



Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #14

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.1. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta\Omega_0}{V} = \beta p_0 = \sum_c \zeta_c$$

$$\frac{\beta\Omega}{V} = \frac{\beta}{V} \left[\Omega_0 + \Delta\Omega' + \Delta\Omega'' + \sum_{a,b} \Delta\Omega_{ab} \right]$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.2. Термодинамічні функції .

Гранд-канонічний ансамбль - ТФ залежать від

$$\mu, \beta, V$$

(Мікро-) Канонічний ансамбль – ТФ залежать від

$$N, \beta, V$$

Припущення

$$(\lambda_{ek})^2 \ll 1$$

$$z = \exp(\beta\mu) \ll 1$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.3. АКТИВНІСТЬ .

$$\zeta_a = \lambda_a^{-3} e^{\beta \mu_a} \quad \lambda_a = (2\pi\beta\hbar^2 m_a^{-1})^{1/2}$$

$$\kappa^2 = \sum_c 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c \quad \kappa_e^2 = 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c \quad \kappa_i^2 = \sum_c 4\pi\beta e_c^2 \zeta_c$$

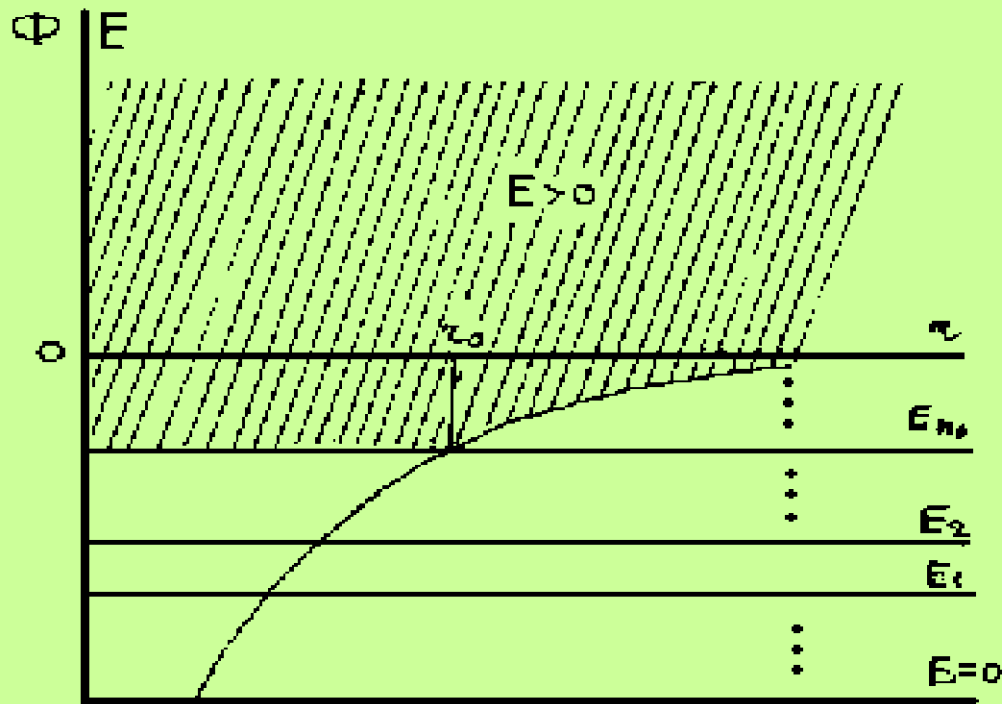
$$\frac{1}{V} \sum_n [C_n]_{CB} = -\zeta_a \zeta_b \lambda_{ab}^3 \beta \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma(Z_a^2 + Z_b^2) \right].$$

$$\int \sum_{\{n\}} \left\{ \Psi_n^*(\mathbf{r}) e^{-\beta E_n} \Psi_n(\mathbf{r}) - \Psi_n^{o*}(\mathbf{r}) e^{-\beta E_n^o} \Psi_n^o(\mathbf{r}) \right\} \Phi_{ab}^D(\mathbf{r}) d^3 r.$$

$$\lambda_{ab} = \left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m_{ab}} \right)^{1/2} \zeta^{n+1/2} \ln \zeta \quad \zeta^{n+1/2}$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.4. Квазікласичне наближення. Тяжіння до центру.



