Інститут ядерних досліджень НАНУ

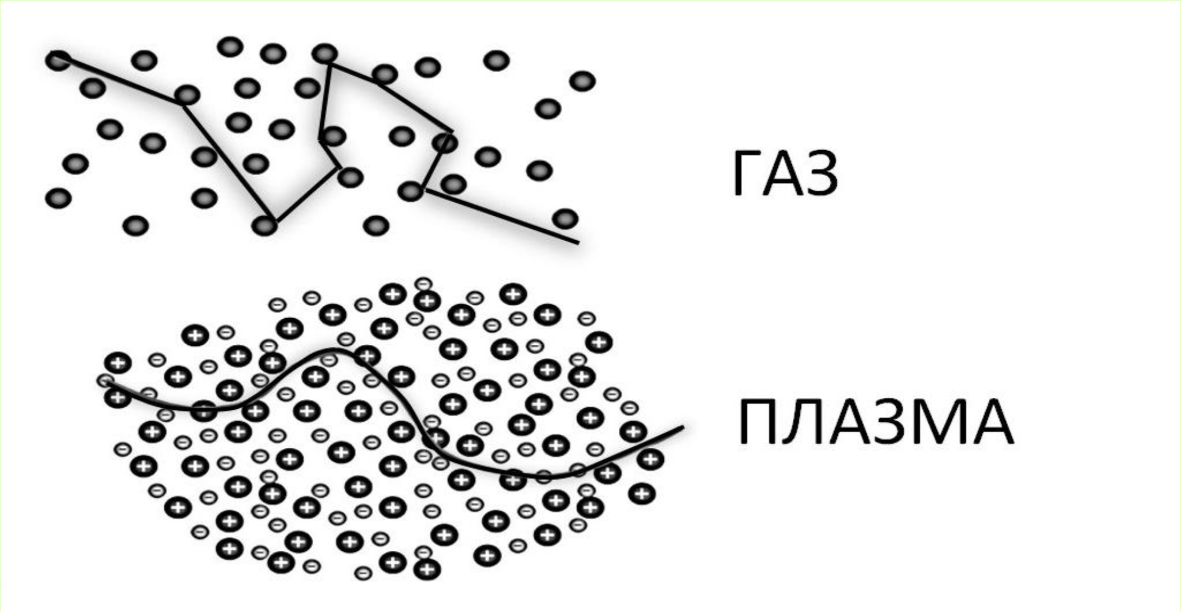
ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #6

Модуль #1

Класична неідеальна плазма

6.1. Статистичний опис плазми



Плазма є середовищем з колективною взаємодією

6.1. Статистичний опис плазми

6.1.1. Загальні співвідношення

$\alpha = 1, 2, \ldots, M$ $\quad N \sim 10^{23}$ $\quad d(i) \equiv d(\vec{r}_i)$

V $\quad N = \sum_{\alpha=1}^{M} N_\alpha$ $\quad e_\alpha = z_\alpha e$ $\quad n = \sum n_\alpha$ $\quad n_\alpha = \lim_{\substack{N \to \infty \\ V \to \infty}} (N_\alpha / V)$ $\quad \theta = kT$

Умова електронейтральності для густини заряду $\quad q = \sum e_\alpha n_\alpha = 0$

Розподілення Гіббса $\quad G_{1,2,\ldots,N} \equiv G_{(N)}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = Q_N^{-1} \exp\left(-U_{(N)}/\theta\right)$

Конфігураційний інтеграл $\quad Q_N^{-1} = V^{-N} \int \exp\left(-U_{(N)}/\theta\right) d(1) \ldots d(N)$ $\quad d(i)$

$$F_{(N)} = U_{(N)} + \theta \ln G_{(N)} = -\theta \ln Q_{(N)}$$

$$P = -\left(\partial F / \partial V\right)$$

6.1. Статистичний опис плазми

6.1.2. Адитивне наближення для потенціальної енергії.

$$U_{(N)} = \sum_{i>j}\sum \Phi_{ij}\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right)$$

Сферично-симетричні потенціали $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}\left(r_{\alpha\beta}\right)$ $r_{\alpha\beta} = \left|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right|$

В плазмі

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi^s_{\alpha\beta} + \Phi^c_{\alpha\beta}$$

Короткодіючий потенціал $\Phi^s_{\alpha\beta}$

Кулонівський $\Phi^c_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta \Big/ \left(\varepsilon r_{\alpha\beta}\right)$

6.1. Статистичний опис плазми

6.1.3. l-часткові функції

$$G_{(l)} \equiv G_{1,2,\ldots,l} = V^{l-N}\int G_{(N)} d\left(l+1\right)\ldots d\left(N\right)$$

$$G_{(l)} \to G_1 G_2 \ldots G_l, \quad \vec{r}_i \to \infty; i = 1,2,\ldots l$$

$$\Omega_{(l)} \equiv \ln G_{(l)} + U_{(l)} \Big/ \theta = \sum^{l} \omega_i + \sum_{j>i}^{l} \omega_{ij} + \ldots + \omega_{(l)}$$

$$\omega_{(l)} \to 0, \quad \vec{r}_i \to \infty; i = 1,2,\ldots l$$

$$\mu_{(l)} = \mu_{(l)}^{(0)}(\theta) + U_{(l)} + \theta \ln\left(n_1 \ldots n_l G_{(l)} z_{(l)}\right)$$

