Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #5

Модуль #1

Класична неідеальна плазма

5.1. Рівноважна Ієрархія ББГКІ

5.1.1. Рівняння балансу сил

$$\frac{\partial\left(\theta \ln G_{1,\ \ldots,\ l} + U_{1,\ \ldots,\ l}\right)}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \rho_0 \int_V \frac{\partial \Phi_{1,\ l+1}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \frac{G_{1,\ \ldots,\ l,\ l+1}}{G_{1,\ \ldots,\ l}} d\boldsymbol{r}_{l+1} = 0.$$

$$F_{1,\ \ldots,\ l}^{(\mathrm{col})} = -\rho_0 \int_V \frac{\partial \Phi_{1,\ l+1}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \frac{G_{1,\ \ldots,\ l,\ l+1}}{G_{1,\ \ldots,\ l}} d\boldsymbol{r}_{l+1}$$

$$F^{(\mathrm{u})} = -\frac{\partial U_{1,\ \ldots,\ l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}$$

$$F_{1,\ \ldots,\ l}^{(\theta)} = -\theta \frac{\partial \ln G_{1,\ \ldots,\ l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}$$

$$F_{(l)}^{(\mathrm{col})} = -\theta\rho \int_V \frac{\partial\left(\Phi_{1,\ l+1}/\theta\right)}{\partial \boldsymbol{r}_1} \frac{G_{(l+1)}}{G_{(l)}} d\boldsymbol{r}_{l+1} = -\frac{\partial\left(\theta\rho I_{(l)}\right)}{\partial \boldsymbol{r}_1},$$

$$I_{(l)}(\boldsymbol{r}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}_l;\ \rho,\ \theta)$$

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.1. Шляхи можливого перетворення рівнянь ланцюжка ББГКІ

⋆ Канонічне розподілення Гіббса =

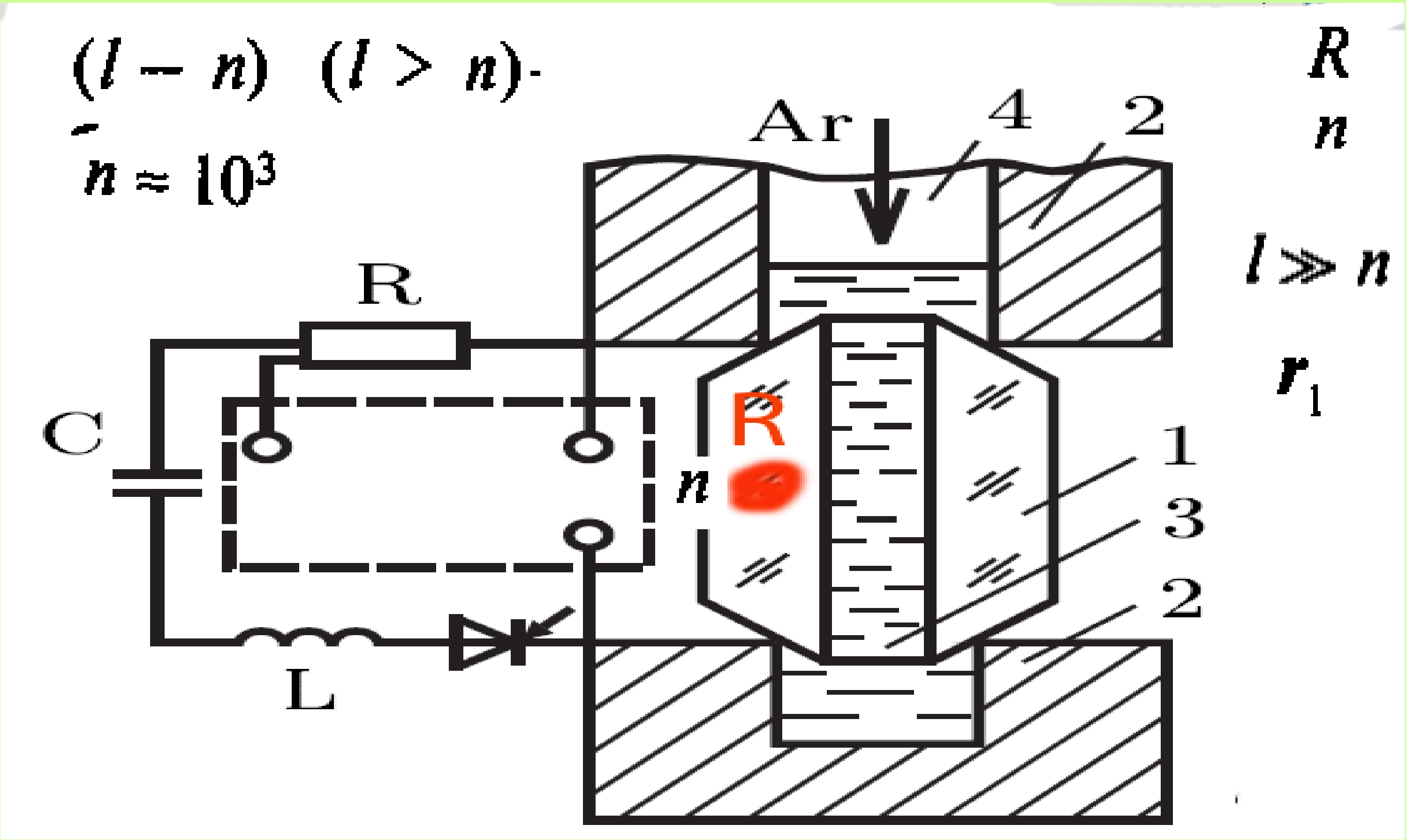
(границя $l \gg n$, інтегрування по r_1)