$$E_{n_0} \leq E < \infty$$

$$E < E_{n_0}$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.5. Доданки потенціалу . Однаково заряджені

частинки $\Phi_{a,b}^D > 0$

$$\frac{\beta \Delta \Omega_{ab}}{V} = 4\pi \beta \zeta_a \zeta_b \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma (Z_a^2 + Z_b^2) \right] \cdot \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \exp \left[-\beta \Phi_{a,b}^D \right] - 1 \right\} \Phi_{a,b}^D.$$

$$\Phi_{a,b}^D(r) \leq E < \infty,$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.6. Доданки потенціалу . Різномзаряджені частинки

$$0 \leq E < \infty$$

$$\frac{\beta \Delta \Omega_{ae}^{(+)}}{V} = 4\pi \beta \zeta_a \zeta_e \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma (Z_a^2 + Z_b^2) \right].$$

$$\cdot \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta \Phi_{a,e}^D) \Gamma \left(\frac{3}{2}; -\beta \Phi_{ae}^D(r) \right) - 1 \right\} \Phi_{a,e}^D,$$

$$\frac{\beta \Delta \Omega_{\kappa}^{(-)}}{V} = 4\pi \beta \zeta_a \zeta_e \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma (Z_a^2 + 1) \right]$$

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r_0} \exp(-\beta \Phi_{a,e}^D) \left[\Gamma \left(\frac{3}{2}; -\beta \Phi_{a,e}^D + \beta E_{n_0} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \Gamma \left(\frac{3}{2}; -\beta \Phi_{a,e}^D \right) \right] r^2 \Phi_{a,e}^D dr - \int_{r_0}^\infty \exp(-\beta \Phi_{a,e}^D) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{3}{2}; -\beta \Phi_{a,e}^D \right) - 1 \right] \Phi_{a,e}^D r^2 dr \right\}.$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.7. Доданки потенціалу . Різномзаряджені частинки

$$\begin{aligned} \frac{\beta \Delta \Omega_{a,e}}{V} &= \frac{\beta \Delta \Omega_{a,e}^{(+)}}{V} + \frac{\beta \Delta \Omega_{a,e}^{(-)}}{V} = \\ &= 4\pi\beta\zeta_a\zeta_e \int_0^{e^2} \frac{de^2}{e^2} \left[1 + \frac{3}{8}\Gamma(Z_a^2 + 1) \right] \left\{ \int_{r_0}^{\infty} [\exp(-\beta\Phi_{a,e}^D) - 1] \Phi_{a,e}^D r^2 dr + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{r_0} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta\Phi_{a,e}^D) \Gamma\left(\frac{3}{2}; -\beta\Phi_{a,e}^D + \beta E_{n_0}\right) - 1 \right] \Phi_{a,e}^D r^2 dr \right\}. \end{aligned}$$

14. Термодинамічний потенціал неідеальної плазми

14.8. Термодинамічний потенціал . Квазікласичне наближення

$$-\frac{\beta \Delta \Omega}{V} = a_1 \zeta^{3/2} + a_2 \zeta^2 \ln \zeta + a_3 \zeta^2 + a_4 \zeta^{5/2} \ln \zeta + a_5 \zeta^{5/2},$$

$$-\frac{\beta \Delta \Omega_{ab}}{V} = \frac{\kappa_a^2 \kappa_b^2}{12\pi \kappa} I_{ab}; \quad \kappa_a = \left(4\pi \beta Z_a^2 e^2 \zeta_a\right)^{1/2}$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.5. Інтеграл . Квазікласичне наближення

