Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #10

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.1. МВКв

- Змінні- $N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_k, \ldots$

$$1, 2, \ldots, k, \ldots.$$

* Стан : $\Psi(N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots)$

$$|\Psi|^2$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.2. МВКв

- Оператори знищення $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ і народження $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}$
- Співвідношення коммутації :

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{q}} - \eta\hat{a}^{+}_{\mathbf{q}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{kq}},$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{q}} - \eta\hat{a}_{\mathbf{q}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = 0,$$

$$\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{q}} - \eta\hat{a}^{+}_{\mathbf{q}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}} = 0,$$

Для бозонів $\eta = 1$ для ферміонів $\eta = -1$

δ_{kq} - символ Кронекера $(\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar)$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.3 Ψ -оператори

- амплітуда ймовірності $(1/\sqrt{V})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

$$\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

- Оператор $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ знищує частинку,
- Оператор $\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})$ народжує частинку в точці $\mathbf{r}$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.4 Ψ -оператори . Співвіднощення коммутації

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2) - \eta\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) - \eta\hat{\Psi}(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) = 0,$$

$$\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2) - \eta\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_1) = 0,$$

Оператори використовуються, коли теорія будується на основі чисел заповнення в координатному представленні

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.5 Числа заповнення та енергія

$$N_k = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}}; \quad n(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}).$$

$$\hat{N} = \sum_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})d^3r.$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} U_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k N_k + \sum_{\mathbf{k}} U_k N_k =$$

$$= -\int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\Delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})d^3r + \int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})U\hat{\Psi}(\mathbf{r})d^3r,$$

$$\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m = p^2/2m$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.6 Числа заповнення та енергія

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2V} \sum_{\{k\}} u_k \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}} \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}_1) \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 d^3 r_2.$$

$$u_k = \int \Phi(|\mathbf{r}|) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 r.$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.7 Оператор теорії збурень

$$R(\beta) = \exp\left[\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\right]\exp\left[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\right]$$

$$R(\beta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\beta}\ldots\int_0^{\beta} d\beta_1 \ldots d\beta_n T\left[\hat{H}_1(\beta_1)\ldots\hat{H}_1(\beta_n)\right]$$

$$R(\beta) = T\exp\left[-\int \hat{H}_1(\beta_1)d\beta_1\right]$$

10.1.8. Оператор теорії збурень

$$\hat{H}_1(\beta_1) = \frac{1}{2}\int d^3r_1, d^3r_2 \Psi^+(\mathbf{r}_1, \beta_1)\Psi^+(\mathbf{r}_2, \beta_1)\Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\Psi(\mathbf{r}_2, \beta_1)\Psi(\mathbf{r}_1, \beta_1),$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}, \beta) = \exp\left[\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\right]\Psi(\mathbf{r})\exp\left[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\right],$$

$$\bar{\Psi}^+(\mathbf{r}, \beta) = \exp\left[\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\right]\Psi^+(\mathbf{r})\exp\left[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\right].$$

$$\Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \beta_1 - \beta_2) = \delta(\beta_1 - \beta_2)\Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.9. Оператор теорії збурень

$$\Phi(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|,\beta_1-\beta_2)=\delta(\beta_1-\beta_2)\Phi(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|).$$

$$i=\{\mathbf{r}_i,\beta_i\},\ \int di=\int_0^{\beta}d\beta_i\int d^3r_i.$$

$$R(\beta)=T\exp\left[-\frac{1}{2}\int d1d2\Psi^{+}(1)\Psi^{+}(2)\Phi(1,2)\bar{\Psi}(2)\bar{\Psi}(1)\right]$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.10. Оператор теорії збурень

$$\left\langle T\left[\hat{H}_1(\beta_1)\ldots\hat{H}_1(\beta_n)\right]\right\rangle_0 = \frac{Sp\exp\left[-\beta(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\right]T\left[\hat{H}_1(\beta_1)\ldots\hat{H}_1(\beta_n)\right]}{Sp\exp\left[-\beta(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\right]}$$

$$\frac{Z_G}{Z_G^0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}C_n,$$

$$C_n = (-1)^n \int \prod_{i=1}^{n} di\,di' \left\langle T\left(\bar{\Psi}^+(i)\bar{\Psi}^+(i')\Phi(i,i')\bar{\Psi}(i')\bar{\Psi}(i)\right)\right\rangle_0$$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.11. Статичні середні

$$\left\langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right\rangle_0 = \langle N_k \rangle_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - \eta},$$

$$\left\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}} \right\rangle_0 = \langle 1 + \eta N_k \rangle_0 = \frac{1}{1 - \eta e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}},$$

для бозонів $\eta = 1$, для ферміонів $\eta = -1$

$\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$

10.1. Метод вторинного квантування

10.1.12. Незмінність шпура при циклічних переставленнях

$$Sp\left[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}}\right]=Sp\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\right]=$$

$$=Sp\left[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\right]$$

$$Sp\left[e^{-\beta(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}}\right]=e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}Sp\left[e^{-\beta(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\right]=$$

$$e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}Sp\left[e^{-\beta(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\left(1+\eta\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{k}}\right)\right].$$