* Велике канонічне розподілення (гранд-канонічне розподілення) =

(інтегрування по r_1 , границя $l \gg n$)

* Фундаментальна система рівнянь для функцій розподілення

5.1. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.



Ієрархія статистичної теорії. Два рівня. Кореляційна сфера і термостат.

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.2. Розподілення Гіббса для відкритої системи

$$\theta \frac{\partial \ln G_{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{dU_{(l)}}{d\boldsymbol{r}_1} = 0.$$

$(l > n)$.

$Z = 1/Q_l$

$$G_{(l)}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) = \frac{1}{Q_{(l)}} \exp\left[-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{l} \frac{p_i^2}{2m} + U_{(l)}\right)\right] \equiv \frac{1}{Q_{(l)}} \exp\left(-\frac{H_{(l)}}{\theta}\right),$$

$i < l.$

$l \gg n$

$\boldsymbol{r}_1$

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.3. Розподілення Гіббса для закритої системи

$$\delta \sim \frac{S}{V} \approx \frac{1}{L}$$

$$N \approx \rho V$$

$$P = \sqrt{2\pi m\theta}$$

$$l = N \to \infty.$$

$$Q_{(N)} = \frac{1}{P^{3N} V^{N}} \int \exp\left(-\frac{H_{(N)}(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i)}{\theta}\right) d\mathbf{r}_i\, d\mathbf{p}_i = \frac{1}{V^{N}} \int \exp\left(-\frac{U_{(N)}(\mathbf{r}_i)}{\theta}\right).$$

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.3. Розподілення Гіббса для закритої системи. Співвідношення

$$F_{(N)} = -\theta \ln Q_{(N)}.$$

$$P = -\frac{\partial F_{(N)}}{\partial V} = \rho\theta - \frac{1}{6}\int_0^\infty r \frac{d\Phi_{(2)}}{dr} G_{(2)} 4\pi r^2 dr.$$

$$E_{(N)} = \int_V H_{(N)} G_{(N)} \frac{d\mathbf{r}_i}{V^N} \frac{d\mathbf{p}_i}{P^{3N}} = E_{(N)} \int_V G_{(N)} \frac{d\mathbf{r}_i}{V^N} \frac{d\mathbf{p}_i}{P^{3N}} = E_{(N)}. \quad \overline{H_{(N)}} = E_{(N)}$$

$$\theta S_{(N)} = \int \left[F_{(N)} - H_{(N)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \right] G_{(N)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \frac{d\mathbf{r}_i}{V^N} \frac{d\mathbf{p}_i}{P^{3N}} = F_{(N)} - E_{(N)}.$$