Для одного знаку заряду

$$I_{ab}(\Gamma) = \frac{3}{Z_a Z_b \Gamma} \int_0^1 dg \int_0^\infty \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma g^{3/2} (Z_a^2 + Z_b^2) \right] \cdot \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{Z_a Z_b \Gamma g}{t} e^{-g^{1/2} t} \right) \right\} e^{-g^{1/2} t} t dt.$$

Для різних знаків заряду

$$I_\kappa(\Gamma, t_0) = \frac{3}{Z_a \Gamma} \int_0^1 dg \int_0^\infty \left[1 + \frac{3}{8} \Gamma g^{3/2} (Z_a^2 + 1) \right] \left\{ \int_{t_0}^\infty t dt \left[\exp \left(\frac{Z_a \Gamma g}{t} e^{-g^{1/2} t} \right) - 1 \right] e^{-g^{1/2} t} + \int_0^{t_0} t dt \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(\frac{Z_a \Gamma g}{t} e^{-g^{1/2} t} \right) \Gamma \left(\frac{3}{2}; \frac{Z_a \Gamma g}{t} e^{-g^{1/2} t} - \frac{Z_a \Gamma g}{t_0} e^{-g^{1/2} t_0} \right) - 1 \right] e^{-g^{1/2} t} \right\}.$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.7. Кулонівські та дебаєвські рівні

$$E_{n_0} = E_{n_0}^k + E_{n_0}^{(1)}$$

$$E_{n_0}^k = -\frac{m_e Z_a^2 e^4}{2\hbar^2 n_0^2} = -\frac{Z_a^2 e^2}{2a_0 n_0^2}$$

$$E_{n_0} = E_{n_0}^k \left(1 - \frac{2a_0 \kappa n_0^2}{Z_a} \right) \quad a_0 = \hbar^2 / m_e e^2$$

$$n_0 \ll (Z_a / 2a\kappa)^{1/2}$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.8. Квазікласичне наближення..Точка повороту

$$E_{n_0} \simeq -Z_a e^2 \left(\frac{1}{r_0} - \kappa \right)$$

$$r_0 = \frac{2a_0 n_0^2}{Z_a}$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.9. Неперервний спектр.

$$E_{n_0} \leq E < \infty$$

$$I_{ab} = 1 + \frac{3}{16} (Z_a^2 + Z_b^2) + \frac{1}{2} Z_a Z_b \Gamma (2C + \ln(3Z_a Z_b \Gamma) - 2) + \frac{4}{9} (Z_a Z_b \Gamma)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(2C + \ln(4Z_a Z_b \Gamma) - \frac{35}{12} \right) + \frac{\Gamma^2}{8} Z_a Z_b (Z_a^2 + Z_b^2) \left(2C + \ln(3Z_a Z_b \Gamma) - \frac{11}{6} \right),$$

$$I_{a,e} = 1 + \frac{3}{16} \Gamma (Z_a + 1) - \frac{1}{2} Z_a \Gamma \left[2C - \ln(3Z_a \Gamma) - 2 - \frac{3Z_a^2 + 1}{8Z_a} - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \varepsilon^{1/2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \varepsilon^{-1/2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (Z_a \Gamma)^2 \left[\frac{8}{9} \left(2C + \ln 4Z_a \Gamma - \frac{35}{12} \right) - \frac{1}{4} \frac{Z_a^2 + 1}{Z_a} \left(2C + \ln(3Z_a \Gamma) - \frac{11}{6} \right) -$$

$$- \frac{15\sqrt{\pi}}{22} \varepsilon^{1/2} \left(1 - \frac{3}{10} \frac{Z_a^2 + 1}{Z_a} \right) + \frac{9\sqrt{\pi}}{7} \varepsilon^{-1/2} \left(1 - \frac{Z_a^2 + 1}{4Z_a} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^{-3/2} \right].$$

