Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Семінарське (практичне) заняття #8

Модуль #2

Квантова неідеальна плазма

8. Метод Мацубари

8.1. Температурні функції Гріна.

T=0

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1,\tau_1;\ \mathbf{r}_2,\tau_2) =$$

$$= \begin{cases} -\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\beta^+(\mathbf{r}_2)\right], \\ \qquad \tau_1 > \tau_2, \\ \pm\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\beta^+(\mathbf{r}_2)e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)\right], \\ \qquad \tau_1 < \tau_2. \end{cases}$$

Термодинамічний потенціал $\quad d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu$

8. Метод Мацубари

8.2. Температурні функції Гріна.

Оператори Гайзенберга

$$\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r},\tau) = e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi_\alpha(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},$$

$$\overline{\widetilde{\psi}}_\alpha(\mathbf{r},\tau) = e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi_\alpha^{+}(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},$$

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{r},\tau) = e^{\tau\hat{H}}\varphi(\mathbf{r})e^{-\tau\hat{H}}.$$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1,\tau_1;\ \mathbf{r}_2,\tau_2) = -\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}T_\tau\left(\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau_1)\overline{\widetilde{\psi}}_\beta(\mathbf{r}_2,\tau_2)\right)\right\} \equiv$$

$$\equiv -\left\langle T_\tau\left(\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau_1)\overline{\widetilde{\psi}}_\beta(\mathbf{r}_2,\tau_2)\right)\right\rangle.$$

8. Метод Мацубари

8.3. Температурні функції Гріна.

Оператор впорядкування

$$T_\tau(\psi_1\psi_2\dots) = \delta_P\psi_{i_1}\psi_{i_2}\dots,$$

$$, \delta_P \quad \begin{matrix} +1 \\ -1, \end{matrix} \qquad 1, 2, \dots \to i_1, i_2, \dots$$

$$T_\tau\left(\widetilde{\psi}(1)\widetilde{\overline{\psi}}(2)\right) = \widetilde{\psi}(1)\widetilde{\overline{\psi}}(2). \qquad \tau_1 > \tau_2,$$

$$T_\tau\left(\widetilde{\psi}(1)\widetilde{\overline{\psi}}(2)\right) = -\widetilde{\overline{\psi}}(2)\widetilde{\psi}(1), \qquad \tau_1 < \tau_2.$$

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(1,2;\ 3,4) = \left\langle T_\tau\left(\widetilde{\psi}_\alpha(1)\widetilde{\psi}_\beta(2)\widetilde{\overline{\psi}}_\gamma(3)\widetilde{\overline{\psi}}_\delta(4)\right)\right\rangle.$$

8. Метод Мацубари

8.4. Температурні функції Гріна.

Парні взаємодії

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\int \psi_\alpha^+(\mathbf{r})\Delta\psi_\alpha(\mathbf{r})d\mathbf{r} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_\alpha^+(\mathbf{r}_1)\psi_\beta^+(\mathbf{r}_2)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\psi_\beta(\mathbf{r}_2)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1).$$

$$E(\mu,T) = \langle\hat{H}\rangle = \mp\frac{1}{2m}\int \Delta_{\mathbf{r}_1}\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(1,2)\Bigg|_{\substack{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2\\ \tau_2=\tau_1+0}} d\mathbf{r}_1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\int U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\beta\alpha}(1,2;\ 3,4)\Bigg|_{\substack{\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4=\mathbf{r}_1\\ \tau_3=\tau_4+0,\ \tau_4=\tau_1+0\\ \tau_1=\tau_2+0}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

8. Метод Мацубари

8.5. Температурні функції Гріна.

Парні взаємодії

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\int \psi_\alpha^+(\mathbf{r})\Delta\psi_\alpha(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_\alpha^+(\mathbf{r}_1)\psi_\beta^+(\mathbf{r}_2)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\psi_\beta(\mathbf{r}_2)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1).$$

$$E(\mu,T) = \langle\hat{H}\rangle = \mp\frac{1}{2m}\int \Delta_{\mathbf{r}_1}\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(1,2)\Bigg|_{\substack{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2\\ \tau_2=\tau_1+0}} d\mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}\int\int U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\beta\alpha}(1,2;\ 3,4)\Bigg|_{\substack{\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4=\mathbf{r}_1\\ \tau_3=\tau_4+0,\ \tau_4=\tau_1+0\\ \tau_1=\tau_2+0}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

8. Метод Мацубари

8.6. Теорія збурень.

Аналогія для S-матриці= $\mathfrak{S}(\tau)\ (0 < \tau < 1/T)$

$$e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} = e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau),$$

$$e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \mathfrak{S}^{-1}(\tau)e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}$$

Оператори

$$\psi(\mathbf{r},\tau) = e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},$$

$$\overline{\psi}(\mathbf{r},\tau) = e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi^{+}(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}$$

8. Метод Мацубари

8.7. Теорія збурень.

