



Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #15

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.1. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta\Omega_0}{V} = \beta p_0 = \sum_c \zeta_c$$

$$\frac{\beta\Omega}{V} = \frac{\beta}{V} \left[\Omega_0 + \Delta\Omega' + \Delta\Omega'' + \sum_{a,b} \Delta\Omega_{ab} \right]$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.2. Термодинамічні функції .

Гранд-канонічний ансамбль - ТФ залежать від

$$\mu, \beta, V$$

(Мікро-) Канонічний ансамбль – ТФ залежать від

$$N, \beta, V$$

Припущення

$$(\lambda_{ek})^2 \ll 1$$

$$z = \exp(\beta\mu) \ll 1$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.3. Термодинамічний потенціал .

$$\sum_{ab} \Delta\Omega_{ab} = \sum_{ab \neq e} \Delta\Omega_{ab} + 2 \sum_{a \neq e} \Delta\Omega_{ae} + \Delta\Omega_{ee}.$$

$$n_a = -\frac{\beta}{V} \zeta_a \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_a} \right)_{\beta, V} \quad (a = 1, 2, \dots).$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.4. Термодинамічний потенціал .

Для йонів

$$\nu_a = \kappa_a^2 / \kappa^2,$$

$$-\frac{\beta}{V} \sum_{a,b \neq e} \Delta \Omega_{ab} = \sum_{a,b \neq e} \frac{\kappa_a^2 \kappa_b^2}{12\pi \kappa} I_{ab}^+ = \frac{\kappa^3}{12\pi} \sum_{a,b \neq e} \nu_a \nu_b I_{ab}^+,$$

Для електрон-йонної взаємодії

$$\sum_{a \neq e} \Delta \Omega_{ae} = \sum_{a \neq e} (\Delta \Omega_{ae}^+ + \Delta \Omega_{ae}^-).$$
$$-\frac{\beta}{V} \sum_{a \neq e} \Delta \Omega_{ae}^+ = \frac{\kappa^3}{12\pi} \sum_{a \neq e} \nu_a \nu_e I_{ae}^+.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.5. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta}{V} \sum_{a,b} \Delta\Omega_{ab} = \frac{\kappa^3}{12\pi} \left\{ \sum_{a,b \neq e} \nu_a \nu_b I_{ab}^+ + 2 \sum_{a \neq e} \nu_a \nu_e I_{ae}^+ + \nu_e^2 I_{ee}^+ \right\} +$$

$$+ 2 \frac{\beta}{V} \sum_{a \neq e} \Delta\Omega_{ae}^- = \frac{\kappa^3}{12\pi} \sum_{a,b} \nu_a \nu_b I_{ab}^+ + 2 \frac{\beta}{V} \sum_{a \neq e} \Delta\Omega_{ae}^-.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.6. Термодинамічний потенціал .

$$\gamma_n = \sum_a \nu_a Z_a^n, \sigma_n = \sum_a \nu_a Z_a^n \ln |Z_a|, (n = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \nu_a \nu_b I_{ab}^+ &= 1 + \Gamma \left[\frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{1}{2} (2C - 2 + \ln 3\Gamma) \gamma_1^2 + \sigma_1 \gamma_1 \right] + \\ &+ \Gamma^2 \left[\frac{4}{9} (2C - \frac{35}{12} + \ln 4\Gamma) \gamma_2^2 + \frac{8}{9} \sigma_2 \gamma_2 + \frac{1}{4} (2C - \frac{11}{6} + \ln 3\Gamma) \gamma_1 \gamma_3 + \frac{1}{4} \gamma_1 \sigma_3 + \frac{1}{4} \sigma_1 \gamma_3 \right], \end{aligned}$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.7. Термодинамічний потенціал .

