



Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Семінарське (практичне) заняття #2

Модуль #1

Класична неідеальна плазма

2. Віріальне рівняння стану

2.1. Конфігураційний інтеграл

$$\begin{aligned} Z(V, T, N) &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int d\Gamma e^{-\beta H} = \\ &= \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \int_V \dots \int_V dr_1 \dots dr_N \exp\left(-\frac{1}{kT} \sum_{i < j} \Phi(r_{ij})\right) \end{aligned}$$

$$\lambda = h / (2\pi m kT)^{1/2}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.2. Функції Маєра

$$f_{ij} \equiv f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \exp\left[-\frac{1}{kT} \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)\right] - 1$$

$$Z(V, T, N) = \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \int_V \dots \int_V d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \prod_{i < j=2}^N (1 + f_{ij})$$

2. Віріальне рівняння стану

2.3. Перша теорема Маєра

$$1 + F(x) = e^{f(x)},$$

Внески

$$F_N = \sum_{(G_N)} W(G_N) \quad f_l = \sum_{(C_l)} W(C_l),$$

Твірні функції

$$F(x) = \sum_{N=1}^{\infty} F_N \frac{x^N}{N!} \quad f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l \frac{x^l}{l!}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.4. Теорема множення

Твірна функція добутку множин діаграм дорівнює добутку твірних функцій множин

$$\bar{\mathcal{S}} \times \bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{B}}$$

Інтеграл $Z(V, T, N) = \frac{1}{N!} \sum_{(G_N)} W(G_N),$

Внесок діаграми $W(G_N) = \frac{1}{\lambda^{3N}} \int_V \dots \int_V dr_1 \dots dr_N \prod_{G_N} f_{ij}$

2. Віріальне рівняння стану

2.5. Велика статсума

Твірна функція

$$\zeta(V, T, z) = \sum_{N=0}^{\infty} Z(V, T, N) (\lambda^3 z)^N,$$

Великий статистичний Інтеграл (велика статистична сума станів)

$$\zeta(V, T, z) = \exp [V\chi(V, T, z)].$$

$$\chi(V, T, z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l(V, T) z^l.$$

$$b_l(V, T) = \frac{1}{Vl!} \int_V \dots \int_V dr_1 \dots dr_l \sum_{c_l} \prod_{c_l} f_{lj},$$

2. Віріальне рівняння стану

2.6. Рівняння Маєра

Границі існують $\lim_{N \rightarrow \infty} b_l(Nv, T) = \bar{b}_l(T).$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \chi(Nv, T, z) \equiv \bar{\chi}(T, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l(T) z^l$$

Рівняння $\frac{1}{v} = z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \bar{\chi}(T, z_0) \quad \frac{1}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} l \bar{b}_l(T) z_0^l.$

$$\frac{p}{kT} = \bar{\chi}(T, z_0) = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l(T) z_0^l.$$

$$\mu = \psi + pv = kT \ln(\lambda^3 z_0)$$

2. Віріальне рівняння стану

2.7. Віріальні коефіцієнти

Ідеальний газ $\bar{b}_1 \equiv 1$ $z_0 \approx v_0^{-1}$

Віріальне розкладення $B = b - \frac{a}{RT}$

$$\begin{aligned} B(T) &= -N\bar{b}_2(T) = -\frac{N}{2} \int dr_{12} f(r_{12}) = \\ &= 2\pi N \int_0^\infty dr r^2 (1 - e^{-\varphi(r)/kT}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(T) &= N^2 [-2\bar{b}_3(T) + 4(\bar{b}_2)^2] = \\ &= -\frac{N^2}{3} \int \int dr_{12} dr_{13} f_{12} f_{13} f_{23} = \\ &= -\frac{8\pi^2 N^2}{3} \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta f(r_1) f(r_2) \times \\ &\quad \times f((r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta)^{1/2}) \end{aligned}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.8. Друга теорема Маєра

Внесок від зірок $W(C_p) = \prod W(S_m)$

$$f_p = \sum_{(C_p)} W(C_p) \quad r_m = \sum_{(S_m)} W(S_m)$$

$$T(z) = z \exp \left\{ \frac{dS(T)}{dT} \right\}$$

$$T(z) = z \frac{df}{dz} = \sum_{p=1}^{\infty} p f_p \frac{z^p}{p!} \quad S(y) = \sum_{m=2}^{\infty} r_m \frac{y^m}{m!}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.8. Друга теорема Маєра

Внесок від зірок $W(C_p) = \prod W(S_m)$

$$f_p = \sum_{(C_p)} W(C_p) \quad r_m = \sum_{(S_m)} W(S_m)$$

$$T(z) = z \exp \left\{ \frac{dS(T)}{dT} \right\}$$

$$T(z) = z \frac{df}{dz} = \sum_{p=1}^{\infty} p f_p \frac{z^p}{p!} \quad S(y) = \sum_{m=2}^{\infty} r_m \frac{y^m}{m!}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.9. Рівняння Маєра

$$1/v = x)$$

Перетворення

$$\begin{aligned} \frac{p}{kT} &= \bar{\chi}(z_0) = \int_0^{z_0} dz \frac{d\bar{\chi}}{dz} = \int_0^{z_0} dz \frac{x}{z} = \\ &= \int_0^x e^{\varphi(y)} d(ye^{-\varphi(y)}) = x - \int_0^x y\varphi'(y) dy = \\ &= \frac{1}{v} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu+1} \bar{\beta}_{\nu} \left(\frac{1}{v}\right)^{\nu+1}. \end{aligned}$$

$$\bar{\beta}_{m-1} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V(m-1)!} \int_V \dots \int_V dr_1 \dots dr_m \sum_{(S_m)} \prod_{S_m} f_{ij}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.10. Віріальний коефіцієнт

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{n-1}{n} \bar{\beta}_{n-1} = \\ &= -\frac{n-1}{n!} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \dots \int_V dr_1 \dots dr_n \sum_{(S_n)} \prod_{S_n} f_{ij}. \end{aligned}$$

$$B_4 = -\frac{1}{8} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \dots \int dr_1 \dots dr_4 \left\{ \begin{array}{c} \square \\ (3) \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ (6) \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ (1) \end{array} \right\}$$

2. Віріальне рівняння стану

2.11. Рівняння стану для плазми ТДГ

$$G_{\alpha\beta} \approx 1 - \psi_{\alpha\beta} \quad M = 2 \quad z_\alpha = -z_\beta$$

$$u \equiv U/(N\theta) = -\chi\kappa/2 \quad \delta = \chi\kappa$$

$$p \equiv P/(n\theta) = 1 + u/3$$

$$p = 1 - \frac{\delta}{6} - \frac{\delta^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi^{2k-3}}{(2k)!(2k-3)} + O(\kappa^3)$$

2. Віріальне рівняння стану

2.12. Віріальне рівняння стану. Задачі

$$pv = NkT \left(A + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots \right)$$

$$pv = E_1 + E_2 p + E_3 p^2 + \dots$$

$$p = n_0 kT \left(1 - \frac{1}{18n_D} \right)$$