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.3. Розподілення Гіббса для закритої системи. Кореляційна сфера і термостат

$$U_{(l)} = \sum_{i,j=1}^{l} \Phi_{i,j} = \sum_{j=2}^{l} \Phi_{1,j} + \sum_{j=3}^{l} \Phi_{2,j},$$

$$l > n$$

$$G_{1,\ldots,l} = 1 \quad \text{при} \quad r_{1j} > R.$$

$$\frac{\partial \theta \ln G_{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \begin{cases} -\sum_{j=2}^{n} \dfrac{\partial \Phi_{1,j}}{\partial \boldsymbol{r}_1} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$\sum_{j=n+1}^{l} \Phi_{1,j} = 0$$

$$G_{(l)}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) = \frac{1}{Q_l} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=l+1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}\right) = \frac{1}{Q_l} \prod_{i=l}^{N} \exp\left(-\frac{p_i^2}{2m\theta}\right).$$

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.3. Розподілення Гіббса для закритої системи.

Статистична сумма

$$f(r) = \exp\left(-\frac{\Phi(r)}{\theta}\right) - 1$$

$$Q_{(N)} = \int \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i,j=1}^{N}\Phi_{i,j}\right)\frac{d\mathbf{r}_1, \ \ldots, \ d\mathbf{r}_N}{V^N} =$$

$$= \int \prod_{i,j}\left(1 + f_{i,j}\right)\frac{d\mathbf{r}_1, \ \ldots, \ d\mathbf{r}_N}{V^N} = 1 + \rho a_1(\theta) + \ldots .$$

$$P = \theta \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k B_k(\theta)$$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення. $\boldsymbol{r}_1$ $l \gg n$

5.3.1. Характеристичні функції.Хімічний потенціал

$$G_{(1)}(\boldsymbol{r}) = z\exp\left[\frac{1}{\theta}\left(-\Phi_{(1)}(\boldsymbol{r}) + \theta\rho I_{(1)}(\boldsymbol{r})\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{\theta}\left(\mu - e_{(1)}(\boldsymbol{r})\right)\right],$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0 G_{(1)}(\boldsymbol{r})$$

$$G_{1,\,\ldots,\,l} = z^l \exp\left[-\frac{1}{\theta}\left(U_{1,\,\ldots,\,l} - \theta\rho I_{1,\,\ldots,\,l}\right)\right] = \exp\left[\frac{l\mu - e_{1,\,\ldots,\,l}}{\theta}\right],$$

$$G_{(l)}(\boldsymbol{r}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}_l;\ \rho,\ \theta) = z^l \exp\left(-\frac{U_{(l)}}{\theta}\right).$$ $l \gg n$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення. r_1 $l \gg n$

5.3.2. Характеристичні функції.Відкрита система

$G_{(l)}$ $ZG_{(l)}$ $Z = 1/\Xi$

$$G_{(l)} = \frac{1}{\Xi}\exp\left(\frac{l\mu - U_{(l)}}{\theta}\right) = \frac{\tilde{z}^l}{\Xi}\exp\left(-\frac{U_{(l)}}{\theta}\right),$$

$$\tilde{z} = \exp\left(\frac{\mu(\infty)}{\theta}\right),$$

$$\mu(\infty) = \theta \ln(\Lambda^3 \rho_0 z)$$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення.

5.3.3. Характеристичні функції. Закрита система

$N = \rho V$ $\quad l = N$

$$G_{(N)} = \frac{1}{\Xi} \exp\left(\frac{N\mu - U_{(N)}}{\theta}\right),$$

$$G_{(N)} = G_{(N)}\left(p_i^2\right) G_{(N)}\left(r_i\right) = \frac{1}{\Xi} \exp\left(\frac{\Phi_{(N)} - H_{(N)}\left(r_i, p_i\right)}{\theta}\right),$$

$$\Phi_{(N)} = N\mu(\infty).$$

$$\Xi = \exp\left(\frac{\Phi_{(N)}}{\theta}\right) Q_{(N)} \left[\frac{1}{Q_{(N)}} \int \exp\left(-\frac{1}{\theta} U_{(N)}\left(r_i\right)\right) \frac{dr_i}{V^N}\right] =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\theta}\left(\Phi_{(N)} - F_{(N)}\right)\right\}$$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення.