$$-\frac{\beta\Omega}{V} = \sum_a \zeta_a + \frac{\kappa^3}{12\pi} (1 + f_p) + \sum_{a \neq e} \zeta_a \zeta_e \lambda_e^3 \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{\beta I_n} \left(\omega_n - Z_a \Gamma \omega_n^{(a)} \right),$$

$$f_p(\Gamma) = \Gamma \left[\frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{1}{2} (2C - 2 + \ln 3\Gamma) \gamma_1^2 + \sigma_1 \gamma_1 \right] - \frac{3}{16} \frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}} \nu_e^2 \lambda_e \kappa +$$

$$-\frac{3}{16} \nu_e (1 - \nu_e) \lambda_e \kappa + \Gamma^2 \left[\frac{4}{9} \left(2C - \frac{35}{12} + \ln 4\Gamma \right) \gamma_2^2 + \frac{1}{4} \left(2C - \frac{11}{6} + \ln 3\Gamma \right) \gamma_1 \gamma_3 + \right. \\ \left. + \frac{8}{9} \sigma_2 \gamma_2 + \frac{1}{4} \gamma_1 \sigma_3 - \frac{1}{6} \gamma_4 + \frac{1}{4} \gamma_3 \sigma_1 + \frac{\alpha}{2} \gamma_1^2 \gamma_2 \right].$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.8. Плазма водню та воднеподібна плазма.

$$(a = i, e). \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \nu_i - \nu_e, \quad \gamma = 1 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$f_p(\Gamma) = \Gamma \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}(2C - 2 + \ln 3\Gamma)(\nu_i - \nu_e)^2 \right] - \frac{3}{16} \lambda_e \kappa \nu_e^2 - \frac{3}{16} \frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}} \lambda_e \kappa \nu_e^2 +$$

$$+ \Gamma^2 \left[\frac{4}{9} \left(2C - \frac{35}{12} + \ln 4\Gamma \right) + \frac{1}{4} \left(2C - \frac{11}{6} + \ln 3\Gamma \right) (\nu_i - \nu_e)^2 - \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{2} (\nu_i - \nu_e)^2 \right].$$

$$-\frac{\beta\Omega}{V} = \beta p = \zeta_i + \zeta_e + \frac{\kappa^3}{12\pi} (1 + f_p) + \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{\beta I_n} \left(\omega_n - \Gamma \omega_n^{(i)} \right)$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.9. Плазма водню та воднеподібна плазма.

Електронейтральність $n_i = n_e$ $\nu_e = \kappa_e^2 / \kappa^2$
 $\nu_i = \kappa_i^2 / \kappa^2$

$$n_a = -\frac{\beta}{V} \zeta_a \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_a} \right)_{\beta, V} \quad (a = 1, 2, \dots). \quad \zeta_i - \zeta_e = (\kappa^3 / 4\pi\Gamma)(\nu_i - \nu_e)$$

Мала величина $\nu_i - \nu_e$

$$\nu_i = \nu_e \left(1 - \frac{1 + \ln 2}{8\sqrt{2}} \lambda_e \kappa \Gamma \right) \quad \zeta_i = \zeta_e \left(1 - \frac{1 + \ln 2}{8\sqrt{2}} \lambda_e \kappa \Gamma \right)$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.10. Плазма водню та воднеподібна плазма.

Внесок до ТП від дискретного спектру (статсума Планка-Ларкіна)

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp(-\beta \Delta E_n) \omega_n(x),$$

Поправка $\varphi = \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp(-\beta \Delta E_n) \omega_n^{(i)}(x)$

$$x = \beta I_n = \beta I - \beta \Delta E_n$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.11. Плазма водню та воднеподібна плазма.

$$-\frac{\beta\Omega}{V} = \beta p = (\zeta_i + \zeta_e) \left[1 + \frac{\Gamma}{3}(1 + f_p) \right] + \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 Q (1 - \Gamma\varphi) e^{\beta I},$$

$$n_i = n_e = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_e) \left[1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n) \right] + \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 Q \left(1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi \right) e^{\beta I}.$$

$$f_p = \frac{3}{8}\Gamma + \frac{4}{9}\Gamma^2 \left(2C - \frac{35}{12} + \ln 4\Gamma \right) - \frac{1}{6}\Gamma^2 - \frac{3}{16}\lambda_e \kappa \nu_i \nu_e - \frac{3}{16} \frac{1 + \ln 2}{\sqrt{2}} \lambda_e \kappa \nu_e^2$$

$$f_n = \frac{\Gamma}{2} + \Gamma^2 \left[\frac{20}{27} \left(2C - \frac{35}{12} + \ln 4\Gamma \right) - \frac{7}{54} \right] - \frac{1}{8}\lambda_e \kappa \nu_e.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.12. Плазма водню та воднеподібна плазма.

