



Інститут ядерних досліджень НАНУ

# ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

**Лекція #12**

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.1. Правила побудови діаграм

1.Зобразити всі з'язані топологічно нееквівалентні діаграми;

$$C_{2n-t,t}^{(n,1)}, C_{2(n+m-2)-t,t}^{(n+m-2,m)}$$

2.Встановлення порядку послідовності обернених температур для правильного визначення числа дірок і петель;

$$\beta > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_{n+m-2} \quad \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{n+m-2}$$

3. Проводиться інтегрування по координатам кожного вузла , та по спіновим змінним підсумовування  $i = (\mathbf{r}_i \beta_i), (di = d^3 r_i d\beta_i)$   
Інтегрування по  $\beta$  в інтервалі  $0 - \beta$

4.Кожній петлі поставити у відповідність сорт частинок, врахувати різні комбінації, та просумувати по всіх сортах частинок

5.В функціях Гріна спіни зберігаються..Кожній суцільній лінії приписати спіни та просумувати . Статистична вага  $g_a = 2s_a + 1$ ,

6. Результат множиться на  $(-1)^n \eta^m g_a^m$  n- число ліній, m-число петель

7..Взяти суму по формулі

$$[C_n]_{CB} = \sum_{t=2}^{n+1} C_{2n-t,t}^{(n,1)} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{t=m}^{n+m-1} C_{2(n+m-2)-t,t}^{(n+m-2,m)}$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.2. Причинна функція Гріна $(-\beta, \beta)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,

$$G(\mathbf{r}, \tau) = \Theta(\tau)G^+(\mathbf{r}, \tau) + \Theta(-\tau)G^-(\mathbf{r}, \tau),$$

$$\Theta(\tau) = 1 \text{ при } \tau > 0 \quad \Theta(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0$$

$$G(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(\mathbf{r}, \omega_n),$$

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\omega_n \tau} G(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \omega_n = \frac{\pi}{\beta} n.$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.3. Причинна функція Гріна. Ряд Фурье

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^\beta e^{i\omega_n \tau} G^+(\mathbf{r}, \tau) d\tau + \int_{-\beta}^0 e^{i\omega_n \tau} G^-(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right]$$

$$\tau \rightarrow \tau + \beta$$

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^\beta e^{i\omega_n \tau} G^+(\mathbf{r}, \tau) d\tau + \int_0^\beta e^{i\omega_n(\tau-\beta)} G^-(\mathbf{r}, \tau - \beta) d\tau \right]$$

$$G^-(\mathbf{r}, \tau - \beta) = \eta G^+(\mathbf{r}, \tau).$$

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \frac{1}{2} \left( 1 + \eta e^{-i\omega_n \beta} \right) \int_0^\beta e^{i\omega_n \tau} G^+(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

$$\omega_n = \begin{cases} (2n+1)\pi/\beta & \text{для } \text{ф} \\ 2n\pi/\beta & \text{для } \text{б} \end{cases}$$

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \int_0^\beta e^{i\omega_n \tau} G^+(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.4 Причинна функція Гріна. Термодинамічна границя

$$V \rightarrow \infty. \quad \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \dots \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \dots$$

$$G^+(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-\tau(\varepsilon_k - \mu)} (1 + \eta m_k), \quad G^+(\mathbf{k}, \tau) = -(1 + \eta m_k) e^{-\tau(\varepsilon_k - \mu)}$$

$$G(\mathbf{r}, \omega_n) = \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{i\omega_n - \varepsilon_k + \mu} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad G(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_k + \mu}$$

$$G(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)}}{i\omega_n - \varepsilon_k + \mu} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.5. Правила побудови діаграм

1. Інтегрування по координатам елементарне  $di = d^3r_i d\beta_i$

$$\delta(\sum_i \mathbf{k}_i) \delta(\sum_i \omega_i),$$

2. По всіх незалежних імпульсах і частотах проводиться інтегрування і підсумовування;

3. Результат множиться на

і береться сума по всіх сортах частинок

4. Не розглядаються всі зв'язані діаграми в яких мається хоча б одна петля з вузлом. Вони дорівнюють нулю, внаслідок електронейтральності плазми.

$$\sum_a n_a Z_a = 0 \qquad \sum_a Z_a \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = 0$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.6. Формули.Ряд Фур'є

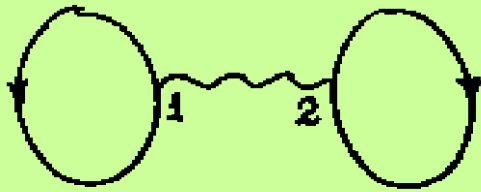
$$n_k e^{(\varepsilon_k - \mu)\tau} = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{i\omega_n - \varepsilon_k + \mu},$$

$$(1 + \eta n_k) e^{-(\varepsilon_k - \mu)\tau} = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_n \tau}}{i\omega_n - \varepsilon_k + \mu}.$$

