



Інститут ядерних досліджень НАНУ

ФІЗИКА НЕІДЕАЛЬНОЇ ПЛАЗМИ

Лекція #7

Модуль #1

Класична неідеальна плазма

5.2. Статистичні ансамблі. Розподілення Гіббса.

5.2.1. Шляхи можливого перетворення рівнянь ланцюжка ББГКІ

★ Канонічне розподілення Гіббса =

(границя $l \gg n$, інтегрування по r_1)

* Велике канонічне розподілення (гранд-канонічне розподілення) =

(інтегрування по r_1 , границя $l \gg n$)

* Фундаментальна система рівнянь для функцій розподілення

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.1. ФС 2х рівнянь. $N \approx 10^{23}$ $n \approx 10^3$ $(N - n)$

$$\theta \ln G_{(1)}(\mathbf{r}_1) + \Phi_{(1)}(\mathbf{r}_1) - \theta \rho \int G_{(1)}(\mathbf{r}_2) C^{(1)}(\mathbf{r}_{12}) d\mathbf{r}_2 = \theta \ln z = \text{const};$$

$$h(\mathbf{r}_{12}) - C^{(2)}(\mathbf{r}_{12}) - \rho \int_V G_{(1)}(\mathbf{r}_3) C^{(2)}(\mathbf{r}_{13}) h(\mathbf{r}_{23}) d\mathbf{r}_3 = 0,$$

$$G_{(1)} = \exp\left(-\frac{\Phi_{(1)}}{\theta} + w_{(1)}\right);$$

$$G_{12} = G_1 G_2 \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\theta} + w_{12}\right) = G_1 G_2 [1 + h_{12}].$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.2. ФС 2х рівнянь. $N \approx 10^{23}$ $n \approx 10^3$ $(N - n)$

$$w_{(1)}(\mathbf{r}_j) \equiv w_j \quad w_{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \equiv w_{ij}$$

$$h_{12} = \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\theta} + w_{12}\right) - 1;$$

$$C_{12}^{(1)} = h_{12} - w_{12} - \frac{1}{2} h_{12} (w_{12} + B_{12}^{(1)}),$$

$$C_{12}^{(2)} = h_{12} - w_{12} + B_{12}^{(2)}$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.3. ФС 2х рівнянь. Брідж-функціонали

$$B^{(1)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \text{diag}_1 + \frac{3}{2} \text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \frac{3}{4} \text{diag}_4 + \frac{1}{2} \text{diag}_5 + \frac{1}{2} \text{diag}_6 + \dots \right\} =$$
$$= \frac{1}{3} B^{(2)} + \frac{1}{6} \text{diag}_2 - \frac{1}{12} \text{diag}_4 + \dots;$$

$$B^{(2)} = \frac{1}{2} \text{diag}_1 + \text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \text{diag}_4 + \frac{1}{2} \text{diag}_5 + \frac{1}{2} \text{diag}_6 + \dots$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.4. Просторово-однорідне середовище в рівновазі

$$G_{(1)}(\mathbf{q}) \equiv 1$$

$$G(r) = \exp\left(-\frac{u(r)}{\theta}\right) = \exp\left[-\frac{1}{\theta}(\Phi(r) - \theta w(r))\right],$$

$$\theta \ln z = -\theta\rho \int_V C^{(1)}(\mathbf{r}_{12}) d\mathbf{r}_2.$$

$$h(\mathbf{r}_{12}) = C^{(2)}(\mathbf{r}_{12}) - \rho \int_V C^{(2)}(\mathbf{r}_{13}) h(\mathbf{r}_{23}) d\mathbf{r}_3 = 0,$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.5. Кореляційні функції. Повна кореляційна функція

$$h(r) = G(r; \rho, \theta) - 1,$$

$$G(r; \rho, \theta) = \exp[-\varphi(r) + w(r)] \quad \varphi(r) = \frac{\Phi(r)}{\theta}.$$