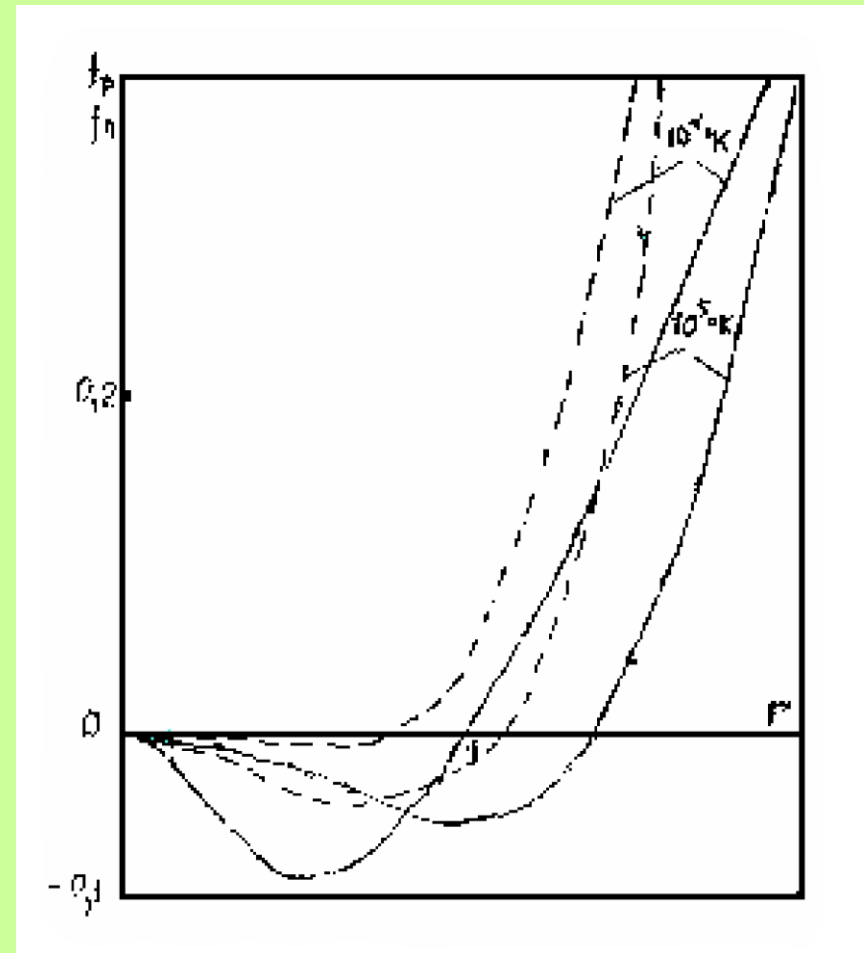
$$\frac{\beta E}{V} = \frac{\beta}{V} \left(\frac{\partial \beta \Omega}{\partial \beta} \right)_{V, \zeta_i, \zeta_e} - \frac{3}{2} \frac{1}{V} \sum_{a=i,e} \zeta_a \left(\frac{\partial \beta \Omega}{\partial \zeta_a} \right)_{\beta, V}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta E}{V} = & \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_e)(3 + \beta I) + \frac{1}{4}(\zeta_i + \zeta_e)\Gamma [1 + 4f_p - 3f_n + \beta I(1 + f_n)] + \\ & + \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 Q e^{\beta I} \left[\frac{3}{2} - \beta \frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} + \Gamma \varphi \left(\beta \frac{\partial \ln \varphi Q}{\partial \beta} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \beta I \right) \right]. \end{aligned}$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.13. Плазма водню та воднеподібна плазма

- Відхилення від дебаєвської поправки. Суцільні криві f_p , пунктирні f_n .



