



Інститут ядерних досліджень НАНУ

# ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

**Семінарське (практичне) заняття #7**

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

## 7. Фазові переходи

### 7.1. Великий канонічний ансамбль

Потенціал  $q = \ln \Xi$ ;  $q = \beta p v$

$$n = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right)_{v, T} \quad n = N/v = 1/v_1, \quad v_1 = v/N$$

$$\Xi = \text{Sp} \exp (\alpha N_{\text{оч}} - \beta H)$$

Ідеальний бозе-газ

$$q = - \sum_j \ln (1 - t_j), \quad t_j = \exp (\alpha - \beta E_j).$$

$$\beta \rightarrow \frac{1}{kT}, \quad \gamma \rightarrow -\frac{\mu}{kT}, \quad -kT \ln Z \rightarrow F, \quad kT \ln \Xi \rightarrow p v$$

## 7. Фазові переходи

### 7.2. Великий канонічний ансамбль

Середнє число заповнення

$$\langle n_j \rangle = \left\{ \exp \left[ \frac{(E_j - \mu)/kT}{\pm 1} \right] \right\}^{-1}$$

$$\langle n_j \rangle = - \frac{\partial \ln \Xi}{\partial (E_j/kT)}$$

$$\frac{pv}{kT} = \ln \Xi = \pm \sum_j \ln (1 \pm t_j),$$

$$t_j \equiv \exp [(\mu - E_j)/kT]$$

$$\beta \rightarrow \frac{1}{kT}, \quad \gamma \rightarrow -\frac{\mu}{kT}, \quad -kT \ln Z \rightarrow F, \quad kT \ln \Xi \rightarrow pv$$

## 7. Фазові переходи

### 7.3. Рівняння стану для бозе-газа

$$\beta p v_0 = f(y) \quad y = e^{\alpha}, \quad \frac{v_0}{v_1} = y f'(y).$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^{5/2}} \quad v_0 = \pi^{3/2} \lambda^3, \quad \lambda = \left( \frac{2\beta \hbar^2}{m} \right)^{1/2}$$

Віріальне рівняння стану

$$x = v_0/v_1 \quad x = y f'(y) \quad \frac{f(y)}{y f'(y)} = \frac{f}{x} = \sum a_n x^n$$

$$\beta p v_1 = N \left[ 1 - \frac{x}{2^{5/2}} + \dots \right]$$

## 7. Фазові переходи

### 7.4. Рівняння стану для бозе-газу $y < 1$

$$f(y) = 2,36 (-\ln y)^{3/2} + 1,34 + 2,61 \ln y - 0,73 (\ln y)^2 + \dots,$$

$$f'(y) = -3,54 (-\ln y)^{1/2} + 2,61 - 1,46 \ln y - 0,10 (\ln y)^2 + \dots$$

Критичне значення  $\frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_0} f'(1) = \frac{2,61}{v_0}$

$$\begin{aligned} N &= \sum_j \frac{1}{\exp(-\alpha + \beta E_j) - 1} = \\ &= \frac{1}{\exp(-\alpha + \beta E_0) - 1} + \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\exp(-\alpha + \beta E_j) - 1} \end{aligned}$$

$$E_0 = 0 \quad v_1 < v_c \quad N = \frac{1}{e^{-\alpha} - 1} + \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\exp(-\alpha + \beta E_j) - 1}$$

## 7. Фазові переходи

### 7.5. Рівняння стану для бозе-газа $v_1 < v_c$

$$N = N_0 + \frac{v}{v_0} y f'(y) \quad 1 = \frac{N_0}{N} + \frac{v_1}{v_c} \frac{y f'(y)}{f'(1)}$$

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\alpha} - 1} = \frac{y}{1 - y} \approx \frac{1}{1 - y}$$

$$1 = \frac{1}{N(1 - y)} + \frac{v_1}{v_c} \quad (v_1 < v_c)$$

$$y = 1 - \frac{1}{N} \frac{v_c}{v_c - v_1}$$

$$y \rightarrow 1 \quad N \rightarrow \infty$$

## 7. Фазові переходи

### 7.6. Рівняння стану для бозе-газу $v_1 < v_c$

Конденсація Бозе-Ейнштейна

$$\beta p = \frac{1}{v_0} f(1), \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{v_1}{v_c}$$

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad T < T_c$$

## 7. Фазові переходи

### 7.7. Рівняння стану для бозе-газа

Конденсація Бозе-Ейнштейна

Задача. Оцінити температуру конденсації Бозе-Ейнштейна для ідеального газу бозонів з молекулярною вагою 4, та густиною  $0,15 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  (рідкий гелій).

Задача. Визначити теплоємність ідеального бозе-газа.