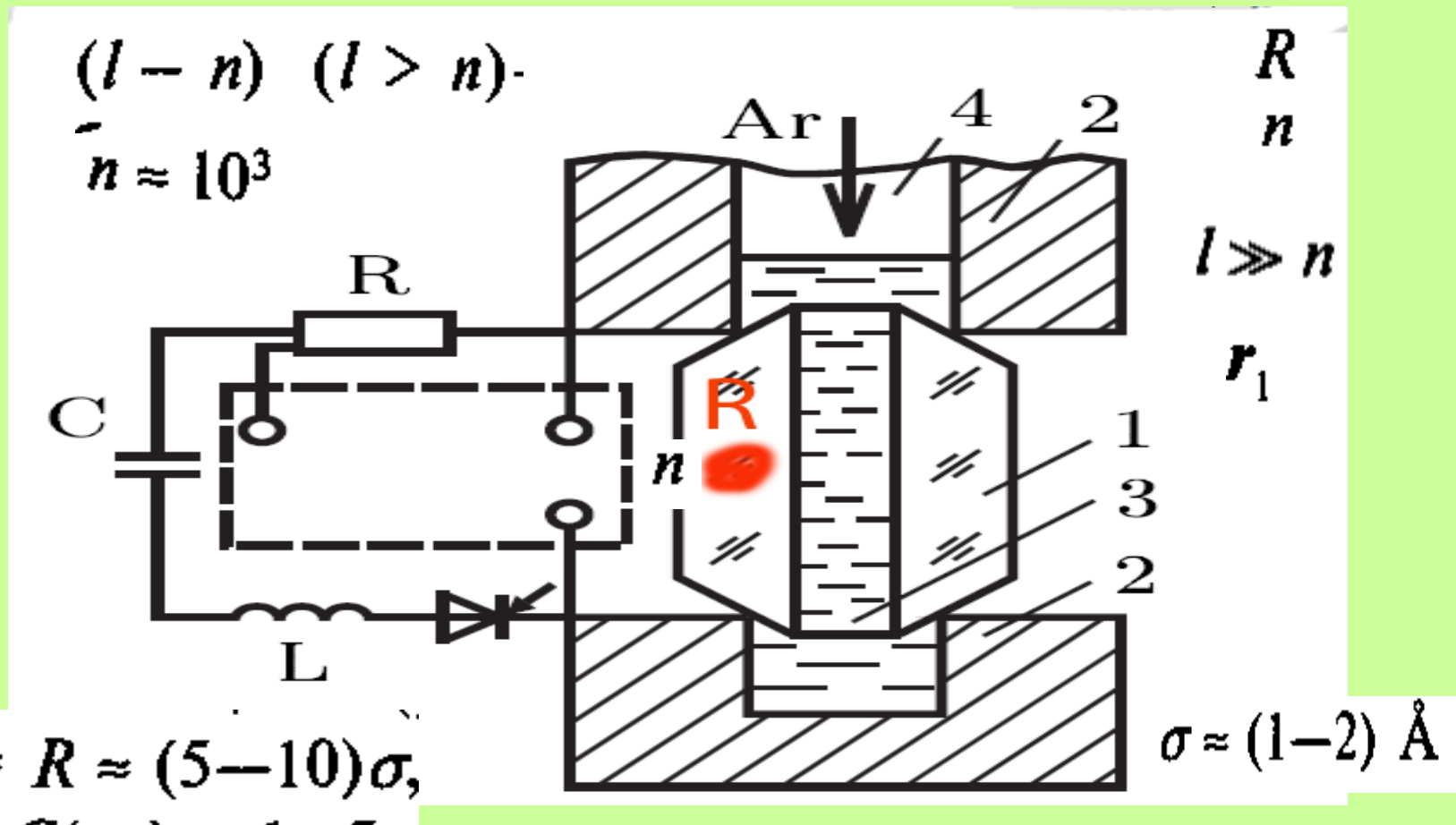
$$\Delta\rho(r_{12}) = \rho h(r_{12}) = \rho G(r_{12}) - \rho \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

$$h = \exp(-\varphi + w) - 1 \equiv f + f(e^w - 1) + (e^w - 1),$$

$$h(r_{12}) = G(r_{12}) - 1$$

$$f = e^{-\varphi} - 1$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми



Ієрархія статистичної теорії. Два рівня. Кореляційна сфера і термостат.

