



Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Семінарське (практичне) заняття #5

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

5. Рівняння стану

5.1. Система однакових квантових частинок

Гамільтоніан $H = H_0 + H_1,$

$$H_0 = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \right), \quad H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(r_{ij}), \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

Велика статсума $\Xi = \text{Sp} \exp (\alpha N_{\text{оп}} - \beta H),$

Потенціал $q = \ln \Xi,$

$$q = \beta p v \quad N = \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right)_{v, T}$$

5. Рівняння стану

5.2. Сума Слетера

$$W_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = N! \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}_i) \exp(-\beta H_N) \varphi_n(\mathbf{r}_i),$$

$$W(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i) = \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}_i) \exp(-\beta H_N) \psi_n(\mathbf{r}'_i), \quad \varepsilon_P = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\Delta(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i) = \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}_i) \psi_n(\mathbf{r}'_i),$$

$$\Delta_{qu}(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i) = \frac{1}{N!} \sum_P \varepsilon_P \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}_{Pi}) \psi_n(\mathbf{r}_i),$$

1) $W_N = N! W(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_i);$

2) $W(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i) = \exp(-\beta H') \Delta(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i),$

5. Рівняння стану

5.3. Сума Слетера. Ідеальний фермі-газ $H_1 = 0$

$$W_N^{(0)}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N! v_0^N} \sum_P \varepsilon_P \exp \left[-\frac{\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{Pi})^2}{\lambda^2} \right],$$

$$\lambda = \left(\frac{2\beta\hbar^2}{m} \right)^{1/2} \quad v_0 = \pi^{3/2} \lambda^3.$$

Для бозонів $\varepsilon_P = 1$

5. Рівняння стану

5.4.Кластери $(N_1 + N_2 = N)$

$$U(r) = 0, \quad r > D \quad \hat{D} \gg \lambda.$$

$$W_N = W_{N_1} W_{N_2}$$

Задача- ДОВЕСТИ ЦЕ

5. Рівняння стану

5.5.Рівняння Блоха

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i)}{\partial \beta} = -H'W(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i)$$

Задача- ДОВЕСТИ ЦЕ

5. Рівняння стану

5.6. Потенціал

$$e^{\mathcal{Q}} = \sum_n \frac{e^{n\alpha}}{n!} \int W_n(\mathbf{r}_i) d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N.$$

Задача- ДОВЕСТИ ЦЕ

5. Рівняння стану

5.7. Класична границя $\hbar \rightarrow 0$ $\lambda \rightarrow 0$

$$W_N(\mathbf{r}_i) = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \exp g(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_{\mathbf{p}i}).$$

$$g(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}'_i) = \ln [\exp(-\beta H') \prod_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)].$$

$$W_N^{\text{кл}} = v_0^{-N} \exp(-\beta H_1)$$

Задача- ДОВЕСТИ ЦЕ

5. Рівняння стану

5.8. Рівняння стану

$$pv = NkT \left(A + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots \right)$$

$$B = \frac{Nv_0^2}{2v} \int [W_2(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) - W_1(\mathbf{r}_1) W_1(\mathbf{r}_2)] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2;$$

$$B = -\frac{Nv_0^2}{2v} \int [2 \exp(-\beta H'_2) \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) - \exp(-\beta H_2^{(0)'}) \Delta(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}'_1) \Delta(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_2)]_{\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2.$$

5. Рівняння стану

5.9. Віріальні коефіцієнти

Високі температури

$$B = B_{\text{КВТ}} + \hbar^2 B_1 + \dots,$$

Розкладення

$$B = B_{id} + B_{nonid} \quad B_{id} = \left(\frac{-}{+} \right) \frac{Nv_0}{2^{5/2}}$$

$$B_{nonid} = - \frac{Nv_0^2}{v} [\text{Sp exp}(-\beta H_2) - \text{Sp} \tilde{\text{exp}}(-\beta H_2^{(0)})],$$

$$B_{nonid} = - \frac{2^{3/2}}{\pi} Nv_0 \sum_l (2l+1) \delta_l \int_0^\infty \frac{d\eta}{dk} \exp\left(-\frac{\beta \hbar^2 k^2}{m}\right) dk,$$