



Інститут ядерних досліджень НАНУ

# ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

**Лекція #13**

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

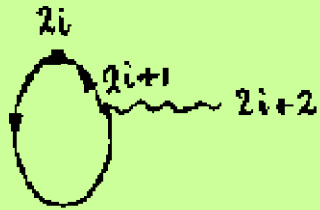
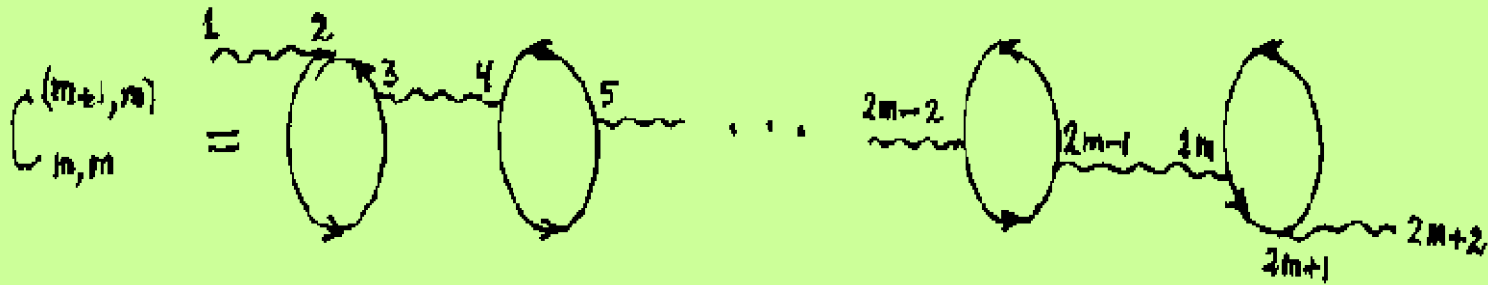
### 13.1. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta\Omega_0}{V} = \beta p_0 = \sum_c \zeta_c$$

$$\frac{\beta\Omega}{V} = \frac{\beta}{V} \left[ \Omega_0 + \Delta\Omega' + \Delta\Omega'' + \sum_{a,b} \Delta\Omega_{ab} \right]$$

# 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

## 13.1. Ефективний потенціал. Кільцеві діаграми .



$$= F_c(2i, 2i+2) = \int G^+(2i, 2i+1)G^-(2i+1, 2i)\Phi(2i+1, 2i+2)d(2i+1).$$

$$\Phi_{ab}^{eff}(1, 2') = \Phi_{ab}(1, 2') + \sum_{m=1}^{\infty} \int d2 \dots d(2m)d3 \dots d(2m+1)C_{m,m}^{(m+1,m)}$$

$$= \Phi_{ab}(1, 2') + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int \Phi_{ab}(1, 2)\Pi_{i=1}^m \sum_c F_c(2i, 2i+2)d(2i).$$

## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 13.5. Ефективний потенціал . $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2, \beta'_2 = \beta_2.$

$$\Phi_{ab}^{eff} (1, 2') = \Phi_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e_a e_b}{k^2} \left[ \frac{\Pi_{\mathbf{k}}^{(n)}}{k^2} \right]^m \exp \left[ i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{2\pi i n}{\beta} (\beta_1 - \beta_2) \right]$$

$$D_{\mathbf{k}}^{(n)} = 1 + \Pi_{\mathbf{k}}^{(n)} / k^2$$

## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 13.7. Ефективний потенціал .

$$\kappa^2 = \sum_c 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c \quad \kappa_e^2 = 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c; \quad \kappa_i^2 = \sum_c 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c$$

$$\Phi_{ab}^D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{-\kappa|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{(\lambda_e \kappa_e)^2}{24\pi} \right]^{-1/2}$$