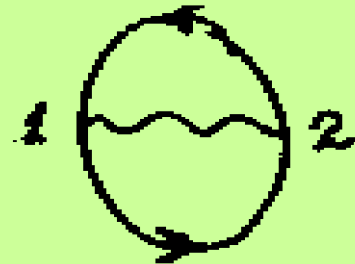
## 11.1. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.7. Діаграми

$$C_{0,2}^{(1,2)}$$



$$C_{0,2}^{(1,1)}$$



$$C_{0,2}^{(1,1)} = \eta_a g_a \int d1 d2 \Phi_{aa}(12) G_a(12) G_a(21).$$

$$C_{0,2}^{(1,1)} = \eta_a g_a \int_0^\beta d\beta_1 \int_0^\beta d\beta_2 \delta(\beta_1 - \beta_2) \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{e_a^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

$$\cdot \sum_{n_1, n_2} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6 \beta^2} \frac{e^{i[\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{n_1} (\beta_1 - \beta_2)]}}{i\omega_{n_1} - \varepsilon_{k_1} + \mu} \cdot \frac{e^{i[\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega_{n_2} (\beta_2 - \beta_1)]}}{i\omega_{n_2} - \varepsilon_{k_2} + \mu}.$$



## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.8. Діаграми. Активність. Обмінні ефекти.

$$\zeta_a = \lambda_a^{-3} e^{\beta\mu_a} \quad \lambda_a = (2\pi\beta\hbar^2 m_a^{-1})^{1/2}$$

$$\kappa_a = (4\pi\beta e_a^2 \zeta_a)^{1/2} \quad \lambda_a \kappa_a$$

$$n_{\mathbf{k}}^a \rightarrow \exp \left\{ \beta \left( \mu_a - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_a} \right) \right\} = \zeta_a \lambda_a^3 \exp \left( -\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m_a} \right),$$

$$\beta\mu_a \rightarrow -\infty, \quad \zeta_a \rightarrow N_a/V$$

$$z_a = e^{\beta\mu_a} < 1$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.9. Діаграми. Фур'є образ .

$$C_{0,2}^{(1,1)} = \frac{\eta_a g_a 4\pi e_a^2 V}{(2\pi)^6 \beta} \int \frac{d^3 k d^3 q}{k^2} \sum_{n_1, n_2} \frac{e^{i\omega_{n_1} 0}}{i\omega_{n_1} - \varepsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} + \mu} \cdot \frac{e^{-i\omega_{n_2} 0}}{i\omega_{n_2} - \varepsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} + \mu}.$$

$$\frac{1}{V} C_{0,2}^{(1,1)} = \frac{\eta_a g_a 4\pi e_a^2}{(2\pi)^6} \beta \int \frac{d^3 k}{k^2} d^3 q n_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^a n_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}^a.$$

$$u_{\mathbf{k}}^{ab} = \int d^3 r \frac{e_a e_b}{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{4\pi e_a e_b}{k^2}$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.10. Діаграми. .

$$C_{0,2}^{(1,1)} = \frac{\eta_a g_a 4\pi e_a^2 V}{(2\pi)^6 \beta} \int \frac{d^3 k d^3 q}{k^2} \sum_{n_1, n_2} \frac{e^{i\omega_{n_1} 0}}{i\omega_{n_1} - \varepsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} + \mu} \cdot \frac{e^{-i\omega_{n_2} 0}}{i\omega_{n_2} - \varepsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} + \mu}.$$

$$\frac{1}{V} C_{0,2}^{(1,1)} = \frac{\eta_a g_a 4\pi e_a^2}{(2\pi)^6} \beta \int \frac{d^3 k}{k^2} d^3 q n_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^a n_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}^a.$$

## 12. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 12.11. Діаграми. .

$$n_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^a n_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}^a = z_a^2 \sum_{s=0}^{\infty} (\eta_a z_a)^s \sum_{j=1}^{s+1} \exp \left\{ -\frac{\beta \hbar^2 (\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}}{2})^2}{2m_a} j - \frac{\beta \hbar^2 (\mathbf{q} - \frac{\mathbf{k}}{2})^2}{2m_a} (s + 2 - j) \right\}.$$

$$\frac{C_{0,2}^{(1,1)}}{V} \simeq \frac{\eta_a g_a \zeta_a}{8\pi\beta} (\lambda_a \kappa_a)^2$$