6.2. Однорідні системи

6.2.1. Бінарна функція розподілення. Повна кореляційна функція

$$G_{(1)} \equiv G_{\alpha} = 1$$

$$G_{(2)} \equiv G_{\alpha\beta} \qquad h_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - 1$$

$$\lim_{r\to\infty} G_{\alpha\beta}(r) = 1 \qquad \lim_{r\to\infty} h_{\alpha\beta}(r) = 0$$

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$$

6.2. Однорідні системи

6.2.2. Внутрішня енергія і тиск

$$U = \frac{1}{2} V \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \int \left(\Phi_{\alpha\beta} - \theta \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial \theta} \right) G_{\alpha\beta} 4\pi r^2 dr$$

$$P = n\theta \left[1 - \left(6n\theta \right)^{-1} \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \int \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial r} G_{\alpha\beta} 4\pi r^2 dr \right]$$

$$K = \frac{3}{2} N\theta$$

6.2. Однорідні системи

6.2.3. Умови електронейтральності плазми. Умови Стіллінджера-Ловетта

$$q = \sum e_\alpha n_\alpha = 0$$

$$e_\alpha + \sum_\beta n_\beta e_\beta \int G_{\alpha\beta} 4\pi r^2 dr = 0$$

$$1 + \frac{2\pi}{3\varepsilon\theta} \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta e_\alpha e_\beta \int G_{\alpha\beta} 4\pi r^2 dr = 0$$

6.2. Однорідні системи

6.2.4. Структурний фактор

$$S_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\sqrt{n_\alpha n_\beta}\int_0^\infty h_{\alpha\beta}(r)\frac{\sin kr}{kr}r^2 dr$$

$$I(k) = \sum_{\alpha,\beta}\sqrt{n_\alpha n_\beta}\, f_\alpha f_\beta S_{\alpha\beta}(k) \qquad k = (4\pi/\lambda)\sin\theta$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 2, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

6.3. Теорія Дебая-Гюккеля

6.3.1. Рівняння Пуассона

$$e_\alpha$$

$$q_\alpha = \sum_\beta n_\beta e_\beta G_{\alpha\beta}(r) \qquad \psi_{\alpha\beta} = e_\beta \psi_\alpha / \theta$$

$$\Delta\psi_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi e_\beta}{\varepsilon\theta}\left(e_\alpha \delta(r) + \sum_\gamma n_\gamma e_\gamma G_{\alpha\gamma}\right)$$

$$\delta(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(\infty) = 0$$

$$\psi_\alpha = \varepsilon^{-1}\left(e_\alpha / r + \int q_\alpha(\vec{r}')\frac{d(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$$

$$\psi_\alpha = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dx}{x^2}\int_x^\infty q_\alpha(z) z dz + \frac{1}{\varepsilon r}\left[e_\alpha + 4\pi\int_0^\infty q_\alpha(r) r^2 dr\right]$$

6.3. Теорія Дебая-Гюккеля

6.3.2. Рівняння Пуассона-Больцмана

$$G_{\alpha\beta} = \exp\left(-\psi_{\alpha\beta}\right)$$

$$\Delta\psi_{\alpha\beta} = -\kappa_0^2 \sum_{\gamma} \lambda_{\beta\gamma} \nu_{\gamma} \exp\left(-\psi_{\alpha\gamma}\right) - \chi_0 \delta\left(r\right)$$

$$\lambda_{\beta\gamma} = z_{\beta} z_{\gamma} / m \qquad m = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} z_{\alpha}^2 \qquad \nu_{\gamma} = n_{\gamma} / n$$

$$\delta = \chi\kappa$$

$$\kappa_0 \equiv 1/r_D \qquad \kappa_0 = \sqrt{4\pi n m e^2 / \varepsilon\theta}$$

$$\kappa = \kappa_0 R \qquad \chi = \chi_0 / R = m e^2 / \left(\varepsilon\theta R\right)$$

6.3. Теорія Дебая-Гюккеля

6.3.3. Рівняння Дебая-Гюккеля. $G_{\alpha\beta} \approx 1 - \psi_{\alpha\beta}$ $\quad M = 2$ $\quad z_{\alpha} = -z_{\beta}$

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi - \chi\delta(r) \qquad \psi_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}\psi$$

$$\psi = \frac{\chi}{r}\exp(-\kappa r)$$

6.3. Теорія Дебая-Гюккеля

6.3.4. Рівняння стану

$$G_{\alpha\beta} \approx 1 - \psi_{\alpha\beta} \qquad M = 2 \qquad z_\alpha = -z_\beta$$

$$\delta = \chi\kappa$$

$$u \equiv U/(N\theta) = -\chi\kappa/2$$

$$p \equiv P/(n\theta) = 1 + u/3$$

$$p = 1 - \frac{\delta}{6} - \frac{\delta^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi^{2k-3}}{(2k)!(2k-3)} + O\left(\kappa^3\right)$$

6.3. Теорія Дебая-Гюккеля

6.3.5. Система кулонівських кульок

$$r = \frac{r'}{R_0}$$

$$r < 1 \quad G_{\alpha\beta} = 0 \quad \Delta\psi_{\alpha\beta} = -\chi\lambda_{\alpha\beta}\delta(r)$$

$r \geq 1$ РПБ РДГ

$$\psi = \frac{\chi}{(1+\kappa)r}\exp\left(-\kappa(r-1)\right)$$

$$u = -\frac{\chi\kappa}{2(1+\kappa)} \qquad p = 1 + \frac{1}{3}(u + 2\rho)$$

$$\rho \equiv \pi n R^3 = \kappa^2 / (4\chi)$$