15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.14 Хімічна модель.

$$n_i^* = n_i + n_o = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_e) \left[1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n) \right] + \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 Q \left(1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi \right) e^{\beta I}.$$

$$n_i = n_e = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_e) \left[1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n) \right],$$

$$n_o = \zeta_i \zeta_e \lambda_e^3 Q \left(1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi \right) e^{\beta I}.$$

$$n_i^* + n_e^* \rightarrow n_o \quad \beta \rightarrow \infty;$$

$$n_i^* + n_e^* \rightarrow n_i + n_e \quad \beta \rightarrow 0.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.15 Хімічна модель. Закон діючих мас. Рівняння Сага.

$$\frac{n_i n_e}{n_o} = \frac{\left[1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)\right]^2}{1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi} \frac{\lambda_e^{-3}}{Q} e^{-\beta I}.$$

$$\mu_i + \mu_e = \mu_o.$$

$$\mu_i = \frac{1}{\beta} \ln \frac{n_i \lambda_i^3}{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)}, \quad \mu_e = \frac{1}{\beta} \ln \frac{n_e \lambda_e^3}{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)},$$

$$\mu_o = \frac{1}{\beta} \ln \frac{n_o \lambda_o^3 e^{-\beta I}}{Q \left(1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi\right)}$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.16 Хімічна модель. Закон діючих мас. Рівняння Саха.

$$1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n) \simeq \exp \left[\frac{\Gamma}{2}(1 + f_n) \right], \quad 1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi \simeq \exp \left(-\frac{5}{4}\Gamma\varphi \right)$$

$$\frac{n_i n_e}{n_0} = \frac{1}{Q} \lambda_e^{-3} \exp \left[-\beta(I - \Delta I) \right],$$

$$\Delta I = \frac{1}{\beta} \Gamma + \frac{\Gamma}{\beta} f_n + \frac{1}{\beta} \frac{5}{4} \Gamma \varphi$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.17 Хімічна модель. Закон діючих мас. Рівняння Саха.

$$K = \frac{1}{Q} \lambda_e^{-3} \exp [-\beta(I - \Delta I)]$$

$$n_i^2 = K(n_a - n_i) \quad \left(\frac{n_i}{n_o}\right)^2 + \frac{K}{n_a} \frac{n_i}{n_a} - \frac{K}{n_a} = 0.$$

$$-\frac{\beta\Omega}{V} = \beta p = (n_i + n_e) \frac{1 + \frac{\Gamma}{3}(1 + f_p)}{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)} + n_o \frac{1 - \Gamma\varphi}{1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi},$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.18 Хімічна модель. Закон діючих мас. Рівняння Сага.

$$\frac{\beta E}{V} = \frac{1}{2}(n_i + n_e) \frac{3 + \beta I}{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)} + \frac{1}{4}(n_i + n_e) \frac{\Gamma}{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)} [1 + 4f_p - 3f_n + \beta I(1 + f_n)] +$$

$$+ n_o \frac{1}{1 - \frac{5}{4}\Gamma\varphi} \left[\frac{3}{2} - \beta \frac{d \ln Q}{d\beta} + \Gamma\varphi \left(\beta \frac{d \ln \varphi Q}{d\beta} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\beta I \right) \right]$$

$$\gamma = \beta e^2 [4\pi\beta e^2(n_i + n_e)]^{1/2} \quad \gamma = \Gamma \sqrt{1 + \frac{\Gamma}{2}(1 + f_n)}.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.19 Хімічна модель. Слабонеідеальна плазма

$$\varphi = 0 \quad \Gamma \simeq \gamma \ll 1$$

$$\beta p = n_o + n_i + n_e - (n_i + n_e) \frac{\gamma}{6}$$

$$\frac{\beta E}{V} = \frac{3}{2}(n_o + n_i + n_e) - (n_i + n_e) \frac{1}{2} \gamma - n_o \beta \frac{d \ln Q}{d \beta} + n_i \beta I$$

$$\frac{n_i n_e}{n_o} = \frac{1}{Q} \lambda_e^{-3} \exp[-\beta(I - \Delta I)], \quad \Delta I = \frac{1}{\beta} \gamma.$$

15. Термодинамічні функції неідеальної плазми

15.20 Хімічна модель. “Ідеальність” неідеальної плазми

$$\varphi \bar{\Gamma}$$

$$\beta p - (n_o + n_i + n_e) \simeq \frac{1}{4} \Gamma \varphi n_o - \frac{1}{6} \Gamma (n_i + n_e).$$