5.3.4. Характеристичні функції. Закрита система

$N = \rho V$ $\quad l = N$ $\quad F_{(N)} = -\theta \ln Q_{(N)}$ $\quad \Phi_{(N)} - F_{(N)} = PV,$

$$\Xi = \exp\left(\frac{PV}{N\theta}\right) \qquad PV = N\theta \ln \Xi, \qquad \Xi = z^N Q_{(N)}$$

$$\Phi_{(N)} \equiv N\mu = E_{(N)} - \theta S_{(N)} + PV$$

$$\Xi = z^N Q_{(N)} = \exp\left(-\frac{N(\mu - f)}{\theta}\right);$$

$$f = \frac{F_{(N)}}{N} = \mu - \frac{1}{\rho}P,$$

$$\ln \Xi = N(\mu - f) = -\frac{P}{\rho\theta}.$$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення. $\mathbf{r}_1$ $l \gg n$

5.3.5. Великий канонічний ансамбль

$$\Re_{1,\,\ldots,\,\infty} = \frac{1}{\Xi}\sum_{l=0}^{\infty} G_{(l)} = \frac{1}{\Xi}\sum_{l=0}^{\infty} z^l \exp\left(-\frac{U_{1,\,\ldots,\,l}}{\theta}\right).$$

$$\frac{1}{V^N}\int_V (\;)\,d\mathbf{r}_1,\;\ldots,\;d\mathbf{r}_N$$

$$\Xi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l Q_{(l)}; \qquad Q_{(l)} = \int_V \exp\left(-\frac{U_{(l)}}{\theta}\right)\frac{d\mathbf{r}_1,\;\ldots,\;d\mathbf{r}_l}{V^l}.$$

5.3. Статистичні ансамблі. Гранд-канонічне розподілення.

5.3.5. Великий канонічний ансамбль. Теорема Ван Хова. Еквівалентність ансамблів.

$$\Xi = \exp\left(\frac{P}{\rho\theta}\right); \qquad P = \rho\theta \ln \Xi = \rho\theta \ln \sum_{l=0}^{\infty} z^l Q_l .$$

$P \geq 0,$ $\quad \Xi(z) = 1 + zQ_2 + z^2 Q_2 + \ldots$ $\quad \ln \Xi \geq 0$ $\quad P = \rho\theta \ln \Xi \geq 0.$

$$\Xi(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l Q_{(l)} \qquad P > 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \geq 0.$$

5.4. Фундаментальна система рівнянь

5.4.1. ФС 2х рівнянь.

$N \approx 10^{23}$ $n \approx 10^{3}$ $(N - n)$

$$\theta \ln G_{(1)}(\mathbf{r}_1) + \Phi_{(1)}(\mathbf{r}_1) - \theta\rho \int G_{(1)}(\mathbf{r}_2) C^{(1)}(\mathbf{r}_{12}) d\mathbf{r}_2 = \theta \ln z = \text{const};$$

$$h(\mathbf{r}_{12}) - C^{(2)}(\mathbf{r}_{12}) - \rho \int\limits_V G_{(1)}(\mathbf{r}_3) C^{(2)}(\mathbf{r}_{13}) h(\mathbf{r}_{23}) d\mathbf{r}_3 = 0,$$

$$G_{(1)} = \exp\left(-\frac{\Phi_{(1)}}{\theta} + w_{(1)}\right);$$

$$G_{12} = G_1 G_2 \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\theta} + w_{12}\right) = G_1 G_2 \left[1 + h_{12}\right].$$

5.4. Фундаментальна система рівнянь

5.4.2. ФС 2х рівнянь.