### 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

#### 13.8. Ефективний потенціал . $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2, \beta'_2 = \beta_2.$

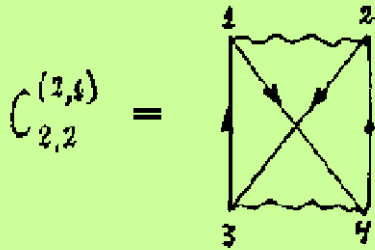
$$\Phi_{ab}^{eff} (1, 2') = \frac{2e_a e_b \gamma^2}{\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \int_0^\infty dk \cdot k \cdot \frac{\sin k |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{k^2 + \gamma^2 \kappa^2} - \frac{4e_a e_b}{\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{(\lambda_e \kappa)^2}{(2\pi)^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[2\pi n(\beta_1 - \beta_2)/\beta]}{n^2 + (\lambda_e \kappa_e)^2 / 16\pi^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin k |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \frac{e_a e_b \gamma^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{-\kappa \gamma |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{(\kappa_e \lambda_e)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[2\pi n(\beta_1 - \beta_2)/\beta]}{n^2 + (\lambda_e \kappa)^2 / 16\pi^3},$$

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{(\lambda_e \kappa_e)^2}{24\pi} \right]^{-1/2}$$

## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 13.10. Обмінні діаграми .

$$C_{2,2}^{(1,2)} = \eta_a g_a \int \Phi_{aa}(1, 2) \Phi_{aa}(3, 4) G(1, 3) G(2, 4) G(4, 1) G(3, 2) d1 d2 d3 d4.$$



$$\delta(\mathbf{k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left( e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right)_{\mathbf{k}=0} d^3 r = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

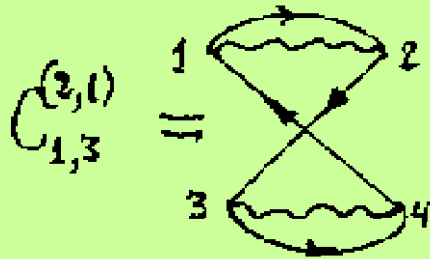
$$C_{2,2}^{(2,1)} = -\frac{g_a \eta_a V}{(2\pi)^9 \beta^2} \sum_{n_1, n_2, m} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q \frac{u_{\mathbf{q}}^a u_{\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^a}{(i\omega_{n_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \mu_a)(i\omega_{n_2} + i\omega_m - \varepsilon_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}} + \mu_a)}$$

$$\cdot \frac{1}{(i\omega_{n_2} - i\omega_m - \varepsilon_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}} + \mu_a)(i\omega_{n_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \mu_a)}.$$

## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 13.11. Обмінні діаграми .

$$\frac{1}{V} C_{2,2}^{(2,1)} = \frac{g_a \eta_a m_a \beta}{(2\pi)^9} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q}{\hbar^2(\mathbf{k}, \mathbf{q})} u_{\mathbf{k}_1}^a u_{\mathbf{q}}^a \left[ n_{\mathbf{k}_2 - \frac{\mathbf{k}_1}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}}^a n_{\mathbf{k}_2 + \frac{\mathbf{k}_1}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}}^a - n_{\mathbf{k}_2 - \frac{\mathbf{k}_1}{2} - \frac{\mathbf{q}}{2}}^a n_{\mathbf{k}_2 + \frac{\mathbf{k}_1}{2} - \frac{\mathbf{q}}{2}}^a \right]$$



$$\frac{1}{V} C_{1,3}^{(2,1)} = \frac{\eta_a g_a \beta^2}{(2\pi)^9} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q u_{\mathbf{q}}^a u_{\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^a n_{\mathbf{k}_1}^a n_{\mathbf{k}_2}^a n_{\mathbf{q} + \mathbf{k}_1}^a \left( 1 + \eta_a n_{\mathbf{q} + \mathbf{k}_1}^a \right)$$



### 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

#### 13.14. Термодинамічний потенціал. Малі обмінні ефекти.

$$\frac{1}{V}C_{2.2}^{(2.1)} \simeq -\frac{\ln 2\kappa^3}{16\pi\sqrt{2}}\nu_e^2\lambda_e\kappa, \quad \frac{1}{V}C_{2.2}^{(2.1)} \simeq -\frac{1}{6\sqrt{6}\pi^2}\zeta_e(\lambda_e\kappa_e)^4.$$

$$[C_2]_{\text{CB.}} \simeq \left[ 1 - \frac{\lambda_e\kappa}{4}\nu_e(1 - \nu_e) - \frac{\lambda_e\kappa}{4}\nu_e^2\frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\frac{-\beta\Delta\Omega^k}{V} = \frac{\kappa^3}{12\pi} \left[ 1 - \frac{3}{16}\lambda_e\kappa\nu_e(1 - \nu_e) - \frac{3}{16}\frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}}\lambda_e\kappa\nu_e^2 \right].$$

