



Інститут ядерних досліджень НАНУ

# ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

**Лекція #16**

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.1. Умови термодинамічної (макроскопічної) рівноваги

Механічна рівновага

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}} = 0;$$

Теплова рівновага

$$\theta(\mathbf{q}) = \text{const};$$

Відсутність процесів перенесення

$$\mu(\mathbf{q}) = \text{const},$$

$\mathbf{q}$  -макроскопічна координата

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.2. Механічна рівновага

Стійка рівновага  $\partial P / \partial \rho > 0$

Байдужа рівновага  $\partial P / \partial \rho = 0$

1)  $\partial \rho / \partial q = 0 \quad \rho = \text{const.}$

2)  $\partial \rho / \partial q = 0 \quad \partial \rho / \partial q = \infty.$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.3. Рівноважна двофазна система

$$\theta_A = \theta_B = \theta; \quad \mu_A = \mu_B = \mu; \quad P_A(\rho_A, \theta) = P_B(\rho_B, \theta)$$

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_A^*, & \rho_A^* \leq \rho_A; \\ v\rho_A + (1-v)\rho_B, & 1 > v > 0; \\ \rho_B^*, & \rho_B^* \geq \rho_B, \end{cases}$$

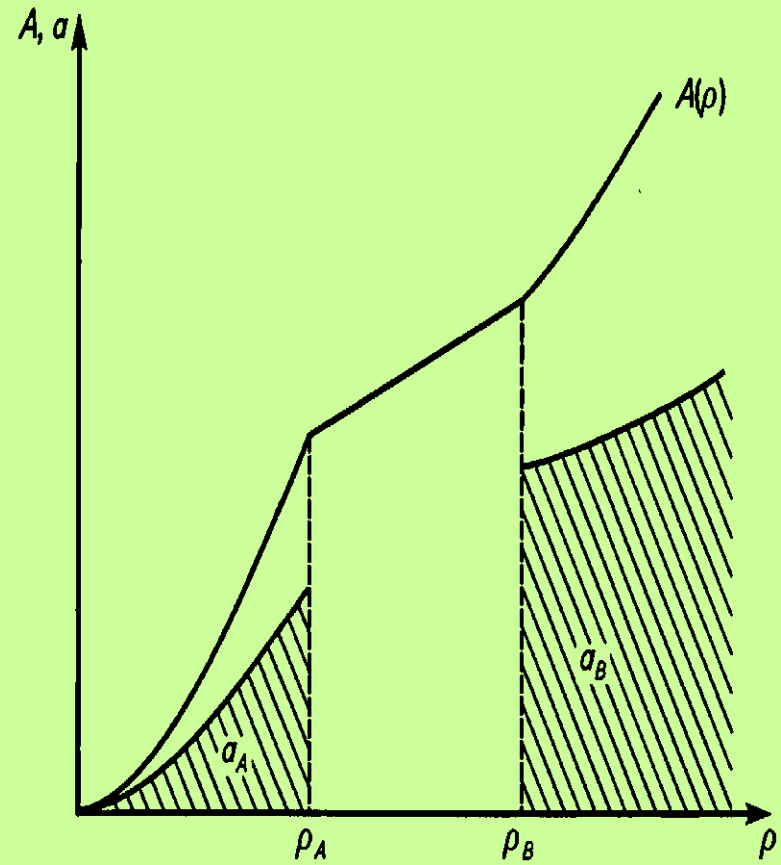
$$v = V_A/V, \quad V_B = V(1 - v).$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.4. Рівноважна двофазна система

$$\bar{a} = \frac{A}{V} = \nu a_A + (1 - \nu) a_B$$

$$a_A = a(\rho_A); \quad a_B = a(\rho_B),$$



## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.5. Формула Клапейрона-Клаузіуса

$$P(\rho_A) = P(\rho_B); \quad \mu_A(\rho_A) = \mu_B(\rho_B).$$

$$d\mu = sd\theta + vdP \quad v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{N}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{q}{\theta\Delta v}$$

$$\Delta v = v_B - v_A \quad q = \theta(s_B - s_A)$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.6. Статистична теорія ФП. Розподілення Гіббса

$$F_{(N)} = N_A f_A + N_B f_B \quad E_{(N)} = N_A e_A + N_B f_B.$$

$$G_{(N)} = \exp\left[-\frac{1}{\theta}(E_{(N)} - F_{(N)})\right] = \exp\left[-\frac{N}{\theta}(e - f)\right],$$

$$G_{(N)} = \exp\left\{-\frac{V}{\theta}\left[\nu(e_A - f_A) + (1 - \nu)(e_B - f_b)\right]\right\} = G_A G_B,$$