$N \approx 10^{23}$ $n \approx 10^{3}$ $(N - n)$

$w_{(1)}(\mathbf{r}_i) \equiv w_i$ $w_{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \equiv w_{ij}$

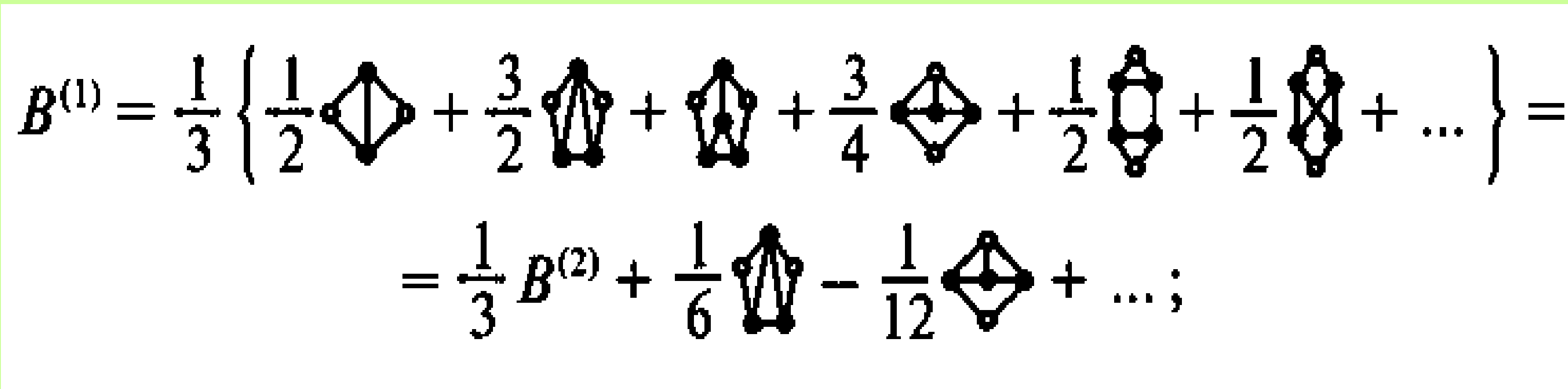
$$h_{12} = \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\theta} + w_{12}\right) - 1;$$

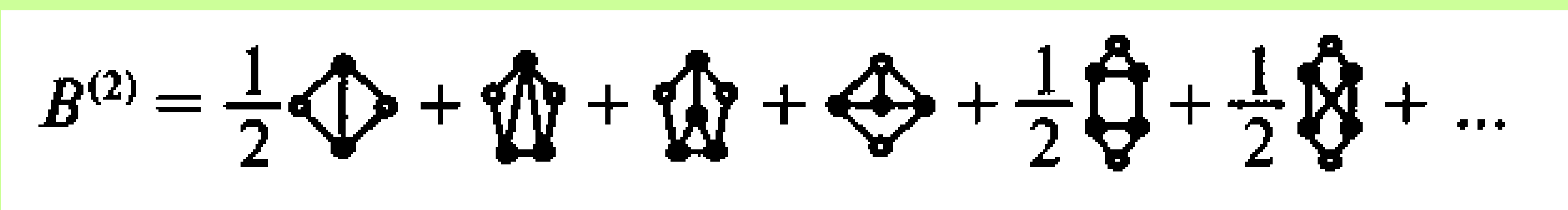
$$C_{12}^{(1)} = h_{12} - w_{12} - \frac{1}{2} h_{12}\left(w_{12} + B_{12}^{(1)}\right),$$

$$C_{12}^{(2)} = h_{12} - w_{12} + B_{12}^{(2)}$$

5.4. Фундаментальна система рівнянь

5.4.3. ФС 2х рівнянь. Брідж-функціонали





5.4. Фундаментальна система рівнянь

5.4.4. ФС 2х рівнянь.

$$\mu_{(1)} = \text{const}; \quad \mu_{12} - \mu_1 - \mu_2 = 0,$$

$G_{(1)}$; $G_{(2)}$

$$U_{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i + \sum_{i,j=1}^{l} \Phi_{i,j}.$$

$$G_{(1)}(x_l) \equiv G_l = \exp(w_l);$$

$$G_{(l)}(x_1; \ldots, x_l) \equiv G_{1,\ldots,l} = \exp(W_{1,\ldots,l}) \prod_{i=1}^{l} G_i$$

$$w = a(r) + b(r)p^2 \qquad w = a(r) + b(r)p^2$$

$$G_{(1)} = \frac{\rho(r)}{\rho_0} \exp\left(-\frac{p^2}{2m\theta}\right).$$