### 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

#### 13.15. Термодинамічний потенціал. Внески від кільцевих та обмінних діаграм.

$$\frac{\kappa^3}{12\pi} = \frac{\Gamma}{3} \sum_c Z_c^2 \zeta_c, \quad \Gamma = \beta e^2 \kappa \quad r_D = 1/\kappa.$$

$$-\frac{\beta \Omega_0}{V} = \beta p_0 = \sum_c \zeta_c$$

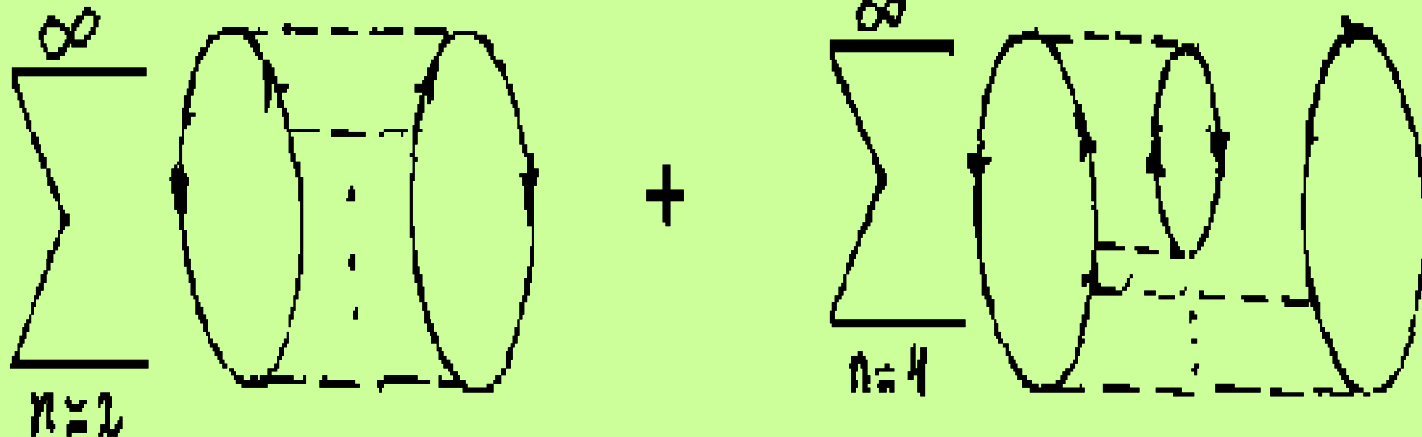
$$\frac{\Delta \Omega^k}{\Omega_0} = \frac{\Delta p^k}{p_0} = \frac{\sum_c Z_c^2 \zeta_c \Gamma}{\sum_c \zeta_c} \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{3}{16} (1 - \nu_e) \nu_e \lambda_e \kappa - \frac{3}{16} \frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}} \nu_e^2 \lambda_e \kappa \right]$$

$$\lambda_e \kappa \ll 1 \quad \frac{\Delta \Omega^D}{\Omega_0} = \frac{\Delta p^D}{p_0} = \frac{\sum_c Z_c^2 \zeta_c}{\sum_c \zeta_c}.$$

14. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

13.16. Драбинкове наближення .

$$\sum_{n=2} [C_n]_{\text{CB.}} \simeq \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} C_{2n+m-4, m}^{(n+m-2, m)} =$$



14. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

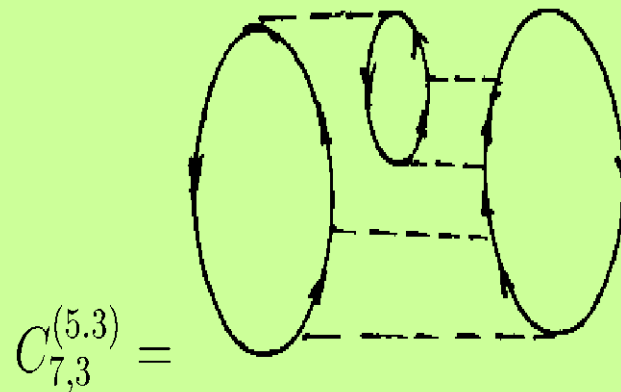
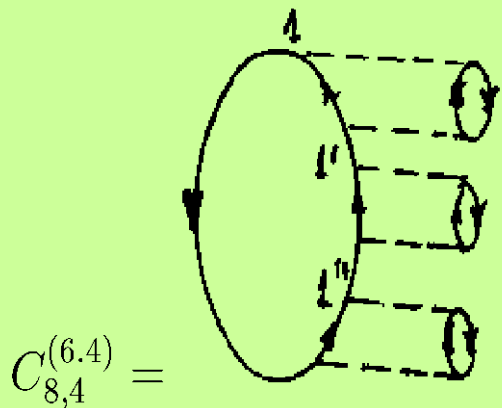
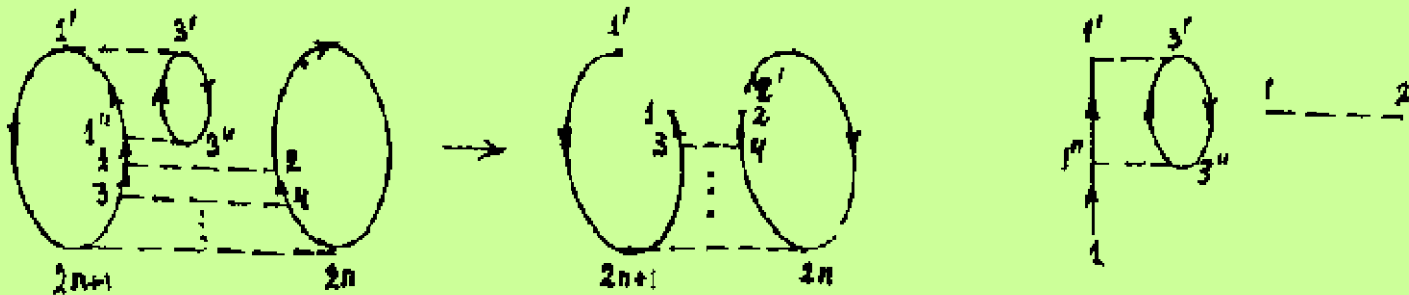
13.17. Драбинкове наближення .

$$G_2(1, 2; 1', 2') =$$

$$G_2(1, 2; 1', 2') = G^-(1, 1')G^-(2, 2') - \int G^+(1, 3)G^+(2, 4)\Phi(34)G_2(34; 1', 2')d3d4.$$

# 14. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

## 13.18. Драбинкове наближення .



## 13. Метод функцій Гріна та діаграмна техніка

### 13.14. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta\Delta\Omega'}{V} = \sum_c \frac{1}{2V} \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} C_{8,4}^{(6.4)} = -\frac{1}{18} \Gamma^3 \sum_c Z_c^6 \zeta_c = -\frac{\kappa^3}{12\pi^6} \Gamma^2 \sum_c Z_c^4 \nu_c$$

$$\begin{aligned} -\frac{\beta\Delta\Omega''}{V} &= \sum_c \frac{1}{2V} \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} C_{7,3}^{(5.3)} = \frac{\alpha}{24\pi} \frac{(\beta e^2)^2}{\kappa} \left( \sum_c Z_c \kappa_c^2 \right)^2 \left( \sum_c Z_c^2 \kappa_c^2 \right) = \\ &= \frac{\kappa^3}{12\pi} \frac{\alpha \Gamma^2}{2} \left( \sum_c Z_c \nu_c \right)^2 \left( \sum_c Z_c^2 \nu_c \right). \end{aligned}$$

$$\nu_c = \kappa_c^2 / \kappa^2$$