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.6. Кореляційні функції. Пряма кореляційна функція

$$C(r; \rho, \theta) = h - w + B \equiv f + f(e^w - 1) + [e^w - 1 - w + B].$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.7. Замкнення РОЦ. Апроксимація брідж-функціонала./ Гіперланцюгове наближення (hyper netted chain approximation HNC)

$$B[M] = 0$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.8. Замкнення РОЦ. Апроксимація бідж-функціонала./ Наближення Перкуса-Йєвіка (Percus-Yevick)

$$\varphi = \Phi/\theta \equiv 0 \quad f \equiv 0 \quad h = e^w - 1.$$

$$h_{12} = C_{12} + \rho \int C_{13} h_{32} dr_3,$$

$$C = (e^w - 1 - w) + B = 0.$$

$$B_{\text{пй}} = -(e^w - 1 - w) = -\sum_{k=2}^{\theta} \frac{1}{k!} w^k.$$

$$C_{\text{пй}} = f + f(e^w - 1) = fe^w.$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.9. Замкнення РОЦ. Апроксимація брідж-функціонала./ Наближення Перкуса-Йєвіка (Percus-Yevick)

$$h_{12} = f_{12}e^{w_{12}} + \rho \int_V f_{13}e^{w_{13}} h_{23} dr_3.$$

$$\tau = \exp(w) \quad h - C = \tau - 1; \quad h = (1 + f)\tau - 1.$$

$$\tau_{12} = A + \rho \int_V f_{13} (1 + f_{23}) \tau_{13} \tau_{23} dr_3,$$

$$A = 1 - \rho \int_0^{\infty} f(r) \tau(r) 4\pi r^2 dr$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.10. Замкнення РОЦ. Апроксимація брідж-функціонала./ Наближення Перкуса-Йєвіка (Percus-Yevick)/ Система твердих кульок

$$\varphi(r) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq r \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq r \leq \infty; \end{cases} \quad f(r) = \begin{cases} -1, & 0 \leq r \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

$$\frac{P_C}{\rho\theta} = \frac{1 + \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2}{(1 - \tilde{\rho})^3}; \quad \frac{P_V}{\rho\theta} = \frac{1 + 2\tilde{\rho} + 3\tilde{\rho}^2}{(1 - \tilde{\rho})^2},$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\pi\rho}{6}.$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.11. РОЦ.

$$\Omega_{(l)} \equiv \ln G_{(l)} + U_{(l)} / \theta = \sum_i^l \omega_i + \sum_{j>i}^l \omega_{ij} + \dots + \omega_{(l)} \quad \omega_{(l)} \rightarrow 0, \quad \vec{r}_i \rightarrow \infty; i = 1, 2, \dots, l$$

$$\omega_{(s)} = \sum n^k \omega_{(s)}^{(k)}$$

$$f_{ij} = \exp(-\Phi_{ij}^s) - 1$$

$$\omega_{(2)} > \omega_{(3)} > \dots > \omega_{(s)} > \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12} &= n \left(\text{---} \circ \bullet \text{---} \circ \right) + n^2 \left[\text{---} \circ \bullet \bullet \text{---} \circ + \text{---} \circ \bullet \text{---} \circ + \text{---} \circ \bullet \text{---} \circ + \frac{1}{2} \text{---} \circ \bullet \text{---} \circ \right] + n^3 [\dots] + \dots; \\ \omega_{123} &= n \left(\text{---} \circ \bullet \text{---} \circ \right) + 3n^2 \left(\text{---} \circ \bullet \text{---} \circ + \dots \right) + \dots, \end{aligned} \right\}$$

$$\omega(12) = B(12) + n \int [h(13) - \omega(13) + B(23)] h(23) d(3)$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.12. РОЦ.