$$G_A(\rho_A^*, \theta) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-N_A(e_A^* - f_A^*)}{\theta}\right), & \rho_A^* \leq \rho_A \\ 1, & \rho_A^* > \rho_A; \end{cases} \quad G_B(\rho_B^*, \theta) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-N_B(e_B^* - f_B^*)}{\theta}\right), & \rho_B^* \geq \rho_B \\ 1, & \rho_B^* < \rho_B. \end{cases}$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.7. Кінетична теорія ФП. Флуктуації

$$\delta\rho(\tilde{t}, K) \equiv \delta\rho(0) \left\{ \tilde{A} e^{-K^2 D \tilde{t}} + e^{-K^2 \Gamma \tilde{t}} \left[ (\tilde{B} + \tilde{C}) \cos(K \Lambda \tilde{t}) + i(\tilde{B} - \tilde{C}) \sin(K \Lambda \tilde{t}) \right] \right\},$$

$$D = \frac{\beta}{1 + K^2}; \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\varepsilon - D); \quad \Lambda = \sqrt{1 + (1 - 2D\Gamma - \Gamma^2) K^2}$$

$$\beta = \frac{a(\partial P/\partial \rho)_\theta + b(\partial P/\partial \theta)_\rho}{c_s \sqrt{a\eta^*}} > 0; \quad \varepsilon = \frac{a + \eta^*}{\sqrt{a\eta^*}} > 0, \quad \eta^* = (\xi + 4\eta/3);$$
$$b = \chi/\rho c_V; \quad a = \lambda/\rho c_V;$$

$$\tilde{t} = \frac{c_s^2}{\sqrt{a\eta^*}} t \quad K = \frac{a\eta k^2}{c_s^2} \quad \beta = \varepsilon(1 + K^2)$$



## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.8. Кінетична теорія ФП. Зародок

$$R = \frac{16\pi\sigma^3}{2(P - P_0)^2} \quad \delta P = P - P_0$$

$$P = P_0 \quad \beta = \varepsilon$$

$$a \frac{\partial P}{\partial \rho} + b \frac{\partial P}{\partial \theta} = c_s (a + \eta^*).$$

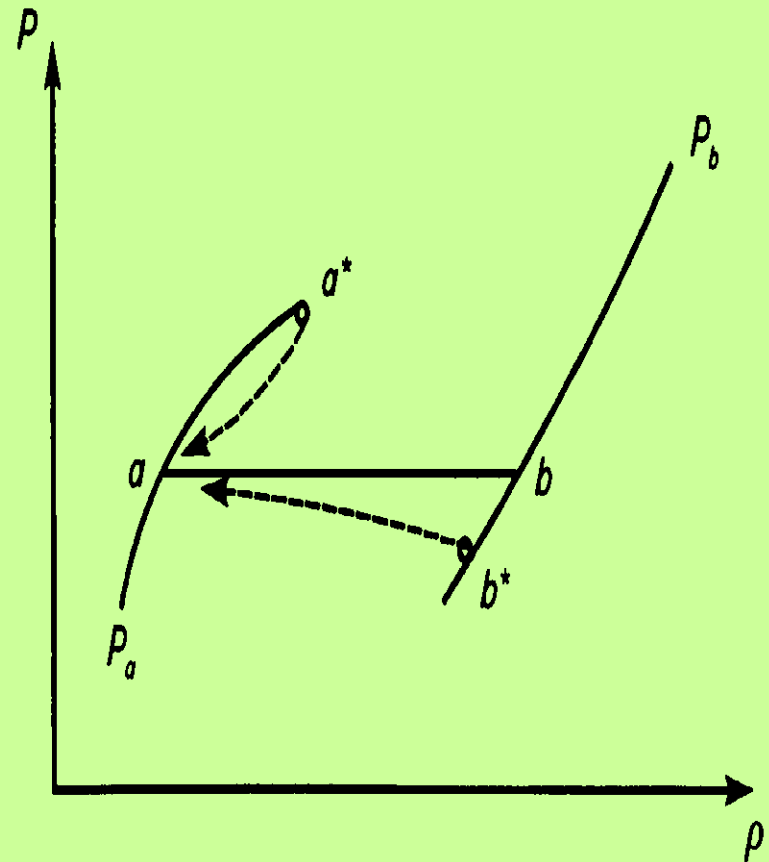
## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.9. Метастабільна фаза

$$\rho \frac{ds}{dt} = \xi \left( \frac{dv_\alpha}{dq_\alpha} \right)^2$$

$$\frac{dv_\alpha}{dq_\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\sqrt{\frac{\rho ds}{\xi dt}}$$



## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.10. Критичні явища (ФП 2го роду)

$$\text{ФП 1го роду} \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0 \quad \rho_A < \bar{\rho} < \rho_B$$

$$\text{ФП 2го роду} \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0 \quad \rho = \rho_c, \theta = \theta_c$$

