

Практичні задачі з числових методів
математичної фізики.
ІЯД НАН України

Викладач Ю. В. Яковенко

23 травня 2021 р.

Варіант 1

Задача 1.1 Написати програму обчислення інтегралів методом Симпсона. Застосувати її до інтегралу

$$\int_0^{2\pi} dx \frac{\sin(x)}{x}.$$

Порівняти з правильною відповіддю ≈ 1.41815157613 при різній кількості точок сітки (намалюйте графік або зробіть таблицю).

Задача 1.2 Знайдіть перші три власні значення задачі

$$\lambda u = (5 + e^x)u - \frac{d^2u}{dx^2}, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

методом пристрілювання. Використайте один із методів Рунге-Кутти для розв'язання задачі Коші. Побудуйте графіки перших трьох власних функцій.

Задача 1.3 Розв'яжіть задачу про коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x=0, t) = 0, \quad u(x=1, t) = 0,$$

$$u(x, t=0) = \sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = 0$$

на часовому інтервалі $[0, 1]$, застосувавши різницеву схему «хрест». Уважно поставтеся до вибору часового кроку. Побудуйте графіки $u(x, t = 0.1)$, $u(x, t = 0.2)$, $u(x, t = 0.5)$, $u(x, t = 1)$.

Задача 1.4 Розв'яжіть методом скінченних елементів крайову задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[(4x^2 - 4x + 2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + (x - x^2)u = -16x^2 + 16x - 3, \quad u(0) = 2, \quad u(1) = 1.$$

Варіант 2

Задача 2.1 Функція зветься унімодальною на відрізку, якщо вона має на ньому єдиний максимум, який поділяє інтервал монотонного зростання ліворуч та інтервал монотонного спаду праворуч. Написати програму для пошуку максимуму заданої унімодальної функції $f(x)$ на певному відрізку методом золотого перерізу. Застосувати програму до функції $f(x) = \cos(x) - \exp(x)$ на відрізку $[-\pi/2, \pi]$.

Задача 2.2 Розв'яжіть крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 10u + 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2$$

методом човника (Томаса). Спробуйте виділити метод човника в окрему функцію, яку можна було б використати в подальших задачах. Розв'яжіть задачу аналітично. Виведіть числові та аналітичні результати, побудуйте графіки. Досягніть узгодження.

Задача 2.3 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

$$u(x, t = 0) = x - x^2, \quad u(x = 0, t) = u(x = 1, t) = 0$$

на часовому інтервалі $[0, 1]$, застосувавши одну з неявних схем на ваш смак. Побудуйте графіки $u(x, t = 0.3)$, $u(x, t = 0.5)$, $u(x, t = 1)$. Спробуйте порівняти з аналітичним розв'язком, знайденим методом Фур'є.

Задача 2.4 Розв'яжіть методом скінченних елементів крайову задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [4 \sin(\pi x) + 1] \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \cos(\pi x)u = -4 \cos(2\pi x), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Варіант 3

Задача 3.1 Написати програму для розв'язання рівняння $f(x) = 0$ методом Ньютона. Застосуйте його до функції

$$f(x) = \arctan(x) + 1/(1 + x^2).$$

Дослідіть, як похибка залежить від кількості ітерацій. Дослідіть, як робота програми залежить від початкового наближення.

Задача 3.2 Розв'яжіть крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 3u - u^2 = 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2$$

методом пристрілювання.

Задача 3.3 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} = x + t, \quad u(x, 0) = x, \quad u(0, t) = 1,$$

застосувавши схему «квадрат». Побудуйте графічною програмою графіки $u(x, t = 0.3)$, $u(x, t = 0.5)$, $u(x, t = 1)$. Які властивості схеми ви можете спостерігати?

Задача 3.4 Розв'яжіть методом скінченних елементів крайову задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ [4 \sin(\pi x) + 1] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + \cos(\pi x) u = -4 \cos(2\pi x),$$
$$u(0) = u(1) = u(0)'' = u(1)'' = 0.$$