$$C_{(12)} = h_{(12)} - \omega_{(12)} + B_{(12)}$$

$$B_{12} = \frac{1}{2} \text{ (triangle diagram) } + \left[\text{ (pentagon diagram) } + \text{ (pentagon diagram) } + \text{ (pentagon diagram) } + \frac{1}{2} \text{ (square diagram) } + \frac{1}{4} \text{ (square diagram) } \right] + \dots$$

$$\frac{1}{2} \text{ (triangle diagram) } = \frac{n^2}{2} \int h(13)h(23)h(14)h(24)h(34) d(3)d(4)$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.14. РОЦ.

$$\omega_{\alpha\beta}^s = \omega_{\alpha\beta} - (\Phi_{\alpha\beta}^s / \theta)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\psi_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma} n_{\gamma} \int \left[(h_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma} + B_{\alpha\gamma}) h_{\beta\gamma} + (h_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma}) h_{\alpha\gamma} \right] d(3)$$

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{\Phi_{\alpha\beta}^c}{\theta} + \frac{1}{2\theta} \sum_{\gamma} n_{\gamma} \int (h_{\alpha\gamma} \Phi_{\beta\gamma}^c + h_{\beta\gamma} \Phi_{\alpha\gamma}^c) d(3)$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.15. Потенціал

$$\Delta \psi_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\epsilon\theta} \left[e_\alpha e_\beta \delta(r) + \frac{1}{2} \sum_\gamma n_\gamma e_\gamma (e_\alpha h_{\beta\gamma} + e_\beta h_{\alpha\gamma}) \right] \quad \psi_{\alpha\beta}(\infty) = 0$$

$$\Delta \psi_{\alpha\alpha} = -\frac{4\pi e_\alpha}{\epsilon\theta} \left[e_\alpha \delta(r) + \sum_\gamma n_\gamma e_\gamma G_{\alpha\gamma} \right]$$

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_\beta}{e_\alpha} \psi_{\alpha\alpha} + \frac{e_\alpha}{e_\beta} \psi_{\beta\beta} \right)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \sim \psi_{\alpha\beta}, \quad r \rightarrow \infty.$$

$$r^2 \frac{d\psi_{\alpha\alpha}}{dr} \Big|_0^\infty = e_\alpha^2 / (\epsilon\theta).$$

7.1. Рівняння Орнштейна-Церніке для плазми

7.1.16. Термодинамічні характеристики

$$U^{el} = \frac{V}{2} \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} n_{\beta} \int \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{\epsilon r} G_{\alpha\beta} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{V}{2} \int \sum_{\alpha} n_{\alpha} \left[\frac{4\pi e_{\alpha}}{\epsilon} \sum_{\beta} n_{\beta} e_{\beta} G_{\alpha\beta} \right] r dr.$$

$$U^{el} = \frac{V}{2} \theta \sum_{\alpha} n_{\alpha} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_{\alpha\alpha}) \right]$$

$$u^{el} = \sum_{\alpha} u_{\alpha}^{el} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} v_{\alpha} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dr} (r \psi_{\alpha\alpha}) \right],$$

$$v_{\alpha} = n_{\alpha}/n, \quad u^{el} = U^{el}/(N\theta),$$

$$p = 1 + p^{el} + p^s = 1 + \frac{u^{el}}{3} -$$

$$- \frac{2\pi}{3} n \int \sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha} v_{\beta} r^3 \frac{d}{dr} (\Phi_{\alpha\beta}^s) dr.$$

$$p = P/(n\theta):$$