}{\int_0^\infty r e^{-r/L} dr} = L^2 \frac{\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx}{\int_0^\infty x e^{-x} dx} = 6L^2$$

Таким чином, довжина дифузії характеризує середньоквадратичне зміщення нейтрона до поглинання

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu\left(z e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$K_0(z) =$$

$$= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} \psi(m+1),$$

$$\psi(1) = -C, \ \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - C,$$

$C = 0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера;

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m! \, (z/2)^{n-2m}} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! \, (n+m)!} \times \left\{ \ln(z/2) - \frac{1}{2}\psi(m+1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\psi(n+m+1) \right\},$$

$n \geqslant 1$ — целое;

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^\nu I_\nu(z)\right] = z^{\nu-m} I_{\nu-m}(z). \qquad \left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^{-\nu} I_\nu(z)\right] = z^{-\nu-m} I_{\nu+m}(z).$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^\nu K_\nu(z)\right] = (-1)^m z^{\nu-m} K_{\nu-m}(z). \qquad \left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^{-\nu} K_\nu(z)\right] = (-1)^m z^{-\nu-m} K_{\nu+m}(z).$$