Оператори

$$\hat{H}(\tau) = e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}\hat{H}e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})},$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}\hat{H}_{\text{int}}e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}$$

Рівняння

$$\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau} = -\hat{H}_{\text{int}}(\tau)\mathfrak{S}(\tau).$$

$$\mathfrak{S}(\tau) = T_\tau \exp\left\{ -\int_0^\tau \acute{H}_{\text{int}}(\tau')d\tau' \right\}$$

$$-(\hat{H} - \mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H} - \mu\hat{N})} =$$

$$= e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau} - (\hat{H}_0 - \mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau)$$

8. Метод Мацубари

8.8. Теорія збурень.

Представлення взаємодії

$$\mathfrak{S}(\mathbf{r}_1, \tau_1;\ \mathbf{r}_2, \tau_2) = -\frac{\operatorname{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu\hat{N}}{T}} T_\tau\left(\psi(\mathbf{r}_1, \tau_1)\overline{\psi}(\mathbf{r}_2, \tau_2)\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\}}{\operatorname{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}}$$

$$\mathfrak{S}(\mathbf{r}_1, \tau_1;\ \mathbf{r}_2, \tau_2) = -\frac{\langle T_\tau(\psi(\mathbf{r}_1, \tau_1)\overline{\psi}(\mathbf{r}_2, \tau_2)\mathfrak{S})\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0},$$

$$\langle\ldots\rangle_0 = \operatorname{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega_0 + \mu\hat{N} - \hat{H}_0}{T}}\ \ldots\right\}, \quad \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right).$$

8. Метод Мацубари

8.9. Температурні функції Гріна.

Властивості системи
$$n = N/V$$

$$N = \pm \int \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, \tau; \; \mathbf{r}, \tau + 0) d\mathbf{r}$$
$$\hat{N} = \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Термодинамічний потенціал
$$\Omega = \Omega_0 - T \ln \langle \mathfrak{S} \rangle_0$$

$$\Omega_0 = -T \ln \mathrm{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \right\}$$

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1, 2; \; 3, 4) = -\frac{\langle T_\tau(\psi(1)\psi(2)\overline{\psi}(3)\overline{\psi}(4)\mathfrak{S})\rangle_0}{\langle \mathfrak{S} \rangle_0}.$$

8. Метод Мацубари

8.10. Температурні функції Гріна.

Теорія збурень

$$\mathfrak{S} = 1 - \int\limits_0^{1/T} \hat{H}_{\text{int}}(\tau')d\tau' + \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/T}\int\limits_0^{1/T} d\tau' d\tau'' T_\tau(\hat{H}_{\text{int}}(\tau')\hat{H}_{\text{int}}(\tau'')) - \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{1/T} \cdots \int\limits_0^{1/T} d\tau_1 \ldots d\tau_n T_\tau(\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1) \ldots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_n)).$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1;\ \mathbf{r}_2, \tau_2) = -\frac{1}{\langle \mathfrak{S} \rangle_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{1/T} \cdots \int\limits_0^{1/T} d\tau_1' \ldots d\tau_n' \times$$

$$\times \left\langle T_\tau \left(\psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \overline{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \hat{H}_{\text{int}}(\tau_1') \ldots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_n') \right) \right\rangle_0.$$

8. Метод Мацубари

8.11. Температурні функції Гріна.

Теорія збурень

$$\mathfrak{S} = 1 - \int\limits_0^{1/T} \hat{H}_{\text{int}}(\tau')d\tau' + \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/T}\int\limits_0^{1/T} d\tau' d\tau'' T_\tau(\hat{H}_{\text{int}}(\tau')\hat{H}_{\text{int}}(\tau'')) - \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{1/T} \cdots \int\limits_0^{1/T} d\tau_1 \ldots d\tau_n T_\tau(\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1) \ldots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_n)).$$

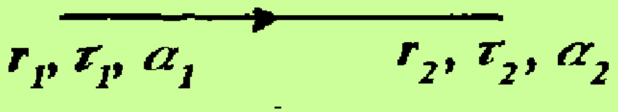
$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1;\ \mathbf{r}_2, \tau_2) = -\frac{1}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{1/T} \cdots \int\limits_0^{1/T} d\tau_1' \ldots d\tau_n' \times$$

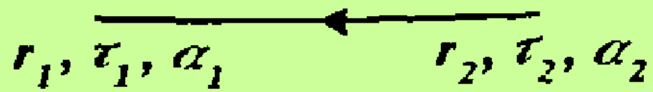
$$\times \left\langle T_\tau\left(\psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1)\overline{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2)\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1') \ldots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_n')\right)\right\rangle_0.$$

8. Метод Мацубари

8.12. Температурні функції Гріна.

Діаграми





$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_1, \tau_1;\ \mathbf{r}_2, \tau_2) \equiv \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2)$$

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_2\alpha_1}(\mathbf{r}_2, \tau_2;\ \mathbf{r}_1, \tau_1) \equiv \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_2\alpha_1}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tau_2 - \tau_1)$$

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2) = -\langle T_\tau\{\psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1)\overline{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2)\}\rangle_0$$

8. Метод Мацубари

8.13. Температурні функції Гріна.