$$\varepsilon = \frac{Z_a \Gamma}{t_0} = \frac{Z_a^2 \Gamma}{2a_0 \kappa n_0^2}.$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.10. Неперевний спектр

$$I_{a,e} = I_{a,e}^{(+)} + I_{a,e}^{(-)} + \Delta_{a,e}, \quad \beta R_y = \frac{\beta m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{\varepsilon n_0^2}{Z_a^2}.$$

$$I_{ab}^{(+)} = 1 + \frac{3}{16} (Z_a^2 + Z_b^2) + \frac{1}{2} Z_a Z_b \Gamma (2C + \ln |3Z_a Z_b \Gamma| - 2) + \frac{4}{9} (Z_a Z_b \Gamma)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(2C + \ln |4Z_a Z_b \Gamma| - \frac{35}{12} \right) + \frac{\Gamma^2}{8} Z_a Z_b (Z_a^2 + Z_b^2) \left(2C + \ln |3Z_a Z_b \Gamma| - \frac{11}{6} \right),$$

$$I_{a,e}^{(-)} = -\frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Z_a^2 \beta R_y}} Z_a \Gamma \left\{ n_0 - \frac{6}{7} Z_a \Gamma \left(1 - \frac{Z_a^2 + 1}{4Z_a} \right) n_0 - \frac{2}{9} \frac{Z_a \Gamma}{Z_a^2 \beta R_y} n_0^3 \right\}$$

$$\Delta_{a,e} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} Z_a \Gamma \sqrt{Z_a^2 \beta R_y} \left\{ 1 - \frac{10}{11} Z_a \Gamma \left(1 - \frac{3}{10} \frac{Z_a^2 + 1}{Z_a} \right) \right\} \frac{1}{n_0}$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.10. Дискретний спектр $E_n < E_{n_0}$ $1 \leq n \leq n_0$

$$\beta\Phi_{a,e}^D \simeq -\frac{\beta Z_a e^2}{r} + Z_a \Gamma, \quad e^{-\beta E_n} \simeq e^{-\beta E_n^k} (1 - Z_a \Gamma),$$

$$I_{a,e}^{(-)} = -\frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Z_a^2 \beta R_y}} \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ 1 - \frac{6}{7} Z_a \Gamma \left(1 - \frac{Z_a^2 + 1}{4Z_a} \right) - \frac{2}{3} \frac{Z_a \Gamma}{Z_a^2 \beta R_y} n^2 \right\}.$$

$$-\frac{\beta \Delta \Omega_{\kappa}^{H(-)}}{V} = -\zeta_a \zeta_e \lambda_e^3 \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ \left[1 - \frac{6}{7} Z_a \Gamma \left(1 - \frac{Z_a^2 + 1}{4Z_a} \right) \right] Z_a^2 \beta R_y - \frac{2}{3} Z_a \Gamma n^2 \right\}$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.11. Внесок від від'ємного спектру енергії

$$Z_a^2 \beta R_y = n^2 \beta I_n$$

$$-\frac{\beta \Delta \Omega_{ae}^{(-)}}{V} = \frac{1}{2} \zeta_a \zeta_e \lambda_e^3 \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{\beta I_n} \left(\omega_n - Z_a \Gamma \omega_n^{(a)} \right)$$

$$\omega_n = 1 - e^{-\beta I_n} - \beta I_n e^{-\beta I_n},$$

$$\omega_n^{(a)} = \frac{2}{3} \left(1 - e^{-\beta I_n} \right) + \frac{4}{7} \beta I_n \left(\frac{1}{3} - \frac{3 Z_a^2 + 1}{8 Z_a} \right) F \left(1; \frac{11}{4}; -\beta I_n \right) - \frac{3}{7} \beta I_n \left(2 - \frac{1 Z_a^2 + 1}{2 Z_a} \right) e^{-\beta I_n}.$$

14. Термодинамічні функції неідеальної плазми

14.11. Ваговий множник