Критична точка

$$\frac{\partial P(\rho_c, \theta_c)}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial^2 P(\rho_c, \theta_c)}{\partial \rho^2} = 0,$$

$$\kappa_\theta = \frac{\theta}{\partial P / \partial \rho} = \infty. \quad c_0 = 0$$

$$c_0 \sim \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.11. Критична точка. Кроссовер

$$\zeta = \left| \frac{\rho - \rho_c}{\rho_c} \right|; \quad \tau = \left| \frac{\theta - \theta_c}{\theta_c} \right|$$

$$a(\rho, \theta) = a(\rho_c + \Delta\rho, \theta_c + \Delta\theta)$$

$$\Delta a = \Gamma_a^\rho \zeta^{\chi_\rho} + \Gamma_a^\theta \tau^{\chi_\theta} + \sum a_{ij} \zeta^i \tau^j$$

$$\mathbb{R} = \sqrt{\zeta^2 + \tau^2}$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.12. Ван-дер-Ваальса модель

$$p = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

$$v = \frac{1}{n}$$

$$v = V/N$$

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} k_B T - na$$

$$\frac{S}{N} = k_B \ln \left[ (v - b) \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^3} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} k_B$$

Критична точка

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0.$$

$$v_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad k_B T_c = \frac{8a}{27b}$$

$$K_c = \frac{RT_c}{p_c v_c} = \frac{8}{3}$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.13. Ван-дер-Ваальса модель

Критична точка

$$\tilde{p} = p/p_c, \tilde{v} = v/v_c, \tilde{T} = T/T_c,$$

$$\left( \tilde{p} + \frac{3}{\tilde{v}^2} \right) \left( \tilde{v} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8k_B \tilde{T}}{3}.$$

**Table 3.2** Critical temperature and critical volumes for several gases

Element	H <sub>2</sub>	He4	N <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O
$T_c$ [K]	3.3	5.2	126	304	647
$p_c$ [MPa]	1.3	0.23	3.4	7.4	22.1

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.14. Кулонівська модель

#### Критична точка

$$b_{\text{cr}} = \frac{e^2}{\varepsilon_{\Gamma} k_{\text{B}} T} = 16 .$$

$$T^* = 1/16 = 0.0625 .$$

$$\mu_{\text{ex}} = \mu_{+-} \approx -\frac{e^2}{\varepsilon_{\Gamma} k_{\text{B}} T (1 + \kappa a)}$$

$$2 + n^* \frac{\partial(\beta\mu_{+-})}{\partial n^*} > 0 ,$$

$$T \leq T_{\text{cr}} = 16 \frac{e^2}{\varepsilon_{\Gamma} k_{\text{B}} a} .$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.14. Спільна К-ВдВ модель

$$F = n_0 k_B T \left[ \ln \left( \frac{n_0 \Lambda_0^3}{\sigma(T)} \right) - 1 \right] + n_i k_B T \left[ \ln \left( \frac{n_i \Lambda_i^3}{g_i} \right) - 1 \right] \\ + n_e k_B T \left[ \ln \left( \frac{n_e \Lambda_e^3}{g_e} \right) - 1 \right] - k_B T V \frac{\kappa^3}{12\pi} \tau \left( \frac{\kappa \Lambda}{8} \right) \\ - k_B T n_0 \ln(1 - n_0 B) - A n_0^2 - W n n_0 .$$

- Repulsion of atoms  $B$ .
- Attraction of atoms  $A$ .
- Strength of atomic polarizability  $W$ .



## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.15. Спільна К-ВдВ модель

Рівняння Сага

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = n \Lambda^3 \sigma(T) \exp \left[ - \frac{\Delta I(\alpha)}{k_B T} \right]$$

$$\Delta I(\alpha) = \frac{e^2 \kappa \sqrt{\alpha}}{k_B T [1 + \kappa a(T) \sqrt{\alpha}]} - \frac{(1 - \alpha)nB}{1 - (1 - \alpha)nB} + \log [1 - (1 - \alpha)nB] + (1 - \alpha)nA - Wn(2\alpha - 1)$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.16. Спільна К-ВдВ модель

Критична точка ВдВ

$$10^1 < T_{\text{cr}} < 10^3 \text{ К}$$

$$T_{\text{vdW}} = \frac{8a}{27k_B b}, \quad n_{\text{vdW}} = \frac{1}{3b}.$$

Критична точка ПП

$$T_{\text{ppt}} = \frac{e^2}{8k_B a_B}, \quad n_{\text{ppt}} = a_B^{-3}.$$

## 16. Фазові переходи та критичні явища

### 16.17. Нестійкість ПП

Isotherm

$T = 10\,000$  K for hydrogen plasmas, showing the PPT instability