Перший порядок збурень

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = \frac{1}{2}\int\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \overline{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau)\overline{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2,\tau)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times \\ \times\psi_\beta(\mathbf{r}_2,\tau)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau)$$

$$\mathfrak{U}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\tau_1-\tau_2) = U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\tau_1-\tau_2)$$

$$\mathfrak{S} = T_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\tau_1 d\tau_2 \psi_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau_1)\overline{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2,\tau_2)\times \right. \\ \left. \times\,\mathfrak{U}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\tau_1-\tau_2)\psi_\beta(\mathbf{r}_2,\tau_2)\overline{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau_1)\right\}$$

8. Метод Мацубари

8.14. Температурні функції Гріна.

Перший порядок збурень

$$\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int d^4z_1 d^4z_2 \langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)\mathfrak{U}(z_1-z_2)\overline{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\overline{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\times$$

$$\times\, \psi_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle$$

$$\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \qquad \mathrm{(I)}$$

$$\mp\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \qquad \mathrm{(II)}$$

$$\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\,\langle T_\tau\{\psi_{\gamma_1}(z_1)\overline{\psi}_\beta(y)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \qquad \mathrm{(III)}$$

$$\mp\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\,\langle\{\overline{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\,\langle T_\tau\{\psi_{\gamma_2}(z_2)\overline{\psi}_\beta(y)\}\rangle \qquad \mathrm{(IV)}$$

8. Метод Мацубари

8.15. Температурні функції Гріна.

Перший порядок збурень

$$x = (\mathbf{r}, \tau). \qquad d^4x = d\mathbf{r}d\tau \qquad \mathfrak{G}(x - y) = \mathfrak{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_1 - \tau_2)$$

$$-\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_1}(0)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0)\mathfrak{U}(z_1-z_2), \qquad \text{(I)}$$

$$\pm\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_1}(z_2-z_1)\mathfrak{U}(z_1-z_2), \qquad \text{(II)}$$

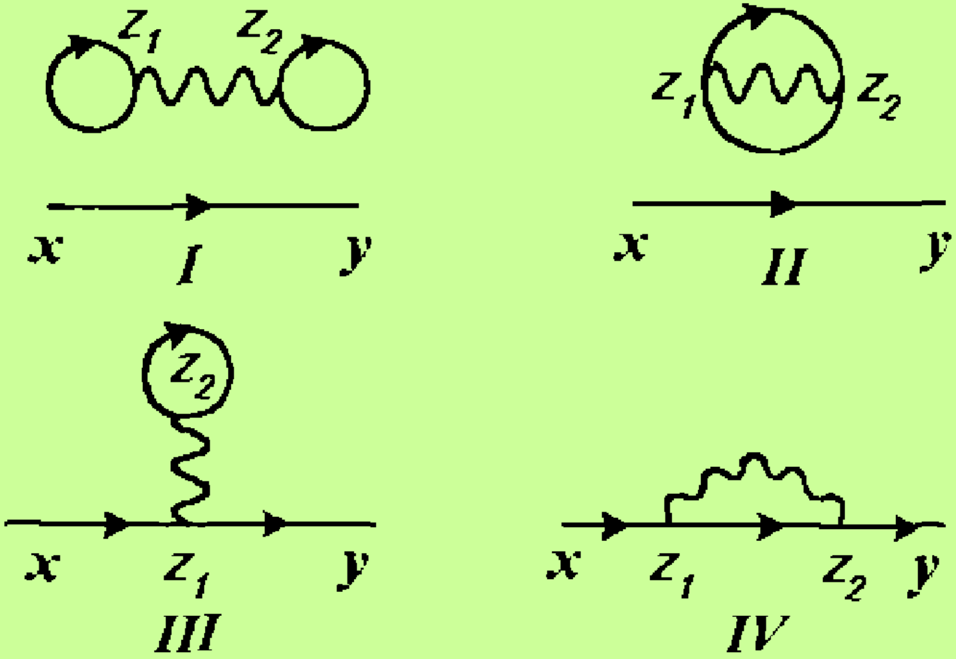
$$\pm\iint d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0)\mathfrak{U}(z_1-z_2), \qquad \text{(III)}$$

$$-\iint d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\mathfrak{U}(z_1-z_2). \qquad \text{(IV)}$$

8. Метод Мацубари

8.16. Діаграми.

Перший порядок збурень



8. Метод Мацубари

8.17.Загальні правила

1) Зобразити всі зв'язані діаграми;

2) $\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)$, початок $x,\ \alpha \longrightarrow y,\ \beta$ кінець ;

3) $\mathfrak{U}(x-y)$ узагальнений потенціал

4)Інтегруванння по вершинах z $(d^4z = d\mathbf{z}\,d\tau)$

та підсумовування по спінах α

5)Множення на $(-1)^{n+F}$, де n-порядок діаграми, F-число - замкнених ферміонних петель

6)Часові змінні $\mathfrak{G}^{(0)}(0)$.є границею $\lim\limits_{\tau\to+0}\mathfrak{G}^